SOLUÇÃO 3ª PROVA PME - 2341 27/06/06

Prof. Francisco E. B. Nigro Prof. Walter ponge-Ferreira

1ª Questão:

a) Chamando de **x(t)** o deslocamento absoluto da placa na direção **x** e **y(t)** o seu deslocamento na direção **y**, ambos medidos a partir da configuração de equilíbrio, e isolando o sistema placa mais massa **m'**, supostos em uma posição genérica, e aplicando o T.M.B. nas direções **x** e **y**, podemos escrever:

$$\begin{cases} (M - m')\cdot \ddot{x} + m'\cdot(\ddot{x} - R\cdot\Omega^2\cdot\cos(\Omega\cdot t)) = -M\cdot g\cdot\dfrac{x}{L} \\ (M - m')\cdot \ddot{y} + m'\cdot(\ddot{y} - R\cdot\Omega^2\cdot sen(\Omega\cdot t)) = -M\cdot g\cdot\dfrac{y}{L} \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} M\cdot\ddot{x} + M\cdot g\cdot\dfrac{x}{L} = m'\cdot R\cdot\Omega^2\cdot\cos(\Omega\cdot t) \\ M\cdot\ddot{y} + M\cdot g\cdot\dfrac{y}{L} = m'\cdot R\cdot\Omega^2\cdot sen(\Omega\cdot t) \end{cases}$$

Portanto, as equações são desacopladas.

b) As freqüências naturais são:

$$\omega_x^2 = \frac{g}{L} \qquad \text{e} \qquad \omega_y^2 = \frac{g}{L}$$

Portanto, como as equações são desacopladas, a vibração na direção **x** é independente da vibração na direção **y**, que constituem modos fundamentais de vibrar. Como as freqüências naturais são coincidentes, quaisquer outras duas direções ortogonais também são direções principais.

c) Para que o absorvedor esteja perfeitamente sintonizado com a freqüência de excitação **Ω** , devemos ter:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2\cdot k}{m}}$$

Além disso, para que a placa fique parada, a força ativa rotativa em **M** deve ser igual à força provocada pelo absorvedor. Portanto:

$$2\cdot k\cdot\frac{R}{2} = m'\cdot R\cdot\Omega^2 = m'\cdot R\cdot\frac{2\cdot k}{m} \qquad \text{ou} \qquad m = 2\cdot m' \qquad \text{e} \qquad k = \Omega^2\cdot m'$$

2ª Questão:

a) Observando que o efeito das molas de rigidez **k** e dos amortecedores é tornar a rigidez e o amortecimento do sistema uniformes, a única não uniformidade do sistema é provocada pela mola de rigidez **3.k**, cuja direção define um modo fundamental de vibrar. O outro modo é, portanto, ortogonal à direção da mola de rigidez **3.k**. Chamando de **u(t)** a coordenada medida a partir da posição de equilíbrio na direção da mola de rigidez **3.k** para baixo, e **v(t)** a coordenada na direção ortogonal, também para baixo, podemos escrever as separadas:

$$\begin{cases} m\cdot\ddot{u} = -c\cdot\dot{u} - 4\cdot k\cdot u \\ m\cdot\ddot{v} = -c\cdot\dot{v} - k\cdot v \end{cases} \quad \text{ou portanto:} \quad \begin{cases} m\cdot\ddot{u} + c\cdot\dot{u} + 4\cdot k\cdot u = 0 \\ m\cdot\ddot{v} + c\cdot\dot{v} + k\cdot v = 0 \end{cases}$$

b) Portanto, as freqüências naturais ficam:

$$\omega_u = \sqrt{\frac{4 \cdot k}{m}} \qquad \omega_v = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Os fatores de amortecimento modais ficam:

$$\zeta_u = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot k \cdot m}} \quad \text{e} \quad \zeta_v = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$$

c) Sendo **y(t)** o deslocamento vertical para baixo, podemos escrever:

$$y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot u(t) + \frac{1}{2} \cdot v(t)$$

Uma vez que $c = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$, as soluções das equações em **u(t)** e **v(t)** ficam:

$$\begin{cases} \zeta_u = \dfrac{1}{2} \\ \zeta_v = 1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\begin{cases} u(t) = e^{-\zeta_u \cdot \omega_u \cdot t} \cdot (A \cdot sen(\omega_u \cdot \sqrt{1-\zeta_u^2} \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_u \cdot \sqrt{1-\zeta_u^2} \cdot t)) \\ v(t) = (C \cdot t + D) \cdot e^{-\omega_v \cdot t} \end{cases}$$

Chamando $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ e substituindo os valores dos fatores de amortecimento

$$\begin{cases} u(t) = e^{-\omega \cdot t} \cdot (A \cdot sen(\sqrt{3} \cdot \omega \cdot t) + B \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot \omega \cdot t)) \\ v(t) = e^{-\omega \cdot t} \cdot (C \cdot t + D) \end{cases}$$

Desprezando as deformações das molas pelo peso próprio de **m**, face a altura **h**, podemos calcular a velocidade vertical da massa no instante do impacto da caixa no chão, como sendo:

$$w = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \qquad \text{Portanto:} \quad \begin{cases} \dot{u}(0) = w \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dot{v}(0) = w \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

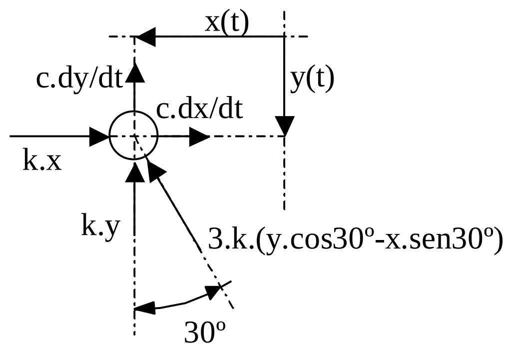
Derivando as expressões de **u(t)** e **v(t)** no tempo e desprezando as deformações iniciais das molas, as condições iniciais fornecem:

$$\begin{cases} u(0) = 0 = B \\ v(0) = 0 = D \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{u}(0) = w \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = A \cdot \sqrt{3} \cdot \omega \cdot \cos(0) \\ \dot{v}(0) = w \cdot \dfrac{1}{2} = C \end{cases}$$

Portanto, $\begin{cases} u(t) = e^{-\omega \cdot t} \cdot \dfrac{w}{2 \cdot \omega} \cdot sen(\sqrt{3} \cdot \omega \cdot t) \\ v(t) = e^{-\omega \cdot t} \cdot \dfrac{w}{2} \cdot t \end{cases}$ ou ainda:

$$y(t) = \frac{w}{4} \cdot e^{-\omega \cdot t} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{\omega} \cdot sen(\sqrt{3} \cdot \omega \cdot t) + t)$$

Para quem não percebeu as direções principais, a escolha das coordenadas ***x(t) e y(t)*** medidas a partir da posição de equilíbrio para a esquerda e para baixo, respectivamente, parece bastante adequada. Neste caso, supondo a massa ***m*** deslocada valores genéricos (pequenos) das variáveis de sua posição de equilíbrio e fazendo o diagrama de corpo livre da massa, obtemos as forças indicadas na figura, que darão orígem às equações diferenciais válidas para quaisquer valores das variáveis. Vale observar que as variáveis e suas derivadas devem ser supostas genéricas, mas que o sentido da derivada positiva de cada variável deve ser o mesma da variável. Aplicando o **TMB** nas direções de **x** e **y**, obtemos:



$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x - c \cdot \dot{x} + 3 \cdot k \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x) \cdot \frac{1}{2}$$

$$m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y - c \cdot \dot{y} - 3 \cdot k \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Em termos matriciais, o sistema de equações fica:

$$m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \frac{k}{4} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \cdot \sqrt{3} \\ -3 \cdot \sqrt{3} & 13 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Observando que a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de massa, podemos resolver o sistema não amortecido para identificar as novas variáveis, combinação linear das variáveis ***x(t)*** e ***y(t)***, que desacoplam as equações diferenciais do sistema não amortecido. No caso da matriz de amortecimento ser uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, essas novas variáveis desacoplam também o sistema amortecido. O sistema não amortecido fica:

$$\frac{4 \cdot m}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ Para $\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \cdot sen(\omega \cdot t + \phi)$

obtemos a equação de amplitudes: $\begin{bmatrix} 7-\lambda & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13-\lambda \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ com $\lambda = \frac{4 \cdot m \cdot \omega^2}{k}$

Para obtermos uma solução diferente da trivial, ***X=Y=0***, impomos que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. Com isso encontramos os auto-valores do problema.

$\Delta = (7-\lambda) \cdot (13-\lambda) - 27 = 0$ ou $\lambda^2 - 20 \cdot \lambda + 64 = 0$

As duas raízes ficam: $\lambda_1 = 4 \quad e \quad \lambda_2 = 16$ Portanto, as freqüências naturais ficam:

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad e \quad \omega_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$ que coincidem com as anteriormente encontradas.

Os modos fundamentais de vibrar são obtidos substituindo-se cada um dos auto-valores na equação de amplitudes. Para $\lambda = \lambda_1$, obtemos: $X_1 = \sqrt{3} \cdot Y_1$. Já para $\lambda = \lambda_2$, obtemos $\sqrt{3} \cdot X_2 = -Y_2$, que definem os auto-vetores. O primeiro modo é na direção de ***v(t)*** anteriormente definido, e o segundo modo na direção de ***u(t)***.

Uma vez que os modos de vibrar do sistema amortecido são os mesmos do sistema não amortecido, porque o amortecimento é proporcional, podemos obter os fatores de amortecimento modais substituindo-se cada modo de vibrar em qualquer das equações diferenciais. Assim, por exemplo, para o primeiro modo, obtemos:

$m \cdot \ddot{x}_1 + c \cdot \dot{x}_1 + k \cdot x_1 - 3 \cdot k \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot x_1) \cdot \frac{1}{2} = 0$. Portanto $\zeta_1 = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}} = 1$

Para o segundo modo, vem:

$$m \cdot \ddot{x}_2 + c \cdot \dot{x}_2 + k \cdot x_2 - 3 \cdot k \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot x_2) \cdot \frac{1}{2} = m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + 4 \cdot k \cdot x = 0$$

Portanto, $\zeta_2 = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{4 \cdot k \cdot m}} = \frac{1}{2} \quad e \quad \omega_{2,d} = \omega_2 \cdot \sqrt{1 - \zeta_2^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \sqrt{3} \cdot \omega$.

A solução geral do sistema de equações diferenciais homogêneas, fica portanto:

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot (A' + B' \cdot t) \cdot e^{-\omega \cdot t} + \begin{Bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} \cdot e^{-\omega \cdot t} \cdot \left[C' \cdot sen(\sqrt{3} \cdot \omega \cdot t) + D' \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot \omega \cdot t) \right]$$

Com as mesmas hipóteses aplicadas na solução já apresentada no item **c)** e impondo as condições iniciais abaixo, são determinadas as constantes A', B', C' e D'.

$\begin{Bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad e \quad \begin{Bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ w \end{Bmatrix}$ onde $\quad w = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

$\begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot A' + \begin{Bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} \cdot D' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ Portanto, $A' = D' = 0$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot B' \cdot (1 - \omega \cdot t) \cdot e^{-\omega \cdot t} + \begin{Bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} \cdot C' \cdot \omega \cdot \left[\sqrt{3} \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot \omega \cdot t) - sen(\sqrt{3} \cdot \omega \cdot t) \right] \cdot e^{-\omega \cdot t}$$

$\begin{Bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot B' + \begin{Bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega \cdot C'$ Portanto, $B' = \frac{w}{4} \quad e \quad C' = \frac{w}{4 \cdot \omega}$

Finalmente, $y(t) = \left[\frac{1}{4} \cdot t + \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \omega} \cdot sen(\sqrt{3} \cdot \omega \cdot t) \right] \cdot w \cdot e^{-\omega \cdot t}$

3ª Questão:

a) Chamando de **θ(t)** o ângulo de inclinação do trator no sentido de levantar a frente, medido a partir da posição de equilíbrio, e **x(t)** o deslocamento vertical para cima do centro de massa, tomado como zero na posição de equilíbrio representada na figura, podemos escrever:

$$m \cdot \ddot{x} = -k_1(x + a\theta - e \cdot sen(\Omega t)) - k_2(x - b\theta) - c_1(\dot{x} + a\dot{\theta} - e \cdot \Omega \cos(\Omega t)) - c_2(\dot{x} - b\dot{\theta})$$

$$J_C \ddot{\theta} = -k_1(x + a\theta - e \cdot sen(\Omega t))a + k_2(x - b\theta)b - c_1(\dot{x} + a\dot{\theta} - e \cdot \Omega \cos(\Omega t))a + c_2(\dot{x} - b\dot{\theta})b$$

onde $\Omega = \frac{v}{R}$ representa a velocidade angular de rotação da roda dianteira.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_1 a - c_2 b \\ c_1 a - c_2 b & c_1 a^2 + c_2 b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1 a - k_2 b \\ k_1 a - k_2 b & k_1 a^2 + k_2 b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_\theta(t) \end{bmatrix}$$

com $\begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \cdot e \cdot [k_1 \cdot sen(\Omega \cdot t) + c_1 \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t)]$

b) Para desacoplar as equações, basta fazer $c_2 = c_1 \cdot \dfrac{a}{b}$ e $k_2 = k_1 \cdot \dfrac{a}{b}$ de modo a diagonalizar as matrizes de amortecimento e rigidez. Portanto,

$$c_2 = 2 \cdot c_1 = 500 \cdot N \cdot s / m \qquad\qquad k_2 = 2 \cdot k_1 = 2000 \cdot N / m$$

c) As equações separadas em x e θ ficam:

$$m \cdot \ddot{x} + 3 \cdot c_1 \cdot \dot{x} + 3 \cdot k_1 \cdot x = k_1 \cdot e \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{c_1 \cdot \Omega}{k_1}\right]^2} \cdot sen(\Omega \cdot t + \alpha)$$

$$J_C \cdot \ddot{\theta} + \frac{3}{2} \cdot c_1 \cdot a^2 \cdot \dot{\theta} + \frac{3}{2} \cdot k_1 \cdot a^2 \cdot \theta = k_1 \cdot e \cdot a \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{c_1 \cdot \Omega}{k_1}\right]^2} \cdot sen(\Omega \cdot t + \alpha)$$

onde $\tan(\alpha) = \dfrac{c_1 \cdot \Omega}{k_1}$. Portanto,

$$\omega_x = \sqrt{\frac{3 \cdot k_1}{m}} \qquad \omega_\theta = \sqrt{\frac{3 \cdot k_1 \cdot a^2}{2 \cdot J_C}} \qquad \zeta_x = \frac{3 \cdot c_1}{2 \cdot \sqrt{3 \cdot k_1 \cdot m}} \qquad \zeta_\theta = \frac{3 \cdot c_1 \cdot a^2}{2 \cdot \sqrt{6 \cdot k_1 \cdot a^2 \cdot J_C}}$$

e a solução em regime permanente fica:

$$x_p(t) = X_p \cdot sen(\Omega \cdot t + \alpha - \psi_x) \qquad\qquad \theta_p(t) = \Theta_p \cdot sen(\Omega \cdot t + \alpha - \psi_\theta)$$

com:

$$X_p = \frac{\dfrac{e}{3} \cdot \sqrt{1 + \left[\dfrac{c_1 \cdot \Omega}{k_1}\right]^2}}{\sqrt{(1 - r_x^2)^2 + (2 \cdot \zeta_x \cdot r_x)^2}} \qquad\qquad \Theta_p = \frac{\dfrac{2 \cdot e}{3 \cdot a} \cdot \sqrt{1 + \left[\dfrac{c_1 \cdot \Omega}{k_1}\right]^2}}{\sqrt{(1 - r_\theta^2)^2 + (2 \cdot \zeta_\theta \cdot r_\theta)^2}}$$

$$r_x = \frac{\Omega}{\omega_x} \qquad r_\theta = \frac{\Omega}{\omega_\theta} \qquad \tan(\psi_x) = \frac{2 \cdot \zeta_x \cdot r_x}{1 - r_x^2} \qquad \tan(\psi_\theta) = \frac{2 \cdot \zeta_\theta \cdot r_\theta}{1 - r_\theta^2}$$

Finalmente, o movimento vertical para cima do assento do motorista fica:

$$x_A(t) = x_p(t) - d \cdot \theta_p(t)$$