

# ANALISE COMBINATORIA

Antônio L. Pereira -IME USP (s. 234A) email:alpereir@ime.usp.br

## Introdução

Embora frequentemente lembrada como o estudo de ‘arranjos’, ‘permutações’ e ‘combinações’ a Análise Combinatória de fato trata de muitos outros conceitos e técnicas ligadas ao estudo de estruturas e relações em conjuntos finitos (ou mais geralmente discretos). O nosso objetivo principal aqui será o de estudar algumas técnicas e conceitos que permitam a contagem de certos tipos de subconjuntos de um determinado conjunto finito. Veremos que muitos problemas de contagem podem ser tratados usando apenas alguns princípios básicos e alguma (às vezes muita) engenhosidade. Nossa ênfase será na *compreensão plena do problema tratado e no reconhecimento da técnica adequada em cada caso*. Estes são passos iniciais essenciais e, frequentemente, a parte mais delicada no tratamento de um problema combinatório (e de muitos outros tipos também).

## Dois princípios fundamentais

- **Princípio da Multiplicação:** *Se uma decisão  $d_1$  pode ser tomada de  $x$  maneiras e se, uma vez tomada a decisão  $d_1$ , a decisão  $d_2$  puder ser tomada de  $y$  maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões  $d_1$  e  $d_2$  é  $xy$ .*
- **Princípio da Adição:** *Se  $A$  e  $B$  são conjuntos disjuntos, com  $p$  e  $q$  elementos respectivamente, então  $A \cup B$  tem  $p + q$  elementos.*

## Alguns exemplos

**Exemplo 1** A professora Ana tem 40 estudantes em sua classe de Combinatória e 30 estudantes em sua classe de Geometria. Quantos estudantes ela tem no total?

**Exemplo 2** Em um cardápio estão listados 6 pratos e 3 molhos distintos. Quantos pedidos distintos podem ser feitos?

**Exemplo 3** Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e preto, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?  
(Obs. Note que cada escolha limita as opções subsequentes.)

**Exemplo 4** Quantos números naturais de 3 algarismos distintos (na base 10) existem? (Obs. As decisões envolvidas podem ser tomadas em varias ordens? Qual é a mais conveniente?)

**Exemplo 5** Quantos números naturais pares de 3 algarismos distintos (na base 10) existem? (*Obs. Qual é a dificuldade quando se tenta usar o princípio da multiplicação?*)

**Exemplo 6** Em uma estante existem 5 livros em espanhol, 6 em francês e 3 em inglês. De quantas maneiras posso escolher 2 livros sem escolher dois da mesma língua?

(*Obs. Você pode resolver este problema de mais de uma maneira?*)

**Exemplo 7** Quantas coleções distintas podem ser formadas com 5 maçãs (idênticas) e oito laranjas (idem)?

(*Obs. O que distingue uma coleção de outra?*)

**Exemplo 6** Quantas maneiras existem de formar uma sequência com 3 letras usando as letras a,b,c,d,e,f nos seguintes casos:

1. permitindo repetição de letras?
2. sem repetição de qualquer das letras?
3. sem permitir repetições e exigindo que a letra f apareça?
4. permitindo repetições e exigindo que a letra e apareça?

## Problemas

Vamos considerar agora alguns problemas de grau variado de dificuldade. Ao tentar resolvê-los lembre-se: para todos (ou pelo menos quase todos) nós problemas de aparência simples podem ser difíceis e isto é particularmente verdadeiro no assunto que estamos tratando. Não é possível dar uma "receita" que cubra todos os casos, mas as seguintes sugestões podem ser úteis'.

(a) Estaremos tentando contar o número de 'objetos' de uma certa classe. Tente identificar precisamente quando um objeto pertence à classe e quando dois deles devem ser considerados distintos.

(b) Faça uma representação (figura, esquema, etc.) do problema. Liste alguns dos objetos que pertencem e outros que não pertencem à coleção.

(c) Examine quantas 'decisões' você deve tomar para executar os passos (a) e (b). Tente usar os princípios básicos para contar os objetos. Se surgirem dificuldades, tente entender claramente quais são elas.

Caso ainda não esteja claro como proceder você pode tentar:

(a') Dividir em subcasos que você saiba resolver.

(b') 'Esquecer' algumas das condições exigidas para que um objeto pertença

à coleção. Isto, em geral, dá origem a uma classe maior que a desejada. É necessário, portanto, excluir posteriormente os objetos "indesejados"

(c') Enunciar o problema de uma forma diferente e/ou descobrir problemas *equivalentes*. Muitas vezes estes poderão ser mais simples de resolver.

Depois de resolvido o problema repense na sua solução, veja se voce não está *contando alguns casos mais de uma vez* ou está esquecendo alguns. Veja se não é possível encontrar uma maneira mais simples de resolver o mesmo problema. Tente pensar em outros problemas onde o mesmo método pode ser usado.

1. Quantos são os gabaritos distintos de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas por questão?  
*R. 9 765 625*
2. De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?
3. Quantos números de quatro dígitos são maiores que 2400 e:
  - (a) têm todos os dígitos diferentes. *R. 3864*
  - (b) não têm dígitos iguais a 3,5 ou 6. *R. 1567*
  - (c) satisfazem às duas condições acima simultaneamente. *R. 560*
4. O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B possui 7 elementos. Quantas são as funções  $f : A \rightarrow B$ ? Quantas injetoras?  
*R. 2401, 840*
5. Quantos subconjuntos possui um conjunto de n elementos?  
*R.  $2^N$*
6. Um vagão de metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantas maneiras os passageiros podem sentar, respeitando as preferências?  
*R. 43200*
7. Quantos números inteiros entre 100 e 999 são ímpares e possuem três dígitos distintos?  
*R. 320*
8. O código morse usa "palavras" contendo de 1 a 4 "letras", as letras sendo ponto e traço. Quantas "palavras" existem no código morse?  
*R. 30*
9. (\*) Escrevem-se números de cinco dígitos (inclusive os começados por zero) em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo e como 6 de cabeça para baixo se transforma em 9, um só cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de cinco dígitos?  
*R. 98475*

10. (\*\*) Escrevem-se os inteiros de 1 até 222 222. Quantas vezes o algarismo zero é escrito?

*R.108 462*

### Questões do ultimo concurso para professor III

1. Para uma seleção brasileira de futebol foram convocados 2 jogadores para cada uma das 11 posições. De quantas maneiras a seleção pode ser escalada, respeitando-se a posição de cada jogador?  
a)  $11^2$  b)  $2^1$  c) 22 d)  $22^2$  e)  $2^{22}$
2. Numa urna há 6 bolas numeradas de 1 a 6. Extraíndo-se sucessivamente 6 bolas, qual a probabilidade de que a bola de número 6 saia antes do que a bola de número 1?  
a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{2}{3}$  c)  $\frac{3}{4}$  d)  $\frac{5}{6}$  e)  $\frac{1}{6}$