SOLUÇÃO PROVA SUBSTITUTIVA PME - 2341 04/07/06

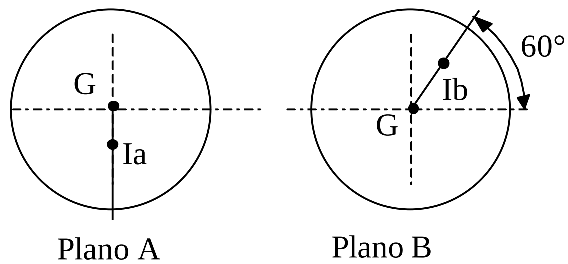
Prof. Francisco E. B. Nigro Prof. Walter ponge-Ferreira

1ª Questão:

a) Da leitura do gráfico, obtemos a amplitude do movimento do centro geométrico de cada mancal em relação ao eixo central de inércia. Assim:

$$\vec{\delta}_A = 0{,}10mm\angle 90° = 0{,}10 \cdot \vec{j} \qquad \vec{\delta}_B = 0{,}20mm\angle 240° = -0{,}10 \cdot \vec{i} - 0{,}176 \cdot \vec{j}$$

Portanto, os traços ficam:



b) Após o reposicionamento das massas das flanges **C** e **D** de modo que a massa não equilibrada em **C** tenha ficado na direção **0°** e em **D** tenha ficado na direção **90°**, obtemos:

$$\vec{\delta}_{Aorig+t} = -0{,}10 \cdot \vec{i} + 0{,}20 \cdot \vec{j} \qquad \vec{\delta}_{Borig+t} = -0{,}05 \cdot \vec{i} - 0{,}297 \cdot \vec{j}$$

Portanto, o efeito do reposicionamento das massas em **C** e **D** é:

$$\vec{\delta}_{Aorig+t} - \vec{\delta}_A = -0{,}10 \cdot \vec{i} + 0{,}10 \cdot \vec{j} \qquad \vec{\delta}_{Borig+t} - \vec{\delta}_B = 0{,}05 \cdot \vec{i} - 0{,}121 \cdot \vec{j}$$

Todo efeito observado na direção ***i*** é decorrente do reposicionamento das massas em **C**, e todo efeito em ***j*** é decorrente do reposicionamento em **D**, portanto:

$$\alpha_{CA} = -0{,}10mm/massa.unit \qquad \alpha_{DA} = 0{,}10mm/massa.unit$$

$$\alpha_{CB} = 0{,}05mm/massa.unit \qquad \alpha_{DB} = -0{,}121mm/massa.unit$$

c) Para balancear o rotor devemos reposicionar as massas nos planos **C** e **D**, de modo que:

$$\begin{cases} \vec{\delta}_A + \alpha_{CA} \cdot m_C \cdot \vec{e}_C + \alpha_{DA} \cdot m_D \cdot \vec{e}_D = \vec{0} \\ \vec{\delta}_B + \alpha_{CB} \cdot m_C \cdot \vec{e}_C + \alpha_{DB} \cdot m_D \cdot \vec{e}_D = \vec{0} \end{cases}$$

ou $$\begin{bmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} m_C \cdot \vec{e}_C \\ m_D \cdot \vec{e}_D \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \vec{\delta}_A \\ \vec{\delta}_B \end{bmatrix}$$ portanto:

$$m_C \cdot \vec{e}_C = -\frac{\begin{vmatrix} \vec{\delta}_A & \alpha_{DA} \\ \vec{\delta}_B & \alpha_{DB} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}10\vec{j} & 0{,}10 \\ 0{,}1\vec{i} + 0{,}173\vec{j} & -0{,}121 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & -0{,}121 \end{vmatrix}} = -\frac{0{,}01\vec{i} + 0{,}0052\vec{j}}{0{,}0071} = 1{,}59 unid.massa \angle 207°$$

$$m_D \cdot \vec{e}_D = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{CA} & \vec{\delta}_A \\ \alpha_{CB} & \vec{\delta}_B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}10 & -0{,}10\vec{j} \\ 0{,}05 & 0{,}10\vec{i} + 0{,}173\vec{j} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & -0{,}121 \end{vmatrix}} = -\frac{0{,}01\vec{i} - 0{,}0123\vec{j}}{0{,}0071} = 2{,}23 unid.massa \angle 231°$$

Portanto, uma solução prática para o plano **C** é colocar uma massa na posição **207°** e as outras duas dispostas simetricamente em torno dessa direção à $\pm ar\cos(0{,}59/2) = \pm 73°$. Já para o plano **D**, uma solução é colocar uma massa na direção **231°** e as outras duas dispostas simetricamente em torno dessa direção à $\pm ar\cos(1{,}23/2) = \pm 52°$.

d) Para estimar o erro angular admissível na posição das massas, calculamos inicialmente a excentricidade

$$e_{ad} \leq \frac{6{,}3}{\omega_{op}} \quad \text{com} \quad \omega_{op} = \frac{1800}{60} \cdot 2 \cdot \pi = 188{,}5 rad/s \qquad e_{ad} \leq 0{,}033 mm$$

Observando que o efeito das massas em **C** e **D** é no sentido de cruzar o eixo de inércia em relação ao geométrico ($\alpha_{CA}<0$, $\alpha_{CB}>0$ e $\alpha_{DB}<0$, $\alpha_{DA}>0$), imporemos a excentricidade admissível nos mancais **A** e **B** com o sinal trocado. Portanto:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \Delta m_C \cdot \vec{e}_C \\ \Delta m_D \cdot \vec{e}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}033 \cdot \vec{e}_{ad} \\ -0{,}033 \cdot \vec{e}_{ad} \end{bmatrix}$$

$$\Delta m_C \cdot \vec{e}_C = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}033 & \alpha_{DA} \\ -0{,}033 & \alpha_{DB} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{vmatrix}} \cdot \vec{e}_{ad} = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}033 & 0{,}10 \\ -0{,}033 & -0{,}121 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & -0{,}121 \end{vmatrix}} \cdot \vec{e}_{ad} = \frac{-0{,}00069 \cdot \vec{e}_{ad}}{0{,}0071} = 0{,}1 \cdot unid.massa \cdot (-\vec{e}_{ad})$$

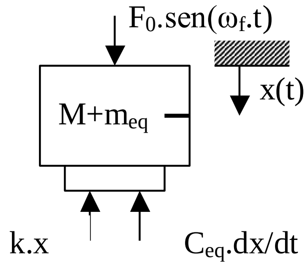
$$\Delta m_D \cdot \vec{e}_D = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{CA} & 0{,}033 \\ \alpha_{CB} & -0{,}033 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{vmatrix}} \cdot \vec{e}_{ad} = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}10 & 0{,}033 \\ 0{,}05 & -0{,}033 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & -0{,}121 \end{vmatrix}} \cdot \vec{e}_{ad} = \frac{0{,}00165 \cdot \vec{e}_{ad}}{0{,}0071} = 0{,}23 \cdot unid.massa \cdot \vec{e}_{ad}$$

Portanto, quando se considera que temos três unidades de massa em cada plano e que, na pior das hipóteses, as três podem estar com o erro máximo e em posição que os erros se adicionem, $\Delta\alpha_C = 0{,}1 \cdot 180/(\pi \cdot 3) = 1{,}9°$ e $\Delta\alpha_D = 0{,}23 \cdot 180/(\pi \cdot 3) = 4{,}4°$.

2ª Questão:

a) Chamando de ***x(t)*** a posição vertical para baixo da massa ***M***, tomada como zero na posição de equilíbrio da massa livre e lembrando que a massa equivalente da estrutura oscila juntamente com a massa ***M***, podemos fazer o diagrama de corpo livre da massa ***M+meq*** para uma posição genérica de ***x(t)*** e uma velocidade genérica ***dx/dt*** (positiva no mesmo sentido de ***x(t)*** positivo), obtemos:

$$(M+m_{eq})\cdot\ddot{x}=F_0\cdot sen(\omega_f\cdot t)-k\cdot x-c_{eq}\cdot\dot{x}$$



ou ainda:

$$(M+m_{eq})\cdot\ddot{x}+c_{eq}\cdot\dot{x}+k\cdot x=F_0\cdot sen(\omega_f\cdot t)$$

com: $c_{eq}=\dfrac{b\cdot k}{\omega_f}$

b) A solução particular da equação diferencial é do tipo: $x_p(t)=X_p\cdot sen(\omega_f\cdot t-\psi)$

Onde: $X_p=\dfrac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+b^2}}$ $\tan(\psi)=\dfrac{b}{1-r^2}$ $r=\dfrac{\omega_f}{\omega}$ $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{M+m_{eq}}}$

Já a aceleração fica: $\ddot{x}_p(t)=-X_p\cdot\omega_f^2\cdot sen(\omega_f\cdot t-\psi)$ e a amplitude da aceleração em função da freqüência: $\ddot{X}_p=\dfrac{F_0}{M+m_{eq}}\cdot\dfrac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+b^2}}$

c) A curva da amplitude de aceleração em função da freqüência sai de zero para baixas freqüências, apresenta um pico na ressonância (***r =1***), e tende a um valor assintótico para a freqüência de excitação muito maior que a freqüência natural ($r\to\infty$). Esses valores ficam:

$$\ddot{X}_{ress}=\frac{F_0}{(M+m_{eq})\cdot b}\qquad\qquad \ddot{X}_{\infty}=\frac{F_0}{M+m_{eq}}$$

Portanto, do gráfico apresentado, podemos ler: $\ddot{X}_{ress}=3{,}5\cdot m/s^2$

$\ddot{X}_{\infty}=0{,}5\cdot m/s^2$ $\omega=2\cdot\pi\cdot 3\cdot rad/s$

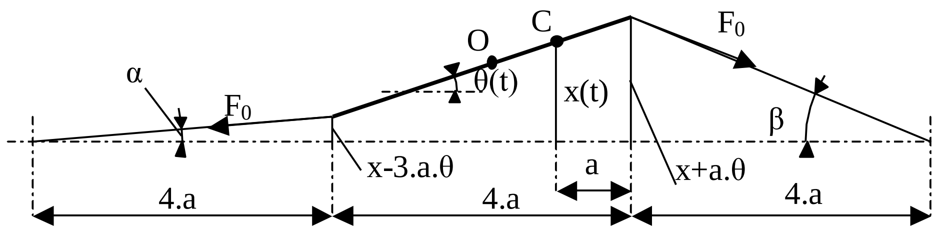
ou ainda $\dfrac{\ddot{X}_{ress}}{\ddot{X}_{\infty}}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{3{,}5}{0{,}5}=7$ $\ddot{X}_{\infty}=0{,}5=\dfrac{F_0}{M+m_{eq}}=\dfrac{600}{1000+m_{eq}}$

Portanto, ***b=0,14*** $m_{eq}=200\cdot kg$ e

$$k=\omega^2\cdot(M+m_{eq})=(6\cdot\pi)^2\cdot 1200=4{,}26\cdot 10^5\cdot N/m$$

3ª Questão:

a) O sistema tem dois gráus de liberdade. Chamando de ***x(t)*** o deslocamento vertical para cima do ponto **C**, tomado como zero na posição de equilíbrio e ***θ(t)*** a inclinação da barra no sentido anti-horário, tomada como zero na posição de equilíbrio, podemos fazer o diagrama de corpo livre da barra com o motor, como indicado na figura.



Lembrando que ***α***, ***β***, ***x*** e ***θ*** são pequenos, podemos escrever o **TMB** para a direção vertical, como segue:

$$M\cdot(\ddot{x}-a\cdot\ddot{\theta})+(M-m)\cdot(\ddot{x}+a\cdot\ddot{\theta})+m\cdot(\ddot{x}+a\cdot\ddot{\theta}-e\cdot\omega_f^2\cdot sen(\omega_f\cdot t))=-F_0\cdot\alpha-F_0\cdot\beta$$

com $\alpha\cong sen\alpha\cong\tan\alpha=\dfrac{x-3\cdot a\cdot\theta}{4\cdot a}$ $\qquad\beta\cong sen\beta\cong\tan\beta=\dfrac{x+a\cdot\theta}{4\cdot a}$

Portanto: $$2\cdot M\cdot\ddot{x}+F_0\cdot\frac{x}{2\cdot a}-F_0\cdot\frac{a\cdot\theta}{2\cdot a}=m\cdot e\cdot\omega_f^2\cdot sen(\omega_f\cdot t)$$

Lembrando que ***e<<a*** e aplicando o **TMA** em relação ao centro de massa **C** do conjunto, obtemos:

$$J_C\cdot\ddot{\theta}=-F_0\cdot\beta\cdot a+F_0\cdot\alpha\cdot3\cdot a-F_0\cdot\cos\beta\cdot a\cdot\theta-F_0\cdot\cos\alpha\cdot3\cdot a\cdot\theta+m\cdot e\cdot\omega_f^2\cdot a\cdot sen(\omega_f\cdot t)$$

Mas $J_C=\dfrac{4\cdot M\cdot a^2}{3}+M\cdot a^2+M\cdot a^2=\dfrac{10}{3}\cdot M\cdot a^2$ e $\cos\alpha\cong1\cong\cos\beta$

Portanto, $$J_C\cdot\ddot{\theta}=-\frac{26}{4}\cdot F_0\cdot a\cdot\theta+F_0\cdot\frac{x}{2}+m\cdot e\cdot a\cdot\omega_f^2\cdot sen(\omega_f\cdot t)$$

O sistema de equações diferenciais fica:

$$\frac{M}{3}\cdot\begin{bmatrix}6&0\\0&10\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\ddot{x}\\a\cdot\ddot{\theta}\end{bmatrix}+\frac{F_0}{2\cdot a}\cdot\begin{bmatrix}1&-1\\-1&13\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x\\a\cdot\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot m\cdot e\cdot\omega_f^2\cdot sen(\omega_f\cdot t)$$

Vale observar que escolhemos trabalhar com ***a.θ*** para que as variáveis tenham as mesmas unidades, o que facilita a detecção de enganos de incoerência de unidades.

b) Tomando o sistema de equações homogêneas, vamos supor uma solução do tipo:

$$\begin{bmatrix}x(t)\\a\cdot\theta(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\a\cdot\Theta\end{bmatrix}\cdot sen(\omega\cdot t+\phi)$$ Derivando duas vezes e substituindo, vem:

$$-\frac{4}{3}\cdot\frac{M\cdot a\cdot\omega^2}{F_0}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}X\\a\cdot\Theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 13\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}X\\a\cdot\Theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Sendo $\lambda=\frac{4\cdot M\cdot a\cdot\omega^2}{3\cdot F_0}$

o problema de auto-valores e auto-vetores fica:

$$\begin{bmatrix}1-3\cdot\lambda & -1\\-1 & 13-5\cdot\lambda\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}X\\a\cdot\Theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Portanto, para obtermos solução diferente da trivial, impomos que o determinante da matriz seja nulo.

$\Delta=(1-3\cdot\lambda)\cdot(13-5\cdot\lambda)-1=0$ ou $15\cdot\lambda^2-44\cdot\lambda+12=0$

Portanto, os auto-valores ficam: ***λ_1=0,3043*** e ***λ_2=2,629*** o que torna as freqüências naturais correspondentes $\omega_1^2=0{,}2282\cdot\frac{F_0}{M\cdot a}$ e $\omega_2^2=1{,}972\cdot\frac{F_0}{M\cdot a}$

Retornando os auto-valores na equação de amplitudes, obtemos os respectivos auto-vetores: $a\cdot\Theta_1=0{,}0871\cdot X_1$ e $a\cdot\Theta_2=-6{,}89\cdot X_2$

c) Para encontrarmos a freqüência angular da excitação para a qual o ponto **C** se mantém fixo, podemos impor ***x(t)=0*** (permanentemente zero) e tratar ω_f como incógnita.

A equação diferential completa em $\ddot{x}(t)$ fica: $-\frac{F_0}{2}\cdot\theta_p=m\cdot e\cdot\omega_f^2\cdot sen(\omega_f\cdot t)$

A equação diferencial em $\ddot{\theta}(t)$ fica:

$$\left[\frac{10}{3}\cdot M\cdot a^2\cdot\omega_f^2-\frac{13}{2}\cdot F_0\cdot a\right]\cdot\theta_p+m\cdot e\cdot a\cdot\omega_f^2\cdot sen(\omega_f\cdot t)=0$$

Substituindo a expressão de ***θ_p(t)***, vem:

$\left[\frac{10}{3}\cdot M\cdot a\cdot\omega_f^2-\frac{13}{2}\cdot F_0\right]\cdot\frac{2}{F_0}-1=0$ ou $\frac{20\cdot M\cdot a\cdot\omega_f^2}{3\cdot F_0}=14$

Portanto, $\omega_f^2=\frac{21}{10}\cdot\frac{F_0}{M\cdot a}$ causa ***x_p(t)=0*** e $\theta_p(t)=-\frac{21}{5}\cdot\frac{m\cdot e}{M\cdot a}\cdot sen(\omega_f\cdot t)$