

# Variáveis Aleatórias Discretas

Bacharelado em Economia - FEA - Noturno

1<sup>o</sup> Semestre 2018

Profs. Gilberto Alvarenga Paula

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas

## Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de **Variável Aleatória Discreta** e as definições de

### Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de **Variável Aleatória Discreta** e as definições de

- função de probabilidade

### Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de **Variável Aleatória Discreta** e as definições de

- função de probabilidade
- função de distribuição acumulada

### Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de **Variável Aleatória Discreta** e as definições de

- função de probabilidade
- função de distribuição acumulada
- valor médio (ou esperança matemática)

### Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos o conceito de **Variável Aleatória Discreta** e as definições de

- função de probabilidade
- função de distribuição acumulada
- valor médio (ou esperança matemática)
- variância matemática

### Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:



### Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:

- distribuição de Bernoulli

### Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:

- distribuição de Bernoulli
- distribuição binomial

### Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:

- distribuição de Bernoulli
- distribuição binomial
- distribuição geométrica

### Objetivos da Aula

Discutiremos também as seguintes distribuições discretas:

- distribuição de Bernoulli
- distribuição binomial
- distribuição geométrica
- distribuição de Poisson

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta**
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas

## Definição

Variável aleatória é qualquer função definida sobre o espaço amostral  $\Omega$  que atribui um valor real a cada elemento do espaço amostral.

## Definição

Uma variável aleatória é definida como sendo discreta quando o número de valores possíveis que a variável assume for **finito** ou **infinito enumerável**.

## Exemplos



## Exemplos

- n<sup>o</sup> de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã

## Exemplos

- $n^{\circ}$  de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- $n^{\circ}$  de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados

## Exemplos

- $n^o$  de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- $n^o$  de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- $n^o$  de acessos a um determinado site, das 0h às 6h

## Exemplos

- $n^o$  de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- $n^o$  de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- $n^o$  de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- $n^o$  de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano

## Exemplos

- $n^o$  de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- $n^o$  de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- $n^o$  de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- $n^o$  de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- $n^o$  de consultas ao médico num determinado ano

## Exemplos

- $n^o$  de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- $n^o$  de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- $n^o$  de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- $n^o$  de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- $n^o$  de consultas ao médico num determinado ano
- $n^o$  de domicílios com crianças menores de 6 anos

## Exemplos

- $n^o$  de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- $n^o$  de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- $n^o$  de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- $n^o$  de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- $n^o$  de consultas ao médico num determinado ano
- $n^o$  de domicílios com crianças menores de 6 anos
- variação no  $n^o$  de acidentes de um ano para o outro ano numa determinada rodovia

### Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma



### Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que  $\omega_1 = \{\text{cara, cara}\}$ ,  $\omega_2 = \{\text{cara, coroa}\}$ ,  $\omega_3 = \{\text{coroa, cara}\}$  e  $\omega_4 = \{\text{coroa, coroa}\}$ .

## Exemplo 1

### Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que  $\omega_1 = \{\text{cara, cara}\}$ ,  $\omega_2 = \{\text{cara, coroa}\}$ ,  $\omega_3 = \{\text{coroa, cara}\}$  e  $\omega_4 = \{\text{coroa, coroa}\}$ .

### Variável Aleatória

Se definimos a variável aleatória  $X$ : **número de caras no lançamento de duas moedas**, então obtemos

## Exemplo 1

### Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que  $\omega_1 = \{\text{cara, cara}\}$ ,  $\omega_2 = \{\text{cara, coroa}\}$ ,  $\omega_3 = \{\text{coroa, cara}\}$  e  $\omega_4 = \{\text{coroa, coroa}\}$ .

### Variável Aleatória

Se definimos a variável aleatória  $X$ : **número de caras no lançamento de duas moedas**, então obtemos

$$X(\omega_1) = 2, X(\omega_2) = 1, X(\omega_3) = 1 \text{ e } X(\omega_4) = 0.$$

## Exemplo 1

### Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que  $\omega_1 = \{\text{cara, cara}\}$ ,  $\omega_2 = \{\text{cara, coroa}\}$ ,  $\omega_3 = \{\text{coroa, cara}\}$  e  $\omega_4 = \{\text{coroa, coroa}\}$ .

### Variável Aleatória

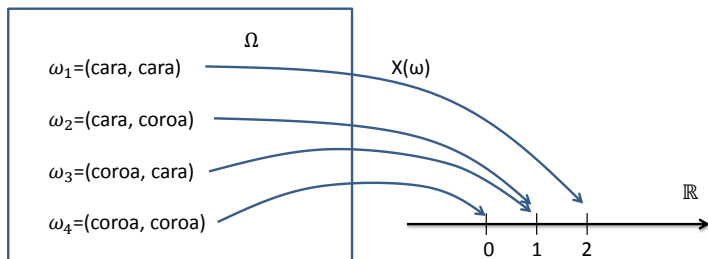
Se definimos a variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas, então obtemos

$$X(\omega_1) = 2, X(\omega_2) = 1, X(\omega_3) = 1 \text{ e } X(\omega_4) = 0.$$

Ou seja, a variável aleatória  $X$  assume os valores  $X = 0, 1, 2$ .

# Exemplo 1

Descrição da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas



- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta**
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas

## Definição

Para cada elemento  $\omega_j$  do espaço amostral transferimos um valor  $p(X(\omega_j))$  para o intervalo  $[0, 1]$ .

## Definição

Para cada elemento  $\omega_j$  do espaço amostral transferimos um valor  $p(X(\omega_j))$  para o intervalo  $[0, 1]$ . Se denotamos  $x_j = X(\omega_j)$ , então podemos definir



## Definição

Para cada elemento  $\omega_j$  do espaço amostral transferimos um valor  $p(X(\omega_j))$  para o intervalo  $[0, 1]$ . Se denotamos  $x_j = X(\omega_j)$ , então podemos definir

$$P(X = x_j) = p(x_j).$$

## Função de probabilidade

A **função de probabilidade de  $X$**  pode ser representada pela tabela abaixo

## Função de probabilidade

A função de probabilidade de  $X$  pode ser representada pela tabela abaixo

$x$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_k$
$P(X = x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_k)$

## Função de probabilidade

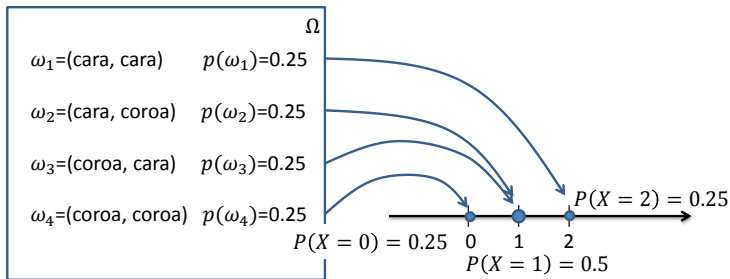
A **função de probabilidade de  $X$**  pode ser representada pela tabela abaixo

$x$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_k$
$P(X = x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_k)$

- $p(x_i) \geq 0$
- $p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_k) = 1$

# Exemplo 1

Descrição do cálculo da probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas



### Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

### Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

### Função de distribuição acumulada

Outra maneira de definirmos a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por



## Função de distribuição acumulada

Outra maneira de definirmos a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

$$F(x) = P(X \leq x),$$

### Função de distribuição acumulada

Outra maneira de definirmos a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

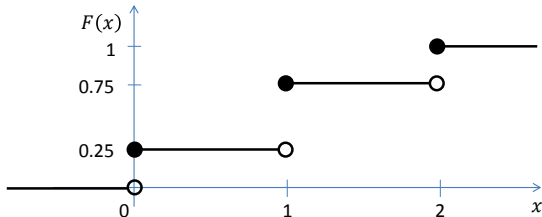
$$F(x) = P(X \leq x),$$

em que  $x$  é um número real e  $F(x)$  pertence ao intervalo  $[0, 1]$ .

# Exemplo 1

Descrição da função de distribuição acumulada  $F(x) = P(X \leq x)$  da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas

$x$	0	1	2
$P(X=x)$	0,25	0,50	0,25



### Função de distribuição acumulada

Portanto, a função de distribuição acumulada da variável aleatória  $X$ :  
número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

### Função de distribuição acumulada

Portanto, a função de distribuição acumulada da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas fica dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0,25 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0,75 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

### Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino).

### Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

### Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Para a variável aleatória *X*: número de crianças do sexo masculino temos a relação



## Exemplo 2

### Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Para a variável aleatória *X*: número de crianças do sexo masculino temos a relação

$\Omega$	<i>MMM</i>	<i>MMF</i>	<i>MFM</i>	<i>FMM</i>	<i>MFF</i>	<i>FMF</i>	<i>FFM</i>	<i>FFF</i>
<i>X</i>	3	2	2	2	1	1	1	0

## Exemplo 2

### Descrição

Num experimento aleatório observa-se o gênero das crianças em famílias com três filhos (*M*: masculino e *F*: feminino). O espaço amostral fica dado por

$$\Omega = \{(MMM), (MMF), (MFM), (FMM), (MFF), (FMF), (FFM), (FFF)\}.$$

Para a variável aleatória *X*: número de crianças do sexo masculino temos a relação

$\Omega$	<i>MMM</i>	<i>MMF</i>	<i>MFM</i>	<i>FMM</i>	<i>MFF</i>	<i>FMF</i>	<i>FFM</i>	<i>FFF</i>
<i>X</i>	3	2	2	2	1	1	1	0

Portanto, *X* assume os valores  $X = 0, 1, 2, 3$ .

Para a variável aleatória  $Y$ : número de crianças do sexo feminino temos a relação

## Exemplo 2

Para a variável aleatória  $Y$ : número de crianças do sexo feminino temos a relação

$\Omega$	<i>MMM</i>	<i>MMF</i>	<i>MFM</i>	<i>FMM</i>	<i>MFF</i>	<i>FMF</i>	<i>FFM</i>	<i>FFF</i>
$X$	0	1	1	1	2	2	2	3

## Exemplo 2

Para a variável aleatória  $Y$ : número de crianças do sexo feminino temos a relação

$\Omega$	<i>MMM</i>	<i>MMF</i>	<i>MFM</i>	<i>FMM</i>	<i>MFF</i>	<i>FMF</i>	<i>FFM</i>	<i>FFF</i>
$X$	0	1	1	1	2	2	2	3

Portanto,  $Y$  assume os valores  $Y = 0, 1, 2, 3$ .

## Exemplo 2

Para a variável aleatória  $Y$ : número de crianças do sexo feminino temos a relação

$\Omega$	<i>MMM</i>	<i>MMF</i>	<i>MFM</i>	<i>FMM</i>	<i>MFF</i>	<i>FMF</i>	<i>FFM</i>	<i>FFF</i>
$X$	0	1	1	1	2	2	2	3

Portanto,  $Y$  assume os valores  $Y = 0, 1, 2, 3$ .

Assim, para um mesmo espaço amostral podemos definir mais de uma variável aleatória.

### Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior.

### Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior. Considere a variável aleatória **X: número da face superior**.



### Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior. Considere a variável aleatória  **$X$ : número da face superior**.

A função de probabilidade de  $X$  fica dada por

## Exemplo 3

### Descrição

Joga-se um dado equilibrado e observa-se a face superior. Considere a variável aleatória **X: número da face superior**.

A função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

### Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores.

### Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória  $X$ : soma das faces superiores.

### Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória  $X$ : soma das faces superiores.

A função de probabilidade de  $X$  fica dada por

## Exemplo 3

### Descrição

Joga-se dois dados equilibrados e observa-se as faces superiores. Considere a variável aleatória  $X$ : **soma das faces superiores**.

A função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática**
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **valor médio**, ou **valor esperado**, ou **esperança matemática** de  $X$  o valor



## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **valor médio**, ou **valor esperado**, ou **esperança matemática** de  $X$  o valor

$$E(X) = x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + \dots + x_kp(x_k)$$

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **valor médio**, ou **valor esperado**, ou **esperança matemática** de  $X$  o valor

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \dots + x_k p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i p(x_i), \end{aligned}$$

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **valor médio**, ou **valor esperado**, ou **esperança matemática** de  $X$  o valor

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \dots + x_k p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i p(x_i), \end{aligned}$$

em que  $p(x_i) = P(X = x_i)$ . Notação  $\mu = E(X)$ .

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

## Exemplo 1

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

## Exemplo 1

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança matemática de  $X$  fica então dada por

## Exemplo 1

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança matemática de  $X$  fica então dada por

$$E(X) = 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25$$

## Exemplo 1

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança matemática de  $X$  fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 \\ &= 1,0. \end{aligned}$$



## Exemplo 1

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas é dada por

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança matemática de  $X$  fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 \\ &= 1,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, 1 cara.

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : soma das faces superiores é dada por

## Exemplo 3

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : soma das faces superiores é dada por

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

## Exemplo 3

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : soma das faces superiores é dada por

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de  $X$  fica então dada por

## Exemplo 3

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : soma das faces superiores é dada por

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de  $X$  fica então dada por

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \dots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36}$$

## Exemplo 3

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : soma das faces superiores é dada por

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de  $X$  fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \dots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7,0. \end{aligned}$$

## Exemplo 3

### Cálculo Esperança Matemática

A função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : soma das faces superiores é dada por

$x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança matemática de  $X$  fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \dots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, soma 7.

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância**
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas



## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **variância** de  $X$  o valor esperado da variável  $(X - \mu)^2$ , ou seja

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **variância** de  $X$  o valor esperado da variável  $(X - \mu)^2$ , ou seja

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 p(x_k)$$

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **variância** de  $X$  o valor esperado da variável  $(X - \mu)^2$ , ou seja

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p(x_i),\end{aligned}$$

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **variância** de  $X$  o valor esperado da variável  $(X - \mu)^2$ , ou seja

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p(x_i),\end{aligned}$$

em que  $p(x_i) = P(X = x_i)$ . Notação  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ .

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **variância** de  $X$  o valor esperado da variável  $(X - \mu)^2$ , ou seja

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p(x_i),\end{aligned}$$

em que  $p(x_i) = P(X = x_i)$ . Notação  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ .

## Desvio Padrão

O desvio padrão de  $X$  é definido por

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chamamos de **variância** de  $X$  o valor esperado da variável  $(X - \mu)^2$ , ou seja

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p(x_i),\end{aligned}$$

em que  $p(x_i) = P(X = x_i)$ . Notação  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ .

## Desvio Padrão

O desvio padrão de  $X$  é definido por

$$\sigma = \text{DP}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

## Fórmula Alternativa

A variância de  $X$  pode, alternativamente, ser expressa na forma

## Fórmula Alternativa

A variância de  $X$  pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2,$$



## Fórmula Alternativa

A variância de  $X$  pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2,$$

em que

$$E(X^2) = x_1^2 p(x_1) + \cdots + x_k^2 p(x_k)$$

## Fórmula Alternativa

A variância de  $X$  pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2,$$

em que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= x_1^2 p(x_1) + \cdots + x_k^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i^2 p(x_i). \end{aligned}$$

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25$$

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de  $X$  fica dada por

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de  $X$  fica dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 1,50 - (1,0)^2 = 1,50 - 1,0 = 0,50.$$

## Exemplo 1

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : número de caras no lançamento de duas moedas obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de  $X$  fica dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 1,50 - (1,0)^2 = 1,50 - 1,0 = 0,50.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \text{DP}(X) = \sqrt{0,50} \cong 0,707.$$



### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : soma das faces superiores obtemos

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : soma das faces superiores obtemos

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36}$$

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de  $X$  fica dada por

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de  $X$  fica dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 54,83 - (7,0)^2 = 54,83 - 49,0 = 5,83.$$

## Exemplo 3

### Cálculo Variância

Para a variável  $X$ : soma das faces superiores obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \dots + 11^2 \times \frac{2}{36} + 12^2 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{1974}{36} = 54,83. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de  $X$  fica dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 54,83 - (7,0)^2 = 54,83 - 49,0 = 5,83.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \text{DP}(X) = \sqrt{5,83} \cong 2,415.$$

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades**
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas

## Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória  $X$  assume um único valor  $a$  (distribuição degenerada em  $a$ ), então  $P(X = a) = p(a) = 1$ .



## Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória  $X$  assume um único valor  $a$  (distribuição degenerada em  $a$ ), então  $P(X = a) = p(a) = 1$ . Temos para este caso as seguintes propriedades:

## Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória  $X$  assume um único valor  $a$  (distribuição degenerada em  $a$ ), então  $P(X = a) = p(a) = 1$ . Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $E(X) = a \times p(a) = a$

## Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória  $X$  assume um único valor  $a$  (distribuição degenerada em  $a$ ), então  $P(X = a) = p(a) = 1$ . Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $E(X) = a \times p(a) = a$
- $\text{Var}(X) = E(X^2) - a^2$

## Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória  $X$  assume um único valor  $a$  (distribuição degenerada em  $a$ ), então  $P(X = a) = p(a) = 1$ . Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $E(X) = a \times p(a) = a$
- $Var(X) = E(X^2) - a^2$   
 $= a^2 \times p(a) - a^2$

## Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória  $X$  assume um único valor  $a$  (distribuição degenerada em  $a$ ), então  $P(X = a) = p(a) = 1$ . Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $E(X) = a \times p(a) = a$
- $Var(X) = E(X^2) - a^2$   
 $= a^2 \times p(a) - a^2$   
 $= a^2 - a^2$

## Propriedades 1

Se uma determinada variável aleatória  $X$  assume um único valor  $a$  (distribuição degenerada em  $a$ ), então  $P(X = a) = p(a) = 1$ . Temos para este caso as seguintes propriedades:

- $E(X) = a \times p(a) = a$
- $Var(X) = E(X^2) - a^2$   
 $= a^2 \times p(a) - a^2$   
 $= a^2 - a^2$   
 $= 0$

## Propriedades 2

Se  $Y$  e  $X$  são duas variáveis aleatórias tais que  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, então

## Propriedades 2

Se  $Y$  e  $X$  são duas variáveis aleatórias tais que  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$



## Propriedades 2

Se  $Y$  e  $X$  são duas variáveis aleatórias tais que  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$   
 $= E(aX) + E(b)$

## Propriedades 2

Se  $Y$  e  $X$  são duas variáveis aleatórias tais que  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$   
=  $E(aX) + E(b)$   
=  $aE(X) + b$

## Propriedades 2

Se  $Y$  e  $X$  são duas variáveis aleatórias tais que  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$   
 $= E(aX) + E(b)$   
 $= aE(X) + b$
- $Var(Y) = Var(aX + b)$

## Propriedades 2

Se  $Y$  e  $X$  são duas variáveis aleatórias tais que  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$   
=  $E(aX) + E(b)$   
=  $aE(X) + b$
- $Var(Y) = Var(aX + b)$   
=  $Var(aX) + Var(b)$

## Propriedades 2

Se  $Y$  e  $X$  são duas variáveis aleatórias tais que  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$   
 $= E(aX) + E(b)$   
 $= aE(X) + b$
- $Var(Y) = Var(aX + b)$   
 $= Var(aX) + Var(b)$   
 $= Var(aX) + 0$

## Propriedades 2

Se  $Y$  e  $X$  são duas variáveis aleatórias tais que  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$   
 $= E(aX) + E(b)$   
 $= aE(X) + b$
- $Var(Y) = Var(aX + b)$   
 $= Var(aX) + Var(b)$   
 $= Var(aX) + 0$   
 $= a^2 Var(X)$

## Propriedades 2

Se  $Y$  e  $X$  são duas variáveis aleatórias tais que  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes quaisquer, então

- $E(Y) = E(aX + b)$   
 $= E(aX) + E(b)$   
 $= aE(X) + b$
- $Var(Y) = Var(aX + b)$   
 $= Var(aX) + Var(b)$   
 $= Var(aX) + 0$   
 $= a^2 Var(X)$
- $DP(Y) = |a|DP(X)$

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória com média  $\mu_X$  e desvio padrão  $\sigma_X$ .



## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória com média  $\mu_X$  e desvio padrão  $\sigma_X$ . O coeficiente de variação de  $X$  é definido por

## Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória com média  $\mu_X$  e desvio padrão  $\sigma_X$ . O coeficiente de variação de  $X$  é definido por

$$CV(X) = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \times 100\%,$$

para  $\mu_X \neq 0$ .

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli**
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas

## Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (**sucesso ou fracasso**) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com **distribuição de Bernoulli**.

## Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (**sucesso ou fracasso**) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com **distribuição de Bernoulli**.

## Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa

## Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (**sucesso ou fracasso**) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com **distribuição de Bernoulli**.

## Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião

## Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (**sucesso ou fracasso**) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com **distribuição de Bernoulli**.

## Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado

## Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (**sucesso ou fracasso**) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com **distribuição de Bernoulli**.

## Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência



## Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (**sucesso ou fracasso**) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com **distribuição de Bernoulli**.

## Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não

## Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (**sucesso ou fracasso**) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com **distribuição de Bernoulli**.

## Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não

## Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (**sucesso ou fracasso**) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com **distribuição de Bernoulli**.

## Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não
- pressão arterial de um paciente, normal ou alterada

## Definição

Experimentos que admitem apenas dois resultados possíveis (**sucesso ou fracasso**) recebem o nome de ensaios de Bernoulli e originam uma variável aleatória com **distribuição de Bernoulli**.

## Exemplos

- resultado da inspeção de uma peça, defeituosa ou não defeituosa
- opinião de um eleitor, favorável ou outra opinião
- resultado de um exame vestibular, aprovado ou não aprovado
- intenção de voto de um eleitor, partido A ou outra preferência
- assinatura de TV digital, sim ou não
- conclusão de uma corrida para pedestres, sim ou não
- pressão arterial de um paciente, normal ou alterada
- hábito de práticas esportivas, sim ou não

## Função de probabilidade

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso  $p$ , em que  $X = 1$  se o resultado é **sucesso** e  $X = 0$  se o resultado é **fracasso**.

## Função de probabilidade

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso  $p$ , em que  $X = 1$  se o resultado é **sucesso** e  $X = 0$  se o resultado é **fracasso**. Então, a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

## Função de probabilidade

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso  $p$ , em que  $X = 1$  se o resultado é **sucesso** e  $X = 0$  se o resultado é **fracasso**. Então, a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$x$	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	$p$

## Função de probabilidade

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso  $p$ , em que  $X = 1$  se o resultado é **sucesso** e  $X = 0$  se o resultado é **fracasso**. Então, a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$x$	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	$p$

E pode ser resumida na forma

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{(1-x)},$$

em que  $x = 0, 1$ .



## Função de probabilidade

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso  $p$ , em que  $X = 1$  se o resultado é **sucesso** e  $X = 0$  se o resultado é **fracasso**. Então, a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$x$	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	$p$

E pode ser resumida na forma

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{(1-x)},$$

em que  $x = 0, 1$ . Denotamos  $X \sim \text{Be}(p)$ .

## Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

## Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1)$$

## Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

## Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

## Variância

A variância de  $X$  é definida por  $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ . Temos que

## Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

## Variância

A variância de  $X$  é definida por  $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ . Temos que

$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1)$$

## Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

## Variância

A variância de  $X$  é definida por  $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ . Temos que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

## Esperança

A esperança (ou valor médio) da distribuição de Bernoulli é dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

## Variância

A variância de  $X$  é definida por  $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ . Temos que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) \\ &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p. \end{aligned}$$

Assim,  $\text{Var}(X) = p - p^2 = p(1 - p)$  e portanto  $DP(X) = \sqrt{p(1 - p)}$ .



- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial**
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas

## Motivação

Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter **a face 5 duas vezes?**

## Motivação

Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter **a face 5 duas vezes**?

Denotando **S** como sendo sucesso (**obter face 5 num lançamento**) e **F** como sendo fracasso, o espaço amostral pode ser representado por

$$\Omega = \{(SSS), (SSF), (SFS), (FSS), (SFF), (FSF), (FFS), (FFF)\}.$$

## Motivação

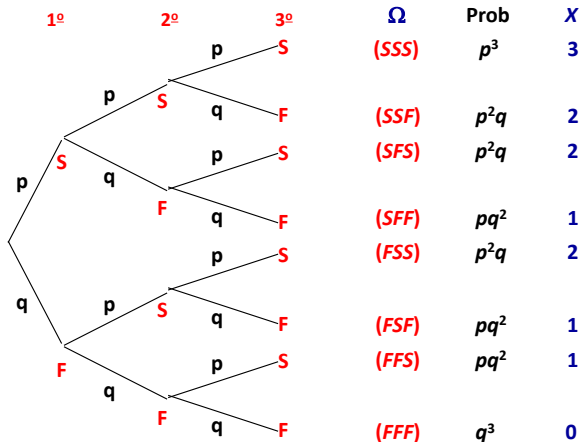
Um dado é lançado 3 vezes de forma independente. Qual a probabilidade de obter **a face 5 duas vezes**?

Denotando **S** como sendo sucesso (**obter face 5 num lançamento**) e **F** como sendo fracasso, o espaço amostral pode ser representado por

$$\Omega = \{(SSS), (SSF), (SFS), (FSS), (SFF), (FSF), (FFS), (FFF)\}.$$

Vamos considerar a variável aleatória **X**: **número de sucessos nos três lançamentos**, sendo  $p = P(S)$  e  $q = 1 - p = P(F)$  em cada lançamento.

## Diagrama de Árvore



## Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

## Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$q^3$	$3pq^2$	$3p^2q$	$p^3$

## Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : número de sucessos nos três lançamentos fica dada por

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$q^3$	$3pq^2$	$3p^2q$	$p^3$

Assim, a função de probabilidade de  $X$  pode ser expressa na forma



## Distribuição de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória  $X$ : **número de sucessos nos três lançamentos** fica dada por

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$q^3$	$3pq^2$	$3p^2q$	$p^3$

Assim, a função de probabilidade de  $X$  pode ser expressa na forma

$$P(X = x) = \binom{3}{x} p^x (1 - p)^{(3-x)},$$

para  $x = 0, 1, 2, 3$ .

## Distribuição de probabilidade

Em particular, para um dado equilibrado  $p = \frac{1}{6}$  obtemos

## Distribuição de probabilidade

Em particular, para um dado equilibrado  $p = \frac{1}{6}$  obtemos

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,5787	0,3472	0,0694	0,0046

## Distribuição de probabilidade

Em particular, para um dado equilibrado  $p = \frac{1}{6}$  obtemos

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,5787	0,3472	0,0694	0,0046

Assim, a probabilidade da face 5 aparecer duas vezes (para um dado equilibrado) fica dada por  $P(X = 2) = 0,0694$ .

## Definição

A variável aleatória  $X$  correspondente ao número de sucessos em  $n$  ensaios de Bernoulli independentes (no sentido probabilístico) e com mesma probabilidade  $p$  de sucesso em cada ensaio, tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .

## Definição

A variável aleatória  $X$  correspondente ao número de sucessos em  $n$  ensaios de Bernoulli independentes (no sentido probabilístico) e com mesma probabilidade  $p$  de sucesso em cada ensaio, tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .

A função de probabilidade de  $X$  é expressa na forma

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)},$$

em que  $x = 0, 1, \dots, n$ .

## Definição

A variável aleatória  $X$  correspondente ao número de sucessos em  $n$  ensaios de Bernoulli independentes (no sentido probabilístico) e com mesma probabilidade  $p$  de sucesso em cada ensaio, tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ .

A função de probabilidade de  $X$  é expressa na forma

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)},$$

em que  $x = 0, 1, \dots, n$ . Denotamos  $X \sim B(n, p)$ .

## Esperança

Se  $X \sim B(n, p)$  podemos escrever  $X = X_1 + \dots + X_n$ , em que  $X_i \sim Be(p)$  para  $i = 1, \dots, n$ .



## Esperança

Se  $X \sim B(n, p)$  podemos escrever  $X = X_1 + \dots + X_n$ , em que  $X_i \sim Be(p)$  para  $i = 1, \dots, n$ . Assim, obtemos

$$\mu = E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np.$$

## Esperança

Se  $X \sim B(n, p)$  podemos escrever  $X = X_1 + \dots + X_n$ , em que  $X_i \sim Be(p)$  para  $i = 1, \dots, n$ . Assim, obtemos

$$\mu = E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np.$$

## Variância

Similarmente como temos  $n$  ensaios independentes, então

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = np(1 - p).$$

## Esperança

Se  $X \sim B(n, p)$  podemos escrever  $X = X_1 + \dots + X_n$ , em que  $X_i \sim Be(p)$  para  $i = 1, \dots, n$ . Assim, obtemos

$$\mu = E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np.$$

## Variância

Similarmente como temos  $n$  ensaios independentes, então

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = np(1 - p).$$

E daí segue que  $\sigma = DP(X) = \sqrt{np(1 - p)}$ .

## Aplicação

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele acerte pelo menos 6 questões?

## Aplicação

Considere uma prova com 12 questões, cada uma com 4 alternativas. Suponha que o aluno escolha a resposta ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele acerte pelo menos 6 questões?

Vamos considerar a variável aleatória  $X$ : número de questões que o aluno acerta. Vamos supor que  $X \sim B(n, p)$ , em que  $n = 12$  e  $p = 0,25$ .

## Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

## Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que  $x = 0, 1, \dots, 12$ .

## Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que  $x = 0, 1, \dots, 12$ . Portanto, usando uma tabela binomial obtemos  $P(X \geq 6) = P(X = 6) + \dots + P(X = 12) \cong 0,0544$ .



## Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que  $x = 0, 1, \dots, 12$ . Portanto, usando uma tabela binomial obtemos  $P(X \geq 6) = P(X = 6) + \dots + P(X = 12) \cong 0,0544$ .

Adicionalmente, temos que o valor esperado de  $X$  fica dado por  $\mu = n \times p = 12 \times 0,25 = 3$ .

## Aplicação

Portanto, a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = x) = \binom{12}{x} 0,25^x 0,75^{(12-x)},$$

em que  $x = 0, 1, \dots, 12$ . Portanto, usando uma tabela binomial obtemos  $P(X \geq 6) = P(X = 6) + \dots + P(X = 12) \cong 0,0544$ .

Adicionalmente, temos que o valor esperado de  $X$  fica dado por  $\mu = n \times p = 12 \times 0,25 = 3$ . Ou seja, espera-se que o aluno acerte 3 questões.

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica**
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas

## Definição

Supor que  $X$  representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade  $p$ .

## Definição

Supor que  $X$  representa o **número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso** que ocorre com probabilidade  $p$ .

A função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$x$	1	2	3	4	...
$P(X = x)$	$p$	$p(1 - p)$	$p(1 - p)^2$	$p(1 - p)^3$	...

## Definição

Supor que  $X$  representa o **número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso** que ocorre com probabilidade  $p$ .

A função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$x$	1	2	3	4	...
$P(X = x)$	$p$	$p(1 - p)$	$p(1 - p)^2$	$p(1 - p)^3$	...

E pode ser expressa na forma

## Definição

Supor que  $X$  representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade  $p$ .

A função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$x$	1	2	3	4	...
$P(X = x)$	$p$	$p(1 - p)$	$p(1 - p)^2$	$p(1 - p)^3$	...

E pode ser expressa na forma

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que  $x = 1, 2, \dots$

## Definição

Supor que  $X$  representa o número de ensaios independentes até a ocorrência do primeiro sucesso que ocorre com probabilidade  $p$ .

A função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$x$	1	2	3	4	...
$P(X = x)$	$p$	$p(1 - p)$	$p(1 - p)^2$	$p(1 - p)^3$	...

E pode ser expressa na forma

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)},$$

em que  $x = 1, 2, \dots$ . Denotamos  $X \sim \text{Ge}(p)$ .



## Distribuição Geométrica

## Distribuição Geométrica

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

## Distribuição Geométrica

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

- Variância

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}, \text{ logo DP}(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

## Aplicação

Num jogo a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de  $0,10$ . Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio antes de  $5$  tentativas?

## Aplicação

Num jogo a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de **0,10**. Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio antes de **5** tentativas? Seja  **$X$ : número de tentativas até a ocorrência do primeiro sucesso (ganhar algum prêmio)**.

## Aplicação

Num jogo a probabilidade de um jogador ganhar algum prêmio em cada tentativa é de **0,10**. Supondo tentativas independentes, qual a probabilidade do jogador ganhar algum prêmio antes de **5** tentativas? Seja  **$X$ : número de tentativas até a ocorrência do primeiro sucesso (ganhar algum prêmio)**. Vamos supor que  $X \sim Ge(0, 10)$ .

## Aplicação

Portanto, queremos saber  $P(X \leq 4) = \sum_{x=1}^4 P(X = x)$ , em que

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)} = 0,10 \times 0,90^{(x-1)}.$$

para  $x = 1, 2, 3, 4$ .

## Aplicação

Portanto, queremos saber  $P(X \leq 4) = \sum_{x=1}^4 P(X = x)$ , em que

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)} = 0,10 \times 0,90^{(x-1)}.$$

para  $x = 1, 2, 3, 4$ .

Daí obtemos

$$P(X \leq 4) = 0,10 \times \{0,90^0 + 0,90^1 + 0,90^2 + 0,90^3\}$$



## Aplicação

Portanto, queremos saber  $P(X \leq 4) = \sum_{x=1}^4 P(X = x)$ , em que

$$P(X = x) = p(1 - p)^{(x-1)} = 0,10 \times 0,90^{(x-1)}.$$

para  $x = 1, 2, 3, 4$ .

Daí obtemos

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= 0,10 \times \{0,90^0 + 0,90^1 + 0,90^2 + 0,90^3\} \\ &= 0,10 \times \{1 + 0,9 + 0,81 + 0,729\} \\ &= 0,10 \times 3,439 \\ &\approx 0,344(34,4\%). \end{aligned}$$

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson**
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas

## Definição

Se  $X$  representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se  $X$  segue distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , então a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

## Definição

Se  $X$  representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se  $X$  segue distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , então a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!},$$

em que  $x = 0, 1, \dots$

## Definição

Se  $X$  representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se  $X$  segue distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , então a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!},$$

em que  $x = 0, 1, \dots$ . Denotamos  $X \sim P(\lambda)$ .

## Definição

Se  $X$  representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se  $X$  segue distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , então a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!},$$

em que  $x = 0, 1, \dots$ . Denotamos  $X \sim P(\lambda)$ .

## Definição

Se  $X$  representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se  $X$  segue distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , então a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!},$$

em que  $x = 0, 1, \dots$ . Denotamos  $X \sim P(\lambda)$ .

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = \lambda$$

## Definição

Se  $X$  representa o número de ocorrências de um evento no tempo ou no espaço e se  $X$  segue distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , então a função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!},$$

em que  $x = 0, 1, \dots$ . Denotamos  $X \sim P(\lambda)$ .

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = \lambda$$

- Variância

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \lambda, \text{ logo } \text{DP}(X) = \sqrt{\lambda}$$



## Exemplos

## Exemplos

- n<sup>o</sup> de acidentes numa rodovia num determinado período

## Exemplos

- n<sup>o</sup> de acidentes numa rodovia num determinado período
- n<sup>o</sup> de chamadas telefônicas por minuto

## Exemplos

- n<sup>o</sup> de acidentes numa rodovia num determinado período
- n<sup>o</sup> de chamadas telefônicas por minuto
- n<sup>o</sup> de mensagens que chegam a um servidor por minuto

## Exemplos

- n<sup>o</sup> de acidentes numa rodovia num determinado período
- n<sup>o</sup> de chamadas telefônicas por minuto
- n<sup>o</sup> de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- n<sup>o</sup> de pedidos de empréstimo num banco num mês

## Exemplos

- $n^o$  de acidentes numa rodovia num determinado período
- $n^o$  de chamadas telefônicas por minuto
- $n^o$  de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- $n^o$  de pedidos de empréstimo num banco num mês
- $n^o$  de defeitos num tecido por metro quadrado

## Exemplos

- n<sup>o</sup> de acidentes numa rodovia num determinado período
- n<sup>o</sup> de chamadas telefônicas por minuto
- n<sup>o</sup> de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- n<sup>o</sup> de pedidos de empréstimo num banco num mês
- n<sup>o</sup> de defeitos num tecido por metro quadrado
- n<sup>o</sup> de bactérias numa lâmina de microscópio

## Exemplos

- n<sup>o</sup> de acidentes numa rodovia num determinado período
- n<sup>o</sup> de chamadas telefônicas por minuto
- n<sup>o</sup> de mensagens que chegam a um servidor por minuto
- n<sup>o</sup> de pedidos de empréstimo num banco num mês
- n<sup>o</sup> de defeitos num tecido por metro quadrado
- n<sup>o</sup> de bactérias numa lâmina de microscópio
- n<sup>o</sup> de automóveis vendidos numa concessionária num dia



## Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem **1,5** acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer?

## Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer? Seja  $X$ : número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que  $X \sim P(1,5)$ .

## Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem 1,5 acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer? Seja  $X$ : número de acidentes num dia na rodovia. Vamos supor que  $X \sim P(1,5)$ .

Temos que  $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ ,

## Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem **1,5** acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer? Seja  **$X$ : número de acidentes num dia na rodovia**. Vamos supor que  **$X \sim P(1,5)$** .

Temos que  $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ ,  
em que  $P(X = 0) = e^{-1,5} = 0,223$  e  $P(X = 1) = e^{-1,5} \times 1,5 = 0,335$ .

## Aplicação 1

Sabe-se que em média ocorrem **1,5** acidentes por dia numa rodovia. Qual a probabilidade de ocorrerem dois ou mais acidentes num dia qualquer? Seja  **$X$ : número de acidentes num dia na rodovia**. Vamos supor que  **$X \sim P(1,5)$** .

Temos que  $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ ,  
em que  $P(X = 0) = e^{-1,5} = 0,223$  e  $P(X = 1) = e^{-1,5} \times 1,5 = 0,335$ .  
Daí obtemos

$$P(X \geq 2) = 1 - 0,223 - 0,335 = 0,442.$$

## Aplicação 2

Devido aos fortes nevoeiros no inverno o aeroporto de Congonhas-SP fecha para pousos e decolagens de acordo com uma distribuição de Poisson com média de 2 vezes ao ano.

## Aplicação 2

Devido aos fortes nevoeiros no inverno o aeroporto de Congonhas-SP fecha para pousos e decolagens de acordo com uma distribuição de Poisson com média de 2 vezes ao ano.

Determine a probabilidade de que o aeroporto paralize suas atividades pela segunda vez, sabendo que já paralizou uma vez no corrente ano.

## Aplicação 2

Seja  $N$ : número de paralizações durante um ano. Vamos supor que  $N \sim P(2)$ .



## Aplicação 2

Seja  $N$ : número de paralizações durante um ano. Vamos supor que  $N \sim P(2)$ .

Queremos calcular

$$P(N = 2 | N \geq 1)$$

## Aplicação 2

Seja  $N$ : número de paralizações durante um ano. Vamos supor que  $N \sim P(2)$ .

Queremos calcular

$$P(N = 2 | N \geq 1) = \frac{P(N = 2, N \geq 1)}{P(N \geq 1)}$$

## Aplicação 2

Seja  $N$ : número de paralizações durante um ano. Vamos supor que  $N \sim P(2)$ .

Queremos calcular

$$\begin{aligned} P(N = 2 | N \geq 1) &= \frac{P(N = 2, N \geq 1)}{P(N \geq 1)} \\ &= \frac{P(N = 2)}{P(N \geq 1)} \end{aligned}$$

## Aplicação 2

Seja  $N$ : número de paralizações durante um ano. Vamos supor que  $N \sim P(2)$ .

Queremos calcular

$$\begin{aligned} P(N = 2 | N \geq 1) &= \frac{P(N = 2, N \geq 1)}{P(N \geq 1)} \\ &= \frac{P(N = 2)}{P(N \geq 1)} \\ &= \frac{\frac{e^{-2} 2^2}{2!}}{1 - e^{-2}} \\ &= \frac{2e^{-2}}{1 - e^{-2}} \\ &\approx 0,313(31,3\%). \end{aligned}$$

## Processo de Poisson

Dizemos que  $N(t)$ ,  $t \geq 0$ , é um **processo de Poisson de intensidade  $\lambda$**  se  $N(t) \sim P(\lambda t)$ . Ou seja,

## Processo de Poisson

Dizemos que  $N(t)$ ,  $t \geq 0$ , é um **processo de Poisson de intensidade  $\lambda$**  se  $N(t) \sim P(\lambda t)$ . Ou seja,

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},$$

para  $k = 0, 1, \dots$

## Aplicação 3

O número de sinistros de uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de **0,3** sinistros a cada ano.

## Aplicação 3

O número de sinistros de uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de **0,3** sinistros a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.



## Aplicação 3

O número de sinistros de uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de **0,3** sinistros a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.

Seja  **$N(5)$** : número de sinistros em 5 anos.

## Aplicação 3

O número de sinistros de uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de **0,3** sinistros a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.

Seja  $N(5)$ : **número de sinistros em 5 anos**. Sabemos que que  $N(5) \sim P(1, 5)$ .

## Aplicação 3

O número de sinistros de uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de **0,3** sinistros a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.

Seja  **$N(5)$ : número de sinistros em 5 anos**. Sabemos que que  **$N(5) \sim P(1,5)$** .

Queremos calcular

$$P(N(5) = 3)$$

## Aplicação 3

O número de sinistros de uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de **0,3** sinistros a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.

Seja  $N(5)$ : **número de sinistros em 5 anos**. Sabemos que que  $N(5) \sim P(1,5)$ .

Queremos calcular

$$P(N(5) = 3) = \frac{e^{-1,5}(1,5)^3}{3!}$$

## Aplicação 3

O número de sinistros de uma apólice ocorre de acordo com um processo de Poisson com uma intensidade de **0,3** sinistros a cada ano. Determine a probabilidade que nos próximos 5 anos ocorram 3 sinistros.

Seja  $N(5)$ : **número de sinistros em 5 anos**. Sabemos que que  $N(5) \sim P(1,5)$ .

Queremos calcular

$$\begin{aligned} P(N(5) = 3) &= \frac{e^{-1,5}(1,5)^3}{3!} \\ &\approx \mathbf{0,126(12,6\%)}. \end{aligned}$$

## Aproximação da Binomial para a Poisson

Se  $X \sim B(n, p)$  então para  $n$  grande e  $p$  pequeno temos que

## Aproximação da Binomial para a Poisson

Se  $X \sim B(n, p)$  então para  $n$  grande e  $p$  pequeno temos que

$$P(X = x) \cong \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!},$$

em que  $\lambda = np$ ,  $x = 0, 1, \dots, n$  e  $np < 10$ .

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica**
- 12 Outras Distribuições Discretas



## Definição

Supor que  $X$  representa o **número de sucessos em  $n$  retiradas sem reposição** de uma população com  $N$  elementos, em que  $K$  desses elementos correspondem ao grupo de interesse (sucessos).

## Definição

Supor que  $X$  representa o **número de sucessos em  $n$  retiradas sem reposição** de uma população com  $N$  elementos, em que  $K$  desses elementos correspondem ao grupo de interesse (sucessos).

A função de probabilidade de  $X$  fica dada por

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

em que  $\max(0, n + K - N) \leq k \leq \min(K, n)$ .

## Distribuição Hipergeométrica

## Distribuição Hipergeométrica

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = n \frac{K}{N}$$

## Distribuição Hipergeométrica

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = n \frac{K}{N}$$

- Variância

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = n \frac{K}{N} \frac{(N-K)}{N} \frac{(N-n)}{N-1}$$

## Aplicação

Qual a probabilidade de um apostador acertar a quadra jogando 8 números na megasena? Qual o número esperado de acertos para esse apostador?

## Aplicação

Qual a probabilidade de um apostador acertar a quadra jogando 8 números na megasena? Qual o número esperado de acertos para esse apostador?

Dados do problema:  $N=60$ ,  $K=6$ ,  $n=8$ . Temos então

## Aplicação

Qual a probabilidade de um apostador acertar a quadra jogando 8 números na megasena? Qual o número esperado de acertos para esse apostador?

Dados do problema:  $N=60$ ,  $K=6$ ,  $n=8$ . Temos então

$$P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4} \binom{54}{4}}{\binom{60}{8}}$$



## Aplicação

Qual a probabilidade de um apostador acertar a quadra jogando 8 números na megasena? Qual o número esperado de acertos para esse apostador?

Dados do problema:  $N=60$ ,  $K=6$ ,  $n=8$ . Temos então

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \frac{\binom{6}{4} \binom{54}{4}}{\binom{60}{8}} \\ &= \frac{1}{539} \end{aligned}$$

## Aplicação

Qual a probabilidade de um apostador acertar a quadra jogando 8 números na megasena? Qual o número esperado de acertos para esse apostador?

Dados do problema:  $N=60$ ,  $K=6$ ,  $n=8$ . Temos então

$$\begin{aligned}P(X = 4) &= \frac{\binom{6}{4} \binom{54}{4}}{\binom{60}{8}} \\ &= \frac{1}{539} \\ E(X) &= 8 \frac{6}{60}\end{aligned}$$

## Aplicação

Qual a probabilidade de um apostador acertar a quadra jogando 8 números na megasena? Qual o número esperado de acertos para esse apostador?

Dados do problema:  $N=60$ ,  $K=6$ ,  $n=8$ . Temos então

$$\begin{aligned}P(X = 4) &= \frac{\binom{6}{4} \binom{54}{4}}{\binom{60}{8}} \\ &= \frac{1}{539} \\ E(X) &= 8 \frac{6}{60} \\ &= \frac{48}{60} = 0,8.\end{aligned}$$

- 1 Objetivos da Aula
- 2 Variável Aleatória Discreta
- 3 Distribuição de Variável Aleatória Discreta
- 4 Esperança Matemática
- 5 Variância
- 6 Propriedades
- 7 Distribuição de Bernoulli
- 8 Distribuição Binomial
- 9 Distribuição Geométrica
- 10 Distribuição de Poisson
- 11 Distribuição Hipergeométrica
- 12 Outras Distribuições Discretas**

## Exemplos

## Exemplos

- Distribuição de Pascal

## Exemplos

- Distribuição de Pascal
- Distribuição Binomial Negativa

## Exemplos

- Distribuição de Pascal
- Distribuição Binomial Negativa
- Distribuição de Poisson com Excesso de Zeros



## Exemplos

- Distribuição de Pascal
- Distribuição Binomial Negativa
- Distribuição de Poisson com Excesso de Zeros
- Distribuição Binomial Negativa com Excesso de Zeros