

Resolução da Lista 3

31 de março de 2020

Exercício 1

a)

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\} = \{n : n \in \mathbb{N}\}.$$

b)

$$\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

c)

$$\Omega = \{(H, H, H); (H, H, M); (H, M, H); (M, H, H); \\ (H, M, M); (M, H, M); (M, M, H); (M, M, M)\}$$

d)

$$\Omega = \{x\% : 0 \leq x \leq 100\}$$

e)

$$\Omega = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (A, E); (B, A); \\ (B, B); (B, C); \dots; (E, A); \dots(E, D); (E, E)\}$$

f)

$$\Omega = \{(A, B); (A, C); (A, D); (A, E); (B, A); \\ (B, C); \dots; (E, A); \dots(E, D); \}$$

Exercício 2

Sejam os eventos

A: Y escolhe analgésico A

B: Y escolhe analgésico B

D: Y tem dor de cabeça

D^c : Y não tem dor de cabeça

Com as probabilidades

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}; P(D^c|A) = \frac{3}{4}; P(D^c|B) = \frac{2}{3}.$$

Pela regra da probabilidade total, a probabilidade de que a dor de cabeça de Y passe é

$$P(D^c) = P(D^c|A)P(A) + P(D^c|B)P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{24}$$

Exercício 3

Considere os eventos

G: gostar de gatos

A: gostar de cachorros

e as probabilidades $P(G) = \frac{1}{4}$; $P(A|G) = \frac{1}{2}$; $P(G|A) = \frac{1}{4}$. Então:

a)

$$P(G \cap A) = P(A|G) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq 0$$

e concluímos que G e A não são mutuamente exclusivos

Exercício 3

b) Como $P(G|A) = P(G) = \frac{1}{4}$, A e G são independentes.

c)

$$P(G^c|A) = 1 - P(G|A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

d) Do item b) A e G são independentes e portanto pode-se provar que A^c e G^c são independentes.

Assim

$$P(A^c \overset{G}{\bigcap}^c) P(A^c) \cdot P(G^c) = (1 - P(A))(1 - P(G)) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}.$$

Exercício 4

2	acertaram	erraram	totais
acertaram	120	42	162
erraram	12	74	86
totais	132	116	248

a)

$$P(\text{Erraram os dois problemas}) = \frac{74}{248} = P(E1o. \cap E2o.) + ???$$

b)

$$P(\text{acertado 2o. e errado o 1o.}) = \frac{42}{248} = P(A2o. \cap E1o.) = ??$$

Exercício 5 Sejam os eventos:

A: o parafuso é produzido pela máquina A

B: o parafuso é produzido pela máquina B

C: o parafuso é produzido pela máquina C

D: o parafuso é defeituoso

Com as probabilidades $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,35$ e $P(C) = 0,4$.

As probabilidades condicionais são

$P(D|A) = 0,05$; $P(D|B) = 0,04$ e $P(D|C) = 0,02$.

Pela regra da probabilidade total, a probabilidade de um parafuso, escolhido ao acaso ser defeituoso é

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = \\ &0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4 = 0,0345. \end{aligned}$$

Pela regra de Bayes

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,0345} = 0,36.$$

Exercício 6

Considere dois eventos A e B com $P(A) = p$ e $P(B) = q$, independentes. a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + q - pq.$$

b)

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - [p + q - pq] = (1 - p) \cdot (1 - q) = P(A^c) \cdot P(B^c). \end{aligned}$$