Cálculo de condução

- Vamos estudar e desenvolver as equações da condução em nível básico para regime permanente, unidimensional em parede plana.
- Equação de Fourier.

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx}$$

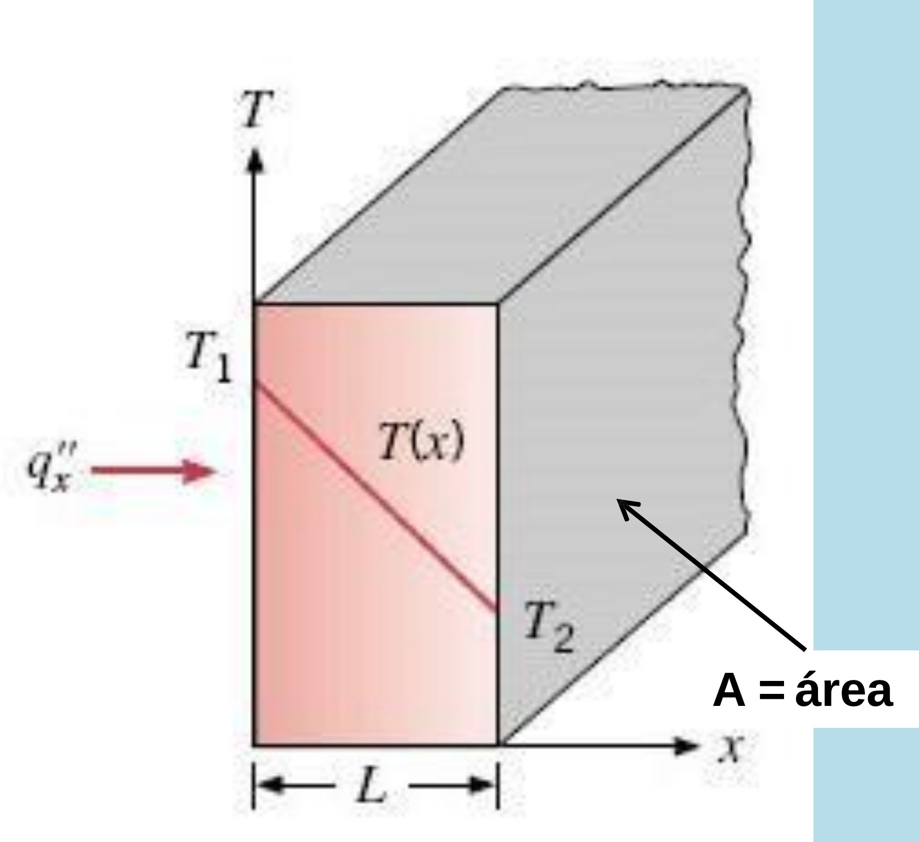
Separando as variáveis, temos:

$$q_x dx = -kA dT \quad \text{integrando} \rightarrow$$

$$q_x \int_0^L dx = -kA \int_{T_1}^{T_2} dT \quad \rightarrow q_x = kA\frac{(T_1 - T_2)}{L}$$

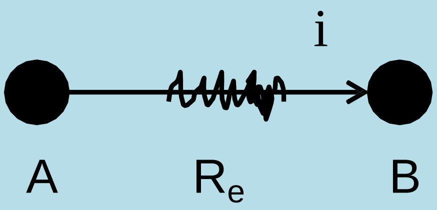
Fazendo $\Delta T = T_1 - T_2$ e $\Delta x = L$, temos:

$$q_x = kA\frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \text{ou ainda} \quad q_x = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{\Delta T}{\frac{L}{kA}}$$



Cálculo de condução

- Resistência Térmica.
- Circuito térmico. A "força motriz" que gera a taxa de transf. de calor é o potencial térmico.
- Analogia com circuito elétrico.



$$i = \frac{U}{R_e} = \frac{V_A - V_B}{R_e}$$

Sendo:

i = intensidade da corrente elétrica.

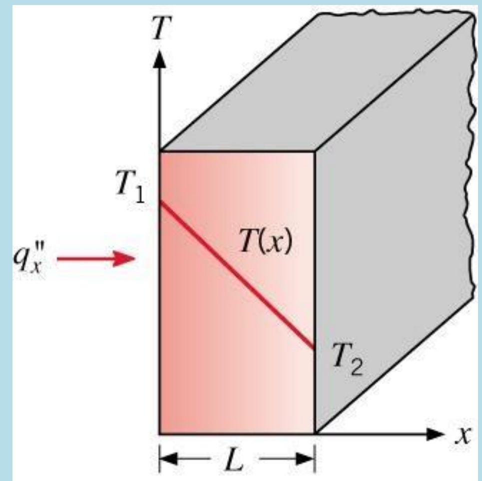
$U = V_A - V_B$ = diferença de potencial elétrico.

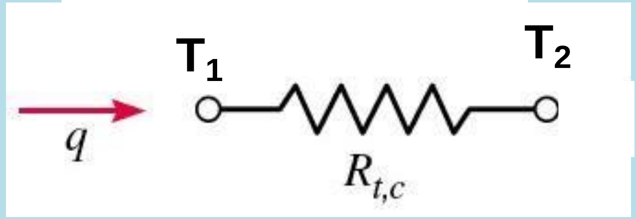
R_e = resistência elétrica.

- Na transferência de calor.

$$q_x = \frac{\Delta T}{\frac{L}{kA}} = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{\Delta T}{R_{t,c}}$$

$$R_{t,c} = \frac{L}{kA} = \frac{\Delta x}{kA}$$





Cálculo de condução

- **Perfil de temperatura da parede plana.**
- Após ter sido calculada a taxa de transferência de calor, pode-se calcular o perfil de temperatura no sólido, em vez de integrar de 0 a L e de T_1 a T_2. Agora se faz:
- Para x = 0 $\rightarrow$ T = T_1 e para um valor definido de x, T=T(x).

$$q_x \int_0^x dx = -kA \int_{T_1}^{T_{(x)}} dT \quad \rightarrow q_x x = -kA\left[T_{(x)} - T_1\right] \rightarrow \left[T_{(x)} - T_1\right] = -\frac{q_x x}{kA}$$

Portanto, temos:

$T_{(x)} = T_1 - \frac{q_x}{kA} x$ ou em termos de fluxo de calor, q''= $\frac{q}{A}$, então:

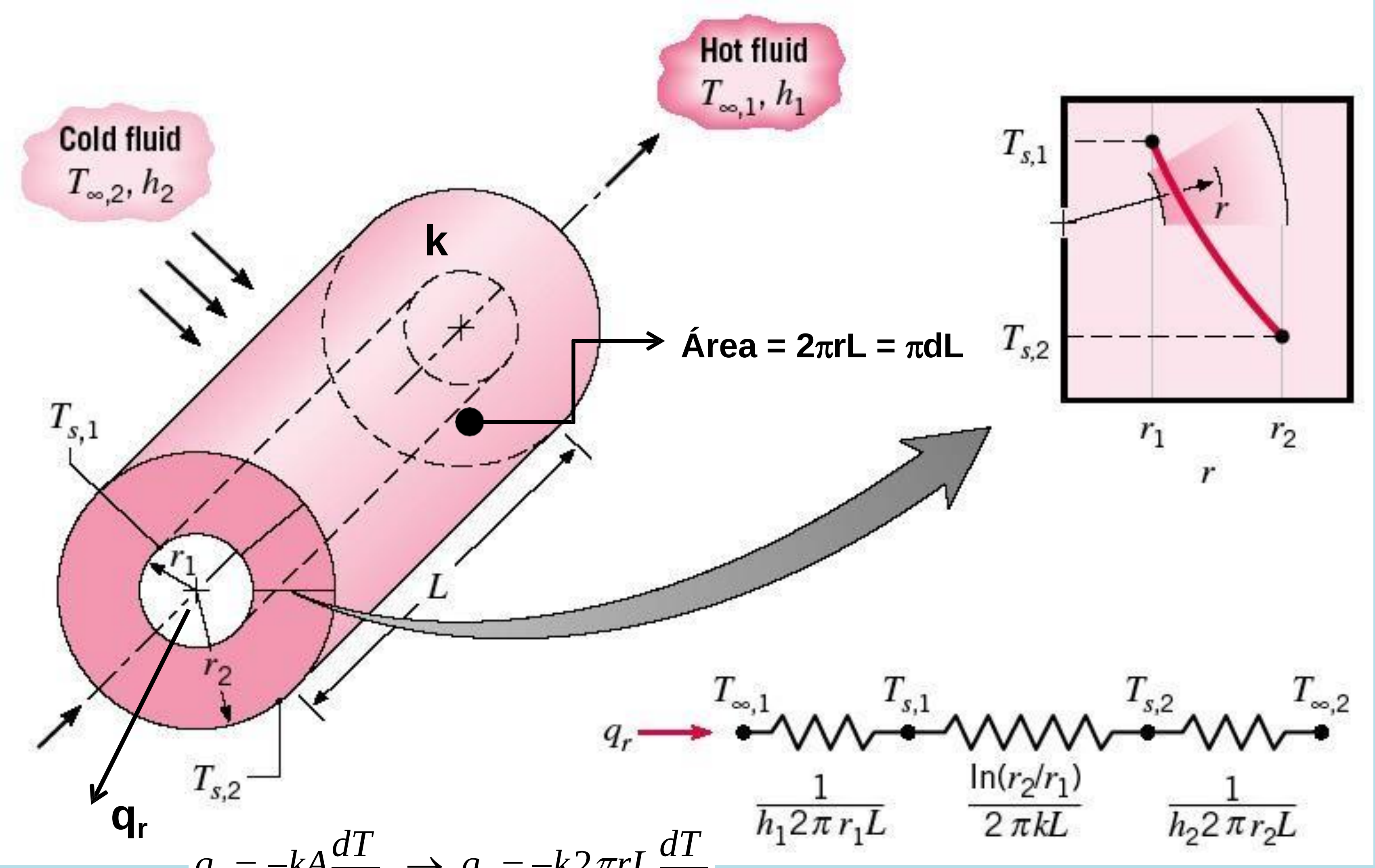
$T_{(x)} = T_1 - \frac{q''_x}{kA} x$ Perfil de Temperatura (equação linear),

do tipo y = a - bx

- Condição de regime permanente.

Cálculo de condução

- **Parede Cilíndrica.**



$$q_r = -kA\frac{dT}{dr} \rightarrow q_r = -k2\pi rL\frac{dT}{dr}$$

Cálculo de condução. Parede cilíndrica

$$q_r = -kA\frac{dT}{dr} \;\rightarrow\; q_r = -k\,2\pi rL\,\frac{dT}{dr}$$ separando as variáveis, temos:

$$q_r\,\frac{dr}{r} = -k\;2\pi\,LdT$$ integrando nas CC.

$CC1$ para $\mathrm{r = r_1} \;\rightarrow\; \mathrm{T = T_1}$

$\mathrm{r = r_2} \;\rightarrow\; \mathrm{T = T_2}$

$$q_r\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -k\,2\pi L\int_{T_1}^{T_2} dT \quad\Rightarrow\quad q_r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = -2\pi kL(T_2 - T_1)$$

$$q_r = \frac{2\pi kL(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$ ou ainda $$q_r = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi kL}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\;\frac{\Delta T}{R_t}$$ então

$$\mathrm{R}_{t,cilindrica} = \frac{1}{2\pi kL}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$ em f(d) $$\rightarrow\; q_d = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\pi kL}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}$$

Cálculo de condução

- **Perfil de temperatura da parede cilíndrica.**
- **Novamente vamos integrar passando os limites:**
- Para r = $r_1 \rightarrow$ T = T_1 e para r qualquer, tal que, $r_1 \leq r \leq r_2 \rightarrow$ T = $T_{(r)}$.

$$q_r \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r} = -k\,2\pi L \int_{T_1}^{T} dT \quad \Rightarrow \quad q_r \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) = -2\pi k L (T_r - T_1)$$

$$(T - T_1) = -\frac{1}{2\pi k L} q_r \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

$$T_r = T_1 - \frac{q_r}{2\pi k L} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \text{ fazendo } q'_r = \frac{q_r}{L}$$

$$T_r = T_1 - \frac{q'_r}{2\pi k} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \text{ perfil de temperatura}$$

Cálculo de condução

- **Parede Esférica.**

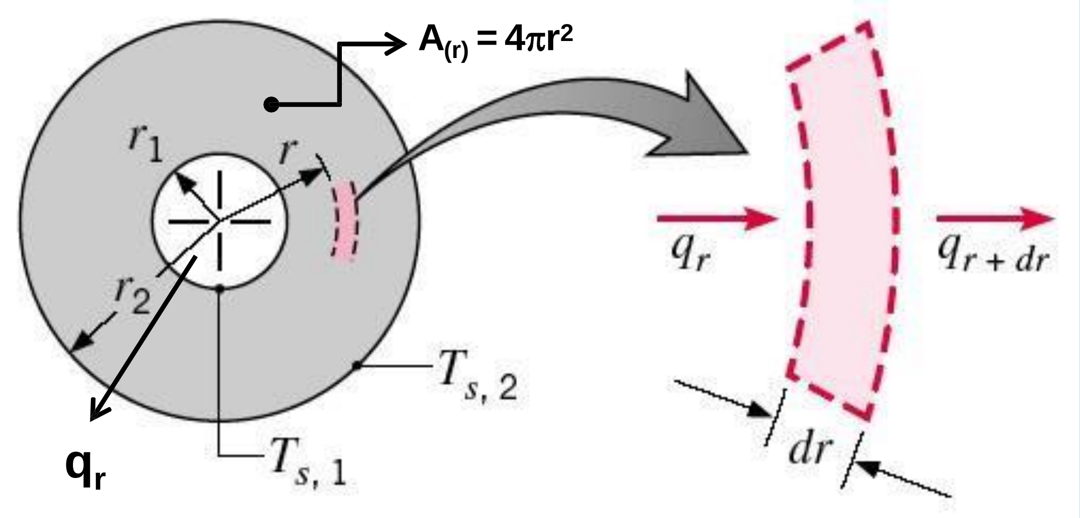
$$q_r = -kA\frac{dT}{dr} \Rightarrow q_r = -k4\pi r^2\frac{dT}{dr}$$

integrando com os limites, temos:

$$q_r\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -4\pi k\int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow$$

$$q_r\left(-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right) = 4\pi k\,(T_1 - T_2) \Rightarrow$$

$$q_r = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)} = \frac{\Delta T}{R_{t,esf}}$$



- **Perfil de temperatura.**

$$T_{(r)} = T_1 - \frac{q_r}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)$$

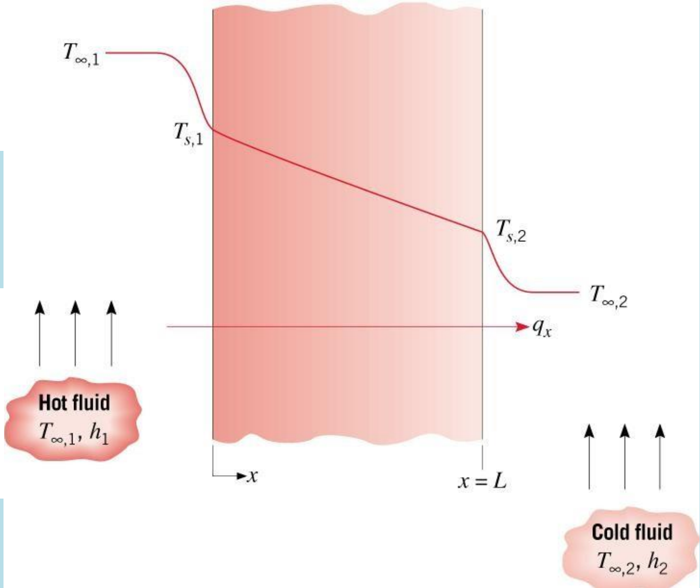
Cálculo de condução

- **Paredes Compostas.**
- Circuito térmico – Analogia com circuito elétrico.
- Primeiramente vamos determinar a resistência térmica de convecção.

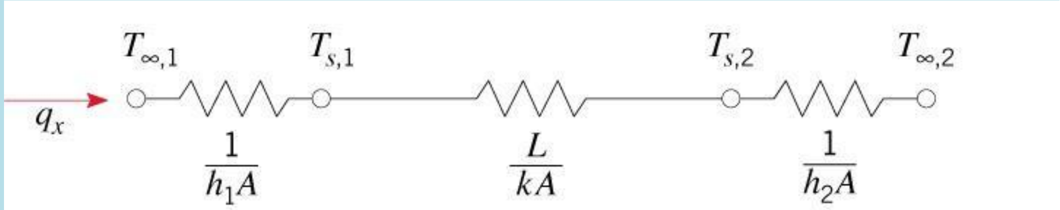
$$q = hA(T_p - T_f) \quad \text{ou} \quad q = \frac{(T_p - T_f)}{\frac{1}{hA}} = \frac{\Delta T}{R_{t,conv}}$$

Neste caso a resistência térmica de convecção é

$$R_{t,conv} = \frac{1}{hA}$$



- Circuito térmico.



Valores típicos do coeficiente de transferência de calor por convecção.

Process	h $(W/m^2 \cdot K)$
Free convection	
Gases	2–25
Liquids	50–1000
Forced convection	
Gases	25–250
Liquids	100–20,000
Convection with phase change	
Boiling or condensation	2500–100,000

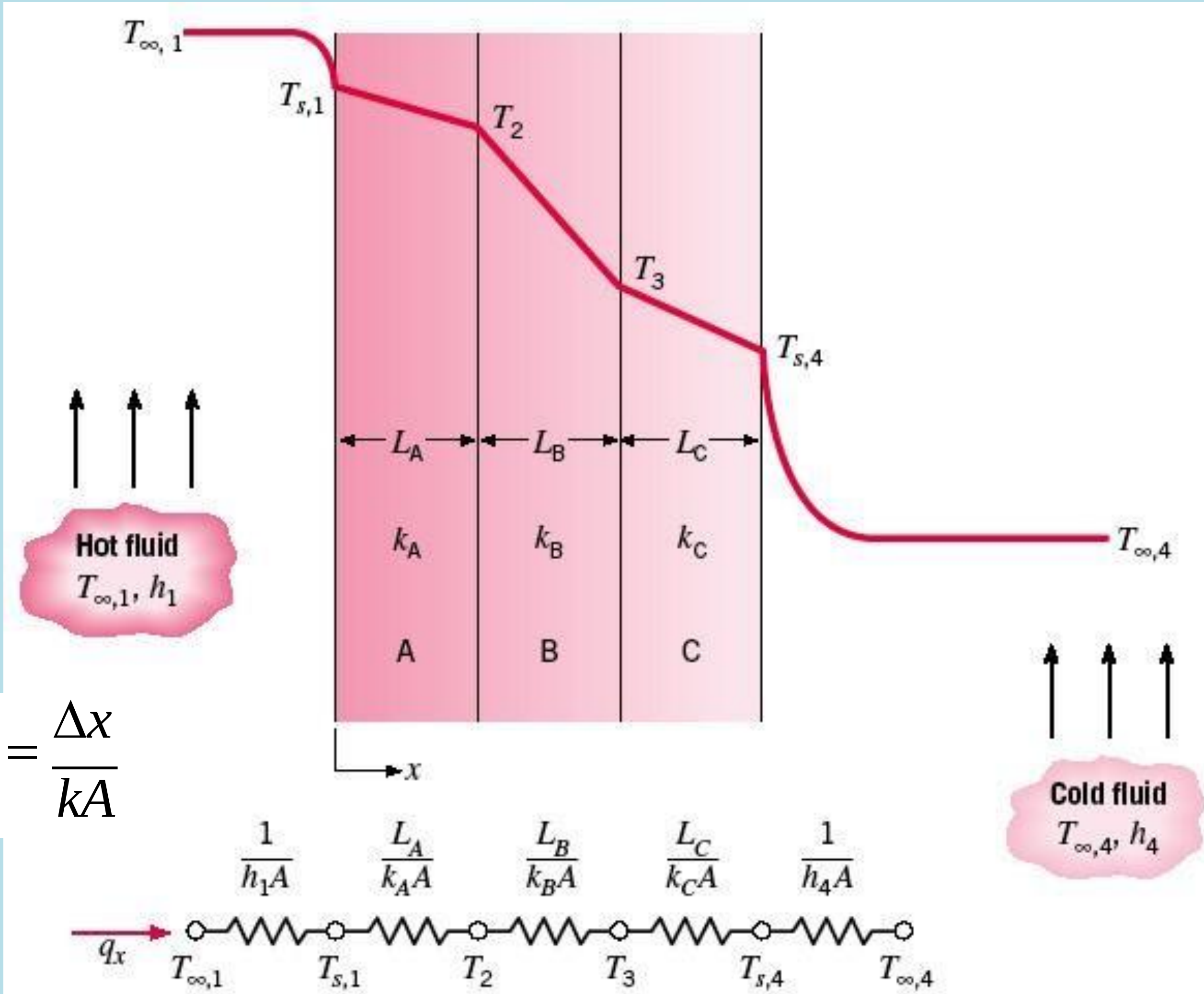
Cálculo de condução

- **Parede Parede Plana em Série.**
- Circuito térmico – Analogia com circuito elétrico.
- Vamos aplicar a equação:

$$q = \frac{\Delta T}{R_t}$$

- Para quaisquer dois pontos que formam um trecho do circuito térmico dado.

Circuito Térmico equivalente para uma parede composta em série

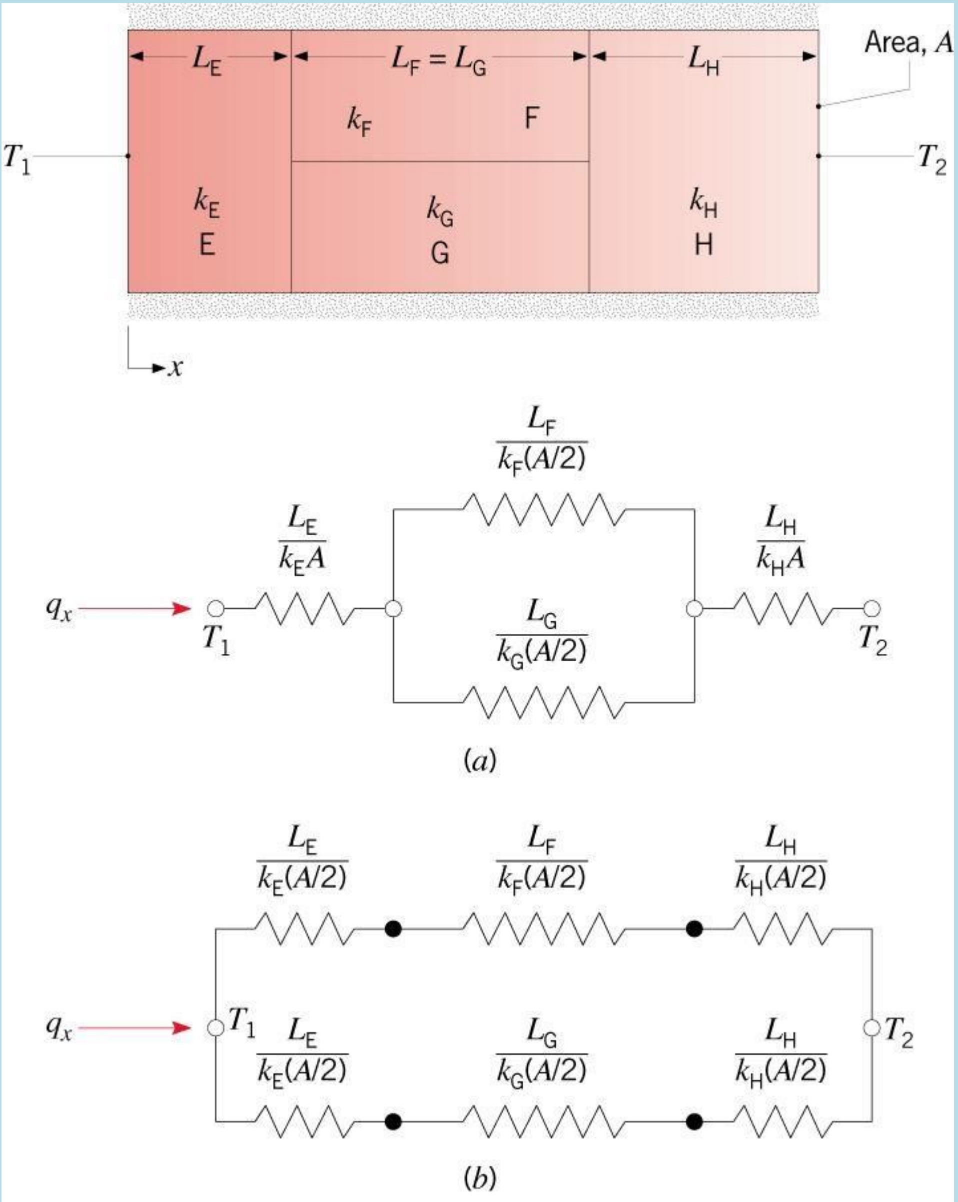


$$R_{t,c} = \frac{L}{kA} = \frac{\Delta x}{kA}$$

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\sum R_t}$$

$$\sum R_t = R_{tot} = \frac{1}{A}\left[\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_4}\right] = \frac{R''_{t}}{A}$$

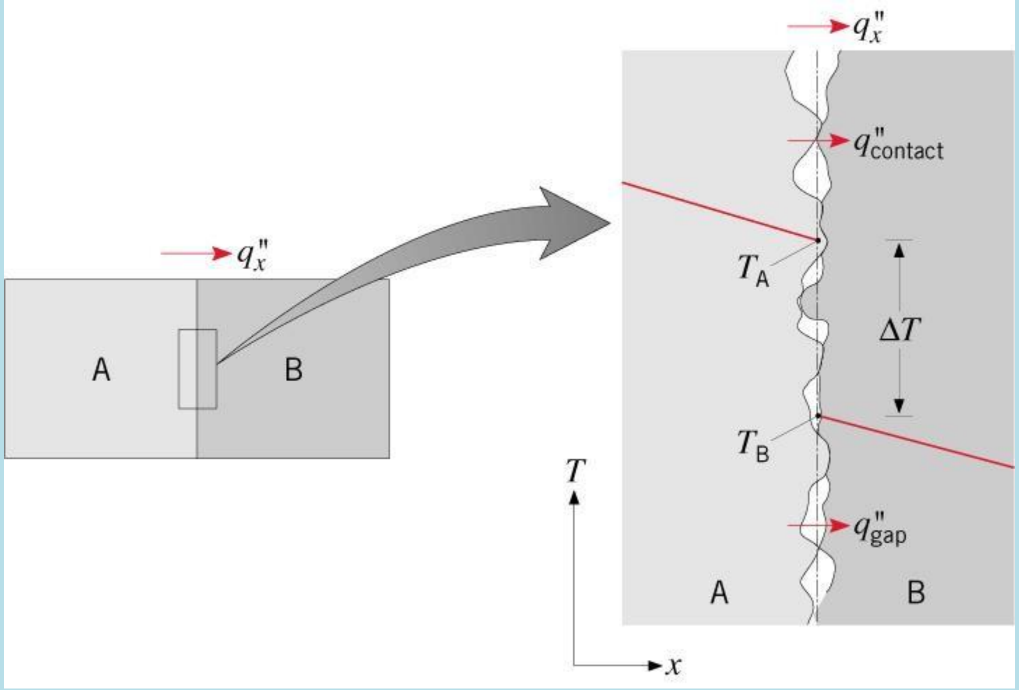
Circuito Térmico equivalente para uma parede composta série-paralela.



a) Considera-se que as superfícies normais à direção x sejam idotérmicas.
b) Supõem-se que as superfícies paralelas à direção x sejam adiabáticas.

Resistência de Contato

- Em sistemas compostos, a queda de temperatura entre as interfaces dos vários materiais podem ser considerável.
- Essa mudança de temperatura é atribuída ao que é conhecido por *Resistência térmica de contato ($R_{t,cont}$).*



$$R''_{t,c} = \frac{T_A - T_B}{q''_x}$$

$$\boldsymbol{R_{t,c} = \frac{R''_{t,c}}{A_c}}$$

Resistência térmica de contato depende:

- Rugosidade superficial;
- propriedades dos materiais;
- pressão de contato e
- tipo de fluído nos vazios.

Resistência térmica de contato para (a) interfaces metálicas sob condições de vácuo e (b) Interface de alumínio (rugosidade superficial de 10 mm, 10^5 N/m^2) com diferentes fluídos interfaciais.

Thermal Resistance, $R''_{t,c} \times 10^4$ (m$^2 \cdot$ K/W)

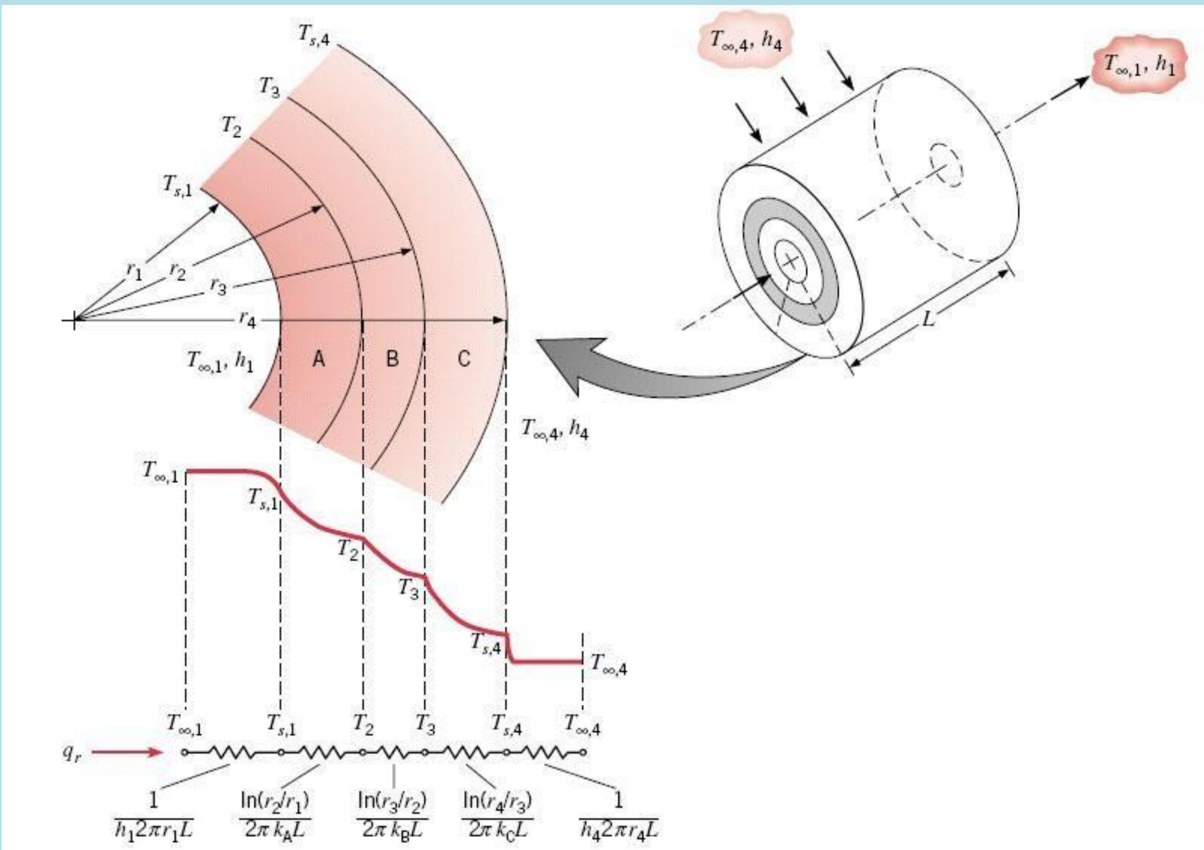
(*a*) Vacuum Interface			(*b*) Interfacial Fluid	
Contact pressure	100 kN/m^2	10,000 kN/m^2	Air	2.75
Stainless steel	6–25	0.7–4.0	Helium	1.05
Copper	1–10	0.1–0.5	Hydrogen	0.720
Magnesium	1.5–3.5	0.2–0.4	Silicone oil	0.525
Aluminum	1.5–5.0	0.2–0.4	Glycerine	0.265

Resistência térmica em interfaces sólido/sólido representativas

Interface	$R''_{t,c} \times 10^4$ $(m^2 \cdot K/W)$	Source
Silicon chip/lapped aluminum in air (27–500 kN/m^2)	0.3–0.6	[2]
Aluminum/aluminum with indium foil filler (~100 kN/m^2)	~0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with indium foil filler (~3500 kN/m^2)	~0.04	[1, 3]
Aluminum/aluminum with metallic (Pb) coating	0.01–0.1	[4]
Aluminum/aluminum with Dow Corning 340 grease (~100 kN/m^2)	~0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with Dow Corning 340 grease (~3500 kN/m^2)	~0.04	[1, 3]
Silicon chip/aluminum with 0.02-mm epoxy	0.2–0.9	[5]
Brass/brass with 15-μm tin solder	0.025–0.14	[6]

Associação em série para parede cilíndrica

- A distribuição de temperatura associada à condução radial através de uma parede cilíndrica é logarítmica, não linear.



$$R_{t,cilindrica} = \frac{1}{2\pi kL}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$q = \frac{\Delta T}{R_t}$$