REVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Ettore A. de Barros

1. INTRODUÇÃO

1.1 Definições

Um número complexo z pode ser definido pelo par ordenado (x,y) de números reais x e y,

$$\boldsymbol{z = (x, y)} \qquad (1)$$

O par $(x,0)$ é identificado com o número real x, e o par (0,1) é identificado com a unidade imaginária i.

Assim, o número complexo

$\boldsymbol{z = (x, y)}$ é formado pelas partes real, $Re(z) = x$,e imaginária, $Im(z)=y$. Portanto, $(0,y)$ é identificado com um número imaginário puro.

a) Igualdade.

Dois números complexos (x_1,y_1), (x_2,y_2) são iguais, se e só se

$$x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2 \qquad (2)$$

Em part icular, $\mathbf{0 = (0,0)}$ se e só se $x = 0$ e $y = 0$.

b) Adição

$$\boldsymbol{z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)} \qquad (3)$$

Em particular, $\boldsymbol{(x,0) + (0, y) = (x, y) = z}$. Logo, pode-se representar z por

$$\boldsymbol{z = x + yi} \qquad (4)$$

c) Produto

$$\boldsymbol{z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)} \qquad (5)$$

zz se escreve z^2, $z^3=zz^2$. De acordo com a definição, tem-se $(0,i)^2=(-1,0)$. Ou seja,

$$\boldsymbol{i^2 = -1} \qquad (6)$$

Aplicando-se (4) em (5), tem-se

$$\boldsymbol{z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i} \qquad (7)$$

d) Subtração

A diferença entre z_1 e z_2 é dada pelo número z_3 :

$$\boldsymbol{z_1 - z_2 = z_3} \qquad (8)$$

Ou seja, z_3 é o número que deve ser somado a z_2 para produzir z_1. A partir de tal definição e de

(1), tem-se:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \qquad (9)$$

e) Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \quad \text{se} \quad z_2 z_3 = z_1 \qquad (z_2 \neq 0) \qquad (10)$$

Ou, $(x_1, y_1) = (x_3 x_2 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_2 y_2)$. Resolvendo-se as equações para as partes real e imaginária, tem-se:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i \qquad (z_2 \neq 0) \qquad (11)$$

A divisão por zero não é definida.

Propriedades

A partir das definições anteriores e da propriedade comutativa para números reais, pode-se verificar a propriedade comutativa para adição e multiplicação:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad (12) \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1 \qquad (13)$$

Pode-se confirmar também a propriedade distributiva para a adição e multiplicação:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \qquad (14) \qquad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \qquad (15)$$

e também a lei distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \qquad (16)$$

2. Representação Geométrica

Pode-se associar o par *(x,y)* com a representação cartesiana, onde a parte real *x* é colocada nas abcissas e a componente imaginária *y* associa-se à componente no eixo das ordenadas. O plano definido por eixos *x*, *y* é conhecido como "plano complexo" (Figura 1).

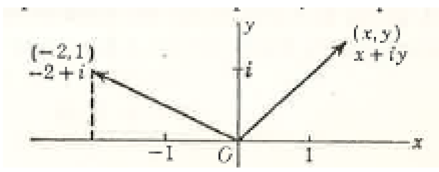


Figura 1. Representação de um número complexo no plano cartesiano.

No mesmo plano, pode-se associar também um vetor com as componentes (x_1, y_1) de um número complexo z_1 bem como um outro vetor (x_2, y_2) representando o número complexo z_2. A soma dos dois, $z_1 + z_2$, é representada pela soma vetorial desses dois vetores. A correspondência com a operação vetorial também vale para a diferença entre dois (Fig. 2). Porém, o mesmo não vale para o produto $z_1 z_2$. O produto desses dois complexos não guarda relação com os produtos vetorial ou escalar das respectivas representações vetoriais dos mesmos no plano complexo (o resultado do produto $z_1 z_2$, no entanto, pode ser interpretado no plano complexo, conforme veremos na seção 5).

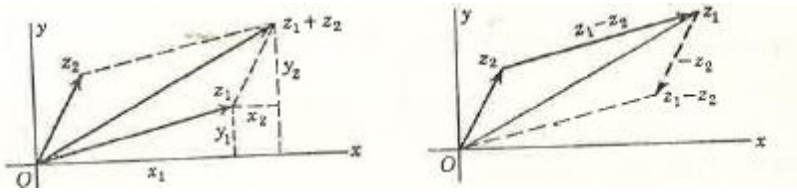


Figura 2. Representação de soma e subtração de números complexos no plano complexo.

3. Conjugados Complexos

O conjugado complexo de um número *z*, de componentes *(x,y)*, é representado pelo símbolo $\bar{z}$, de componentes *(x,-y)*, ou seja,

$$\bar{z} = x - yi \qquad (17)$$

O conjugado corresponde à reflexão do número *z* em relação ao eixo *x*, ou seja, a representação do número $\bar{z}$ é simétrica àquela do número *z* em relação ao eixo *x*.

Uma propriedade facilmente confirmável se refere à soma de 2 números complexos. A mesma estabelece que o conjugado da soma de dois complexos é igual à soma de seus respectivos conjugados, ou seja:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad (18)$$

Outras propriedades que podem ser verificadas pelo leitor são apresentadas a seguir:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \qquad (19)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad (20)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad (21)$$

4. Valores Absolutos

O valor absoluto, ou módulo, de um número complexo $z = x + yi$ é definido por

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (22)$$

A interpretação geométrica do valor absoluto é a distância de z até a origem no plano complexo. Pode-se verificar também que $|z_1 - z_2|$ é a distância entre as representações de z_1 e z_2 no plano complexo:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (23)$$

Utilizando o conceito de conjugado, pode-se também definir o valor absoluto:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \qquad (24)$$

5. Forma Polar

Sabemos que um ponto no plano cartesiano (fig. 3) também pode ser definido por suas coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \qquad (25) \qquad\qquad y = rsen\,\theta \qquad (26)$$

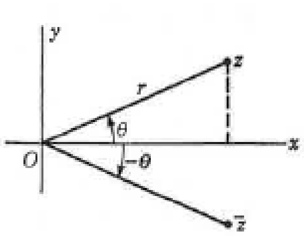


Figura 3. Representação Polar.

A utilização das mesmas para construir a forma polar de representação de um número complexo fica:

$$z = r(\cos\theta + isen\theta) \qquad (27)$$

, onde

$$r = |z|$$

Portanto, ***r*** é o módulo do número complexo. O parâmetro **Θ** é chamado de argumento de *z* e é medido no sentido anti-horário, a partir do semi-eixo positivo das abcissas.

As formas polares de um número complexo *z* e de seu conjugado são ilustradas na figura 3. O argumento de *z* depende dos valores de suas componentes real e imaginária bem como do quadrante onde sua representação no plano complexo se encontra:

$$\theta = tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}\left(\frac{rsen\,\theta}{r\cos\theta}\right) \qquad (28)$$

Pode-se ter múltiplos valores de Θ defasados de múltiplos de 2π que servem à representação polar de um mesmo número *z*. Se *z* tem valor absoluto diferente de zero, existe um único valor de Θ, em radianos, no intervalo $\theta_0 \le \theta \prec \theta_0 + 2\pi$ para a representação polar, onde θ_0 é um número qualquer. Se z = 0, então, $r = 0$ e Θ é arbitrário.

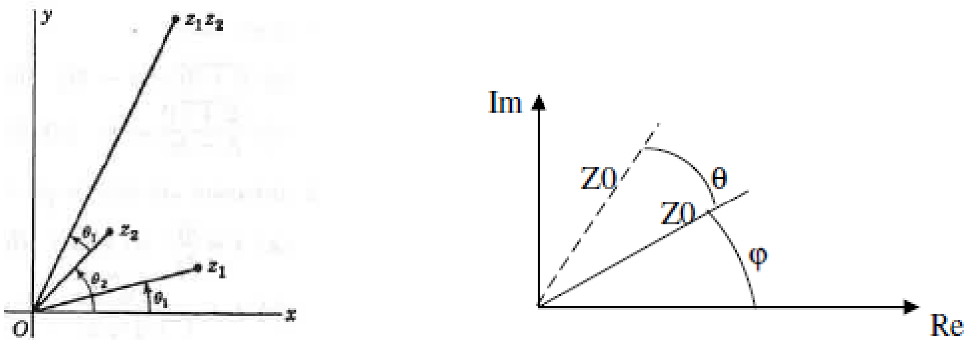
O produto de dois números complexos pode ser interpretado à luz da forma polar. Sejam z_1 e z_2 dois complexos representados por:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + isen\,\theta_1) \qquad \text{e} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + sen\,\theta_2)$$

Pode-se verificar, facilmente, que o produto de ambos pode ser escrito conforme a expressão abaixo:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)] \qquad (29)$$

Portanto, o novo número complexo, z_3, resultante do produto de z_1 e z_2, possui módulo igual ao produto dos módulos destes números, e argumento igual à soma dos argumentos dos mesmos. Geometricamente, pode-se representar o efeito dessa operação conforme a figura 4 (a).



(a) (b)

Figura 4. Representação polar do produto de 2 números complexos. (a) representação de 2 números z_1 e z_2 e seu produto; (b) Rotação da representação polar do número complexo com módulo Z_0 , ou seja , $Z= Z0(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi)$ *após* sua multiplicação pelo complexo "$\cos\Theta + i\,\mathrm{sen}\Theta$".

Um caso particular, de interesse, seria o produto em que um dos complexos tem módulo unitário. Neste caso o resultado pode ser interpretado meramente como uma rotação de sua representação polar conforme ilustra a figura 4 (b).

Referências

1. Churchill R.V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações.* McGraw Hill. 1975.
2. Ogata, K. Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno.* Prentice-Hall. 5ª. Ed. 2010.