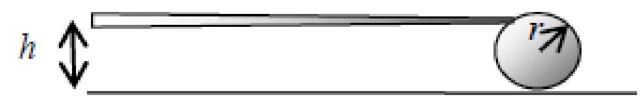
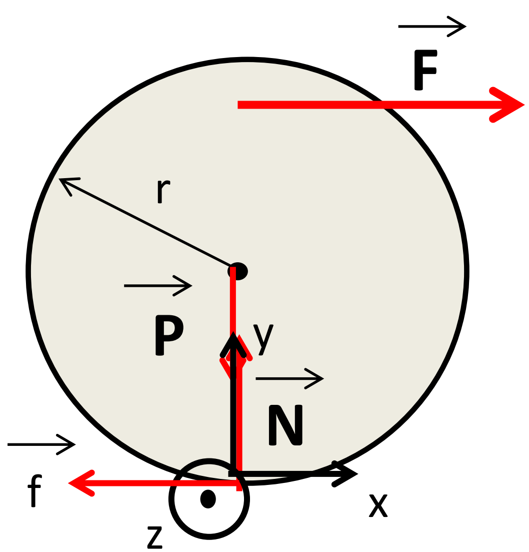
11. (Tipler Cap 9, E 103) Uma bola de bilhar, de raio *r*, está inicialmente em repouso sobre a mesa horizontal, como mostra a figura ao lado. Esta bola é atingida por uma tacada horizontal, que proporciona uma força de módulo F_0 durante um intervalo de tempo muito pequeno Δt. O taco atinge a bola a uma altura *h* acima do ponto de contato com a mesa. a) Mostrar que a velocidade angular inicial da bola ω_0 está relacionada com a velocidade linear inicial do centro de massa v_0 por $\omega_0 = 5v_0(h-r)/2r^2$.





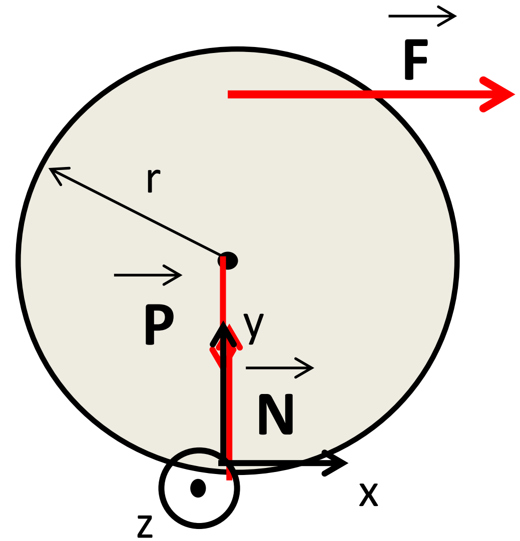
$$\vec{F} = F_0\,\hat{x}$$

$$\vec{P} = P(-\hat{y})$$

$$\vec{N} = N\,\hat{y}$$

Na dinâmica de corpos rígidos, uma força externa pode influenciar na rotação e na translação

Na translação



$$\vec{F_r} = \sum \vec{F_i} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Em y

$$N - P = 0$$

Em x

$$F = F_0 = ma_{cm}$$

$$a_{cm} = \frac{\Delta v_{cm}}{\Delta t} = \frac{v_0 - v_i}{\Delta t} = \frac{v_0}{\Delta t}$$

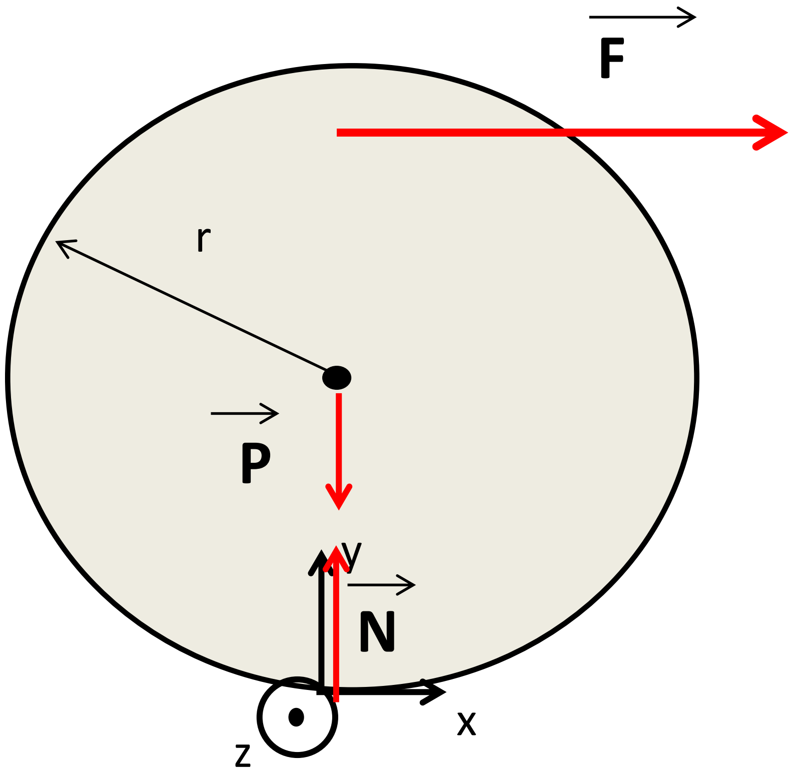
pois $v_i = 0$

$$\boxed{F_0 = m\frac{v_0}{\Delta t}}$$

Na rotação

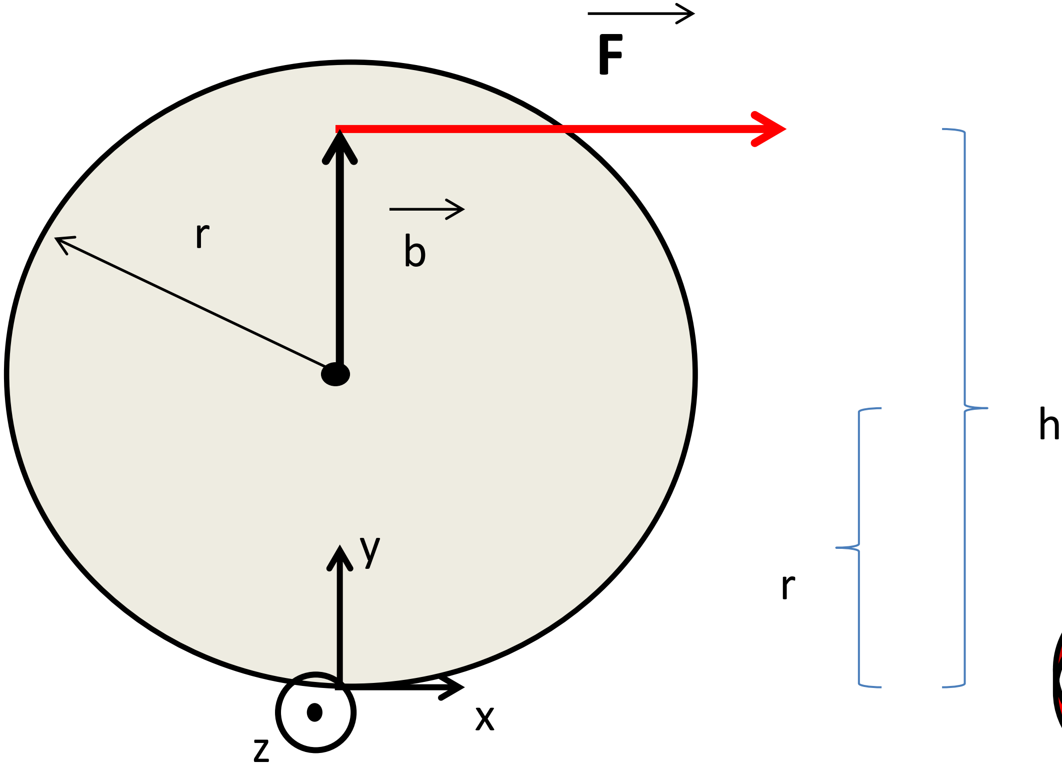
Em relação ao centro da bola

$$\overrightarrow{\tau_r} = \sum \overrightarrow{\tau_i} = \overrightarrow{\tau_F} + \overrightarrow{\tau_P} + \overrightarrow{\tau_N} = I\,\overrightarrow{\alpha}$$



$\tau_P = \tau_N = 0\ N.m$ porque estão apontando em direção ao ponto de referência ;

$$\overrightarrow{\tau_r} = \overrightarrow{\tau_F}$$



$$h = r + b$$

$$b = h - r$$

$$\vec{b} = (h - r)\hat{y}$$

$$\vec{\tau}_r = \vec{\tau}_F = \vec{b} \times \vec{F} = (h - r)\,\hat{y} \times F_0\,\hat{x} = \boxed{(h - r)F_0(-\hat{z})}$$

Em z

$$-(h-r)F_0 = I\alpha$$

Como $$I = \frac{2}{5}mr^2$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_0 - \omega_i}{\Delta t} = \frac{\omega_0}{\Delta t}$$

pois ω_i=0

$$-(h-r)F_0 = \frac{2}{5}mr^2\frac{\omega_0}{\Delta t}$$

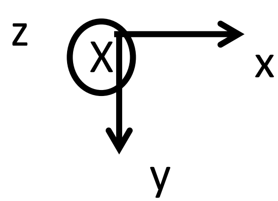
$$\omega_0 = -\frac{5}{2}(h-r)\frac{\Delta t}{mr^2}F_0$$

Combinando rotação e translação

$$\omega_0 = -\frac{5}{2}(h-r)\,\frac{\Delta t}{mr^2}F_0 \qquad\qquad F_0 = m\frac{v_0}{\Delta t}$$

$$\omega_0 = -\frac{5}{2}(h-r)\,\frac{\Delta t}{mr^2}m\frac{v_0}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = -\frac{5v_0(h-r)}{2r^2}}$$

Ou tomando:



$$\boxed{\omega_0 = \frac{5v_0(h-r)}{2r^2}}$$

Observações:

$$\omega_0 = \frac{5v_0(h-r)}{2r^2} \Rightarrow \boxed{v_0 = \omega_0 \frac{2}{5}\frac{r^2}{(h-r)}}$$

Condição de não deslizamento: $\boxed{v_{cm} = \omega r}$

Note que $\boxed{v_0 = \omega_0 \frac{2}{5}\frac{r^2}{(h-r)}} \neq \boxed{v_{cm} = \omega r}$

Além disso:

$$a_{cm} = \frac{v_0}{\Delta t} \qquad v_0 = \omega_0 \frac{2}{5}\frac{r^2}{(h-r)} \qquad \alpha = \frac{\omega_0}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_{cm} = \alpha \frac{2}{5}\frac{r^2}{(h-r)}}$$

Condição de não deslizamento: $\boxed{a_{cm} = \alpha r}$

Novamente $\boxed{a_{cm} = \alpha \frac{2}{5}\frac{r^2}{(h-r)}} \neq \boxed{a_{cm} = \alpha r}$

Portanto, como

$$\boxed{v_0 = \omega_0 \frac{2}{5}\frac{r^2}{(h-r)}} \neq \boxed{v_{cm} = \omega r}$$

e

$$\boxed{a_{cm} = \alpha \frac{2}{5}\frac{r^2}{(h-r)}} \neq \boxed{a_{cm} = \alpha r}$$

Haverá escorregamento