Escola Politécnica da USP – Departamento de Engenharia Mecânica

<u>PMC 346</u> – 3a. Prova – 30 de novembro de 1999; Duração: 120 minutos

1 - (3,5 pontos) O pêndulo físico representado na figura <u>1a</u> é excitado por um movimento periódico horizontal da sua articulação, dado pela função $y(t)$ que pode ser obtida de $y(t)$ representada na figura <u>1b</u>. Sendo conhecidas as seguintes características do pêndulo: massa m ; distância de centro de massa <u>C</u> à articulação <u>A</u>, l ; momento de inércia do pêndulo em relação à articulação A, J_A ; coeficiente de dissipação viscosa na articulação (relação entre o momento de força e a velocidade angular do pêndulo), c_A, pede-se:

a) A equação diferencial do movimento angular de oscilação do pêndulo, supondo pequenas amplitudes, e a freqüência natural do movimento não amortecido;
b) Representar o termo da excitação na equação diferencial por uma série de Fourier;
c) Dados: m=1 kg; l=0.1 m; g=10 m/s^2; J_A= 0,011 kgm^2; c_A =0,042 Nm/rad/s , T=1 s, e a=0.2 m/s^2, calcular a amplitude de oscilação do pêndulo em regime permanente, considerando somente os dois componentes da série que provocam as maiores amplitudes.

2 - (3,5 pontos) Um determinado dispositivo é composto por uma caixa rígida na qual estão montadas duas barras metálicas modeladas conforme mostrado na figura <u>2a</u>. Na análise preliminar do dispositivo previu-se que o nível de vibrações das extremidades das barras seria excessivo se a caixa fosse submetida a um movimento oscilatório vertical de freqüência próxima a $\sqrt{k_1/m}$. Para solucionar o problema, o engenheiro encarregado do desenvolvimento do dispositivo sugeriu a colocação de uma mola de constante elástica k_2 unindo as extremidades das barras, conforme mostrado na figura <u>2b</u>. Pede-se:

a) As equações diferenciais do movimento do sistema composto pelas duas barras;
b) As freqüências e modos naturais do sistema;
c) Os fatores de amortecimento modais;
d) Comente a sugestão do engenheiro encarregado.

3 - (3,0 pontos) Um motor elétrico aciona um agitador através de um redutor de velocidades de relação 3:1, como indicado na figura <u>3a</u> . Para estudar o efeito de um erro de fabricação da dentadura da coroa do redutor, que foi usinado com uma excentricidade ε, concebeu-se o modelo físico representado na figura <u>3b</u>, que despreza a inércia do redutor face à do motor e do agitador. Sendo dados: momento de inércia do rotor do motor elétrico, J_m=2,5 kg.m^2; momento de inércia do agitador (incluindo a massa equivalente do líquido), J_a=20 kg.m^2; rigidez torcional equivalente do eixo do agitador (incluindo a rigidez do redutor), k_t=18x10^4 N.m/rad; coeficiente de amortecimento viscoso relativo à deformação torcional do redutor, referido ao eixo do agitador, c_t=1800 N.m/rad/s ; raio da coroa , R=200 mm, e excentricidade da coroa, ε = 0,2 mm, pede-se:

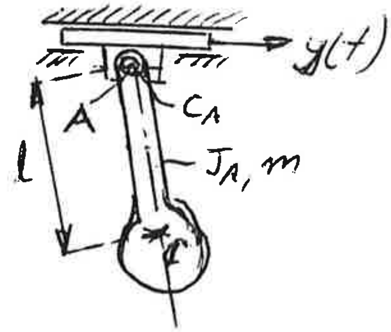
a) As equações diferenciais dos movimentos angulares do motor e agitador;
b) As freqüências e modos naturais do sistema não amortecido;
c) A amplitude de vibração angular do eixo do agitador quando sua velocidade média de rotação for igual a 1200 rpm.

**Lembrete: Expressão do teorema do Momento Angular

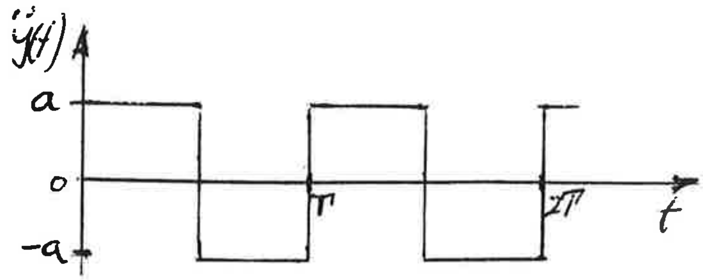
$$(G-P)\times m a_P + \frac{d}{dt}\left(\{i,j,k\}[J]_P\begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix}\right) = M_P$$; onde G: centro de massa, m: massa, P: polo, a: aceleração,

$\{i,j,k\}$: versores do sistema de coordenadas, M_P : momento em relação a P., w_x,...: componentes do vetor de rotação, $[J]_P$: matriz de inércia.

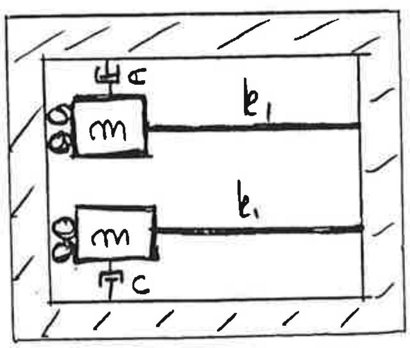
P3 PMC 346 30/11/99



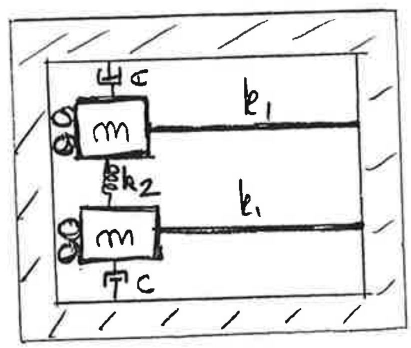
1.a



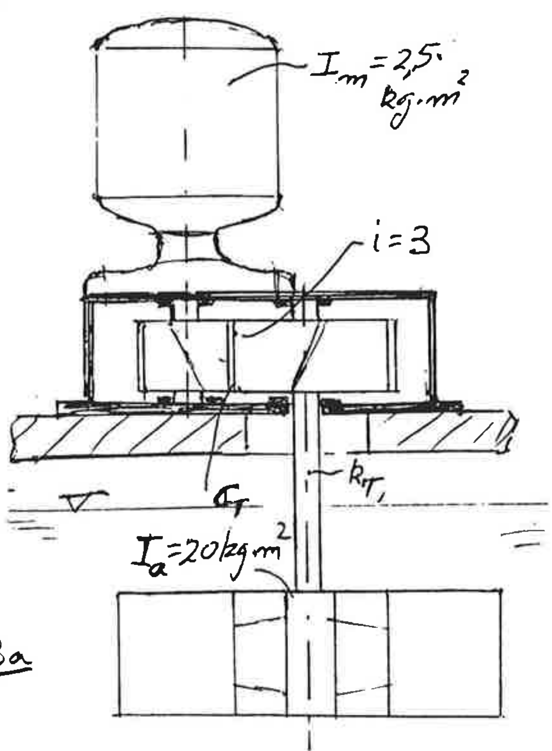
1.b



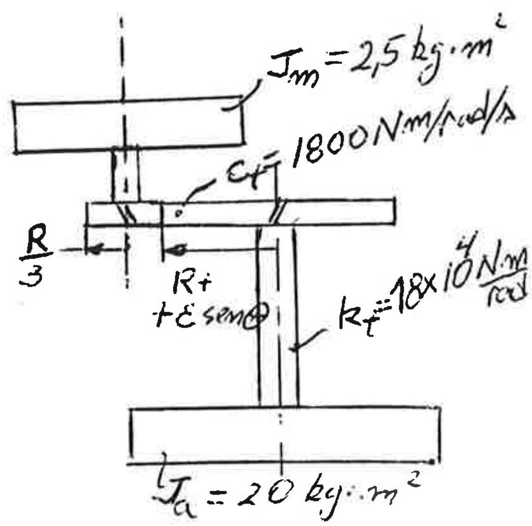
2a



2b



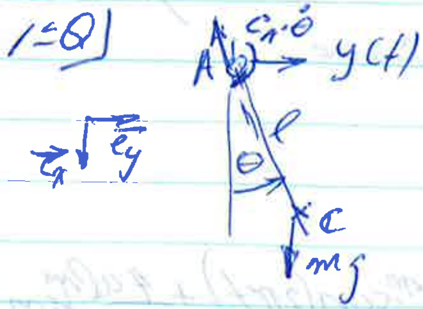
3a



3.b

3ª Prova PMC-346 3ª Prova 30/11/99

1ª Q)



TMA em relação a A

$$J_A \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{e}_z + (C-A) \wedge m \cdot \ddot{y} \cdot \vec{e}_y = -mgl \cdot \mathrm{sen}\,\theta\, \vec{e}_z + -c_A \dot{\theta} \cdot \vec{e}_z$$

$$J_A \ddot{\theta} \cdot \vec{e}_z + ml\ddot{y}\cos\theta\, \vec{e}_z = -mgl\,\mathrm{sen}\,\theta\, \vec{e}_z - c_A \dot{\theta} \vec{e}_z$$

mas $\theta << 1 \therefore \cos\theta \simeq 1$; $\mathrm{sen}\,\theta \simeq \theta$

(a) $$\boxed{J_A \ddot{\theta} + c_A \dot{\theta} + mgl\theta = -ml\ddot{y}}$$ (1,5)

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}}$$

Desenvolvendo $\ddot{y}$ em série de Fourier vem:

se $\begin{cases} z = \frac{2\pi \cdot t}{T} \\ f(z) \text{ é ímpar e de média } 0 \end{cases}$

$a_0 = 0 \quad a_m = 0$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cdot \mathrm{sen}(mz)\, dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a\, \mathrm{sen}(mz)\, dz =$$

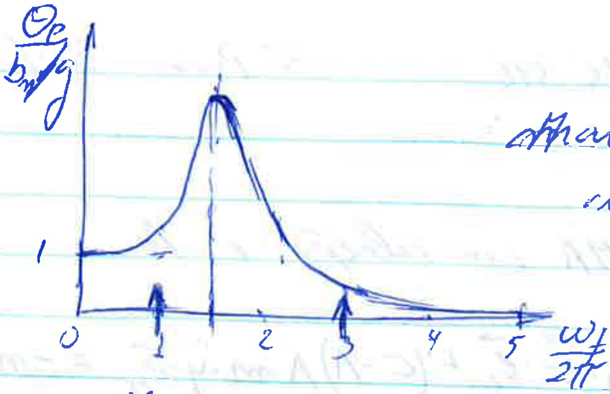
$$= \frac{2a}{\pi m} \cdot (-\cos mz) \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4a}{\pi m} & p/m \text{ ímpar} \\ 0 & p/m \text{ par} \end{cases}$$

(b) $$\boxed{\ddot{y} = \frac{4a}{\pi} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{4a}{3\pi} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{6\pi t}{T}\right) + \frac{4a}{5\pi} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{10\pi t}{T}\right) + \dots}$$

(1,5)

Sendo $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} = 9{,}53\ \mathrm{rad/s} = 1{,}52\ \mathrm{Hz}$

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{0{,}042}{2 \cdot \sqrt{mgl \cdot J_A}} = 0{,}2$$



maiores estão mais próximos da ressonância

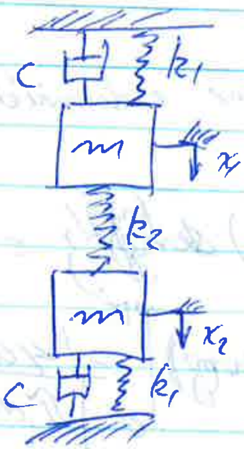
$$J_A\ddot{\theta} + c_A\dot{\theta} + mgl\theta = \frac{4am}{\pi}\,\text{sen}(2\pi t) + \frac{4alm}{3\pi}\,\text{sen}(6\pi t)$$

$$\Theta_p = \frac{\frac{4a}{\pi g}\cdot\text{sen}(2\pi t - \psi_1)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{1{,}52}\right)^2\right)^2 + \left(0{,}4\cdot\frac{1}{1{,}52}\right)^2}} + \frac{\frac{4a}{3\pi g}\cdot\text{sen}(6\pi t - \psi_3)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{3}{1{,}52}\right)^2\right)^2 + \left(0{,}4\cdot\frac{3}{1{,}52}\right)^2}}$$

(0,5) $\boxed{\Theta_p = 0{,}0407\,\text{sen}(2\pi t - 0{,}656) + 0{,}0028\,\text{sen}(6\pi t - 2{,}875)}$

$$tg\,\psi_1 = \frac{\frac{0{,}4}{1{,}52}}{1-\left(\frac{1}{1{,}52}\right)^2} = 0{,}769 \qquad tg\,\psi_3 = \frac{\frac{1{,}2}{1{,}52}}{1-\left(\frac{3}{1{,}52}\right)^2}$$

2ª Q)



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_1(x_1-x_2) - c\dot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 = -k_1x_2 + k_2(x_1-x_2) - c\dot{x}_2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_1+k_2)x_2 = 0 \end{cases}} \;(1$$

$$m\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + c\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\-k & k_1+k_2\end{bmatrix}$$

p/ sistema não amortecido

$$\begin{vmatrix}k_1+k_2-m\omega^2 & -k_2\\ -k_2 & k_1+k_2-m\omega^2\end{vmatrix} = 0 \quad \therefore (k_1+k_2-m\omega^2)^2 = k_2^2$$

$$k_1+k_2-m\omega^2 = \pm k_2$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}} \qquad \boxed{\omega_2^2 = \frac{k_1+2k_2}{m}} \qquad (1,5)$$

p/ $\omega=\omega_1$ $(k_1+k_2-k_1)\cdot X_{11} - k_2\cdot X_{21} = 0 \quad \therefore \boxed{X_{21} = X_{11}}$ 1º modo

p/ $\omega=\omega_2$

As variáveis

(0,0 1º modo) $y_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

(0,0 2º modo) $y_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$

desacoplam ~~separam~~ as equações.

No 1º modo

$$2m\ddot{y}_1 + 2c\dot{y}_1 + 2k_1 y_1 = 0$$

$$\boxed{\zeta_1 = \frac{2c}{2\cdot\sqrt{2k_1 \cdot 2m}} = \frac{c}{2\sqrt{k_1 m}}}$$

No 2º modo

$$2m\ddot{y}_2 + 2c\dot{y}_2 + (2k_1 + 4k_2)\cdot y_2 = 0$$

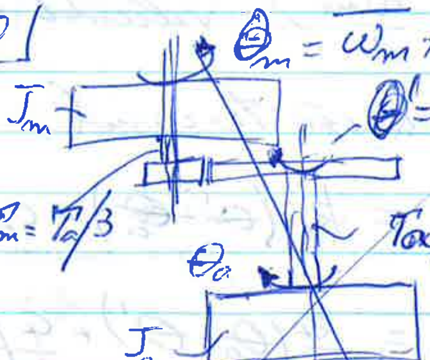
$$\boxed{\zeta_2 = \frac{2c}{2\cdot\sqrt{2m\cdot 2(k_1+2k_2)}} = \frac{c}{2\sqrt{(k_1+2k_2)\cdot m}}}$$

(0,5)

d) Sugestão não vou resolver o problema pois não afeta o 1º modo de vibrar nem a frequ. natural $= \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$

(0,5)

3º Q



$\theta_m = \overline{\omega}_m t + \theta_m$

$$\theta' = \frac{\overline{\omega}_m t}{\theta_m} \cdot \frac{R/3}{R + \varepsilon\cdot \text{sen}\left(\frac{\omega_m t}{3}\right)} \simeq \frac{\overline{\omega}_m t}{3} + \frac{\theta_m}{3} \mp \frac{\overline{\omega}_m t}{3}\frac{\varepsilon}{R}\,\text{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)$$

$T_m = T_a/3$

$$T_{acop} = k_t\cdot(\theta_a - \theta') + c_t\cdot(\dot{\theta}_a - \dot{\theta}')$$

θ_a

J_m

J_a

Isolando o rotor do motor vem:

$$J_m \ddot{\theta}_m = \frac{k_t}{3}\cdot(\theta_a - \theta') + \frac{c_t}{3}\cdot(\dot{\theta}_a - \dot{\theta}')$$

$$\theta' = \frac{\theta_m}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{R}\,\text{sen}\,\theta} \simeq \frac{\theta_m}{3}\left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\cdot\text{sen}\,\theta'\right)$$

$$\sin(\theta') \simeq \text{sen}\left(\frac{\theta_m}{3}\right) \simeq \text{sen}(\theta_a) \qquad \theta' = \frac{\theta_m}{3} - \frac{\varepsilon}{R}\cdot\text{sen}\left(\frac{\theta_m}{3}\right)$$

$$\theta' = \frac{\theta_m}{3} - \frac{\varepsilon}{R}\cdot\text{sen}\,\theta_a$$

$$\left(\overline{\omega}_m t + \dot{\theta}_m\right)\frac{R}{3} = \frac{\overline{\omega}_m R}{3} + \frac{\dot{\theta}_m R}{3} = \dot{\theta}'\left[R + \varepsilon\,\text{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)\right] \simeq \left(\frac{\overline{\omega}_m}{3} + \dot{\theta}'\right)\cdot\left[R + \varepsilon\,\text{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)\right] =$$

$$\left(\overline{\omega}_m t + \theta_3\right)\cdot\frac{R}{3\cdot R\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\,\text{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)\right)} =$$

3ª Q) Se a velocidade angular do motor é $\overline{\omega}_m + \dot\theta_m$ onde $\overline{\omega}_m$ é a velocidade angular média e $\dot\theta_m$ é a velocidade de vibração torsional em torno da média, e $|\dot\theta_m| << \overline{\omega}_m$, podemos dizer que no engrenamento

$$(\overline{\omega}_m + \dot\theta_m)\cdot\frac{R}{3} = \dot\Theta'\left(R + \varepsilon\,\mathrm{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m}{3}t\right)\right)$$ onde

$\dot\Theta'$ é a velocidade angular da coroa que pode ser separada na velocidade média $\left(\frac{\overline{\omega}_m}{3}\right)$ + a velocidade de vibração da coroa $\dot\theta'$

$$(\overline{\omega}_m+\dot\theta_m)\cdot\frac{R}{3} = \left(\frac{\overline{\omega}_m}{3}+\dot\theta'\right)\cdot\left[R+\varepsilon\,\mathrm{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)\right]$$ e

desprezando o produto $\dot\theta'\cdot\varepsilon$ por ser de 2ª ordem

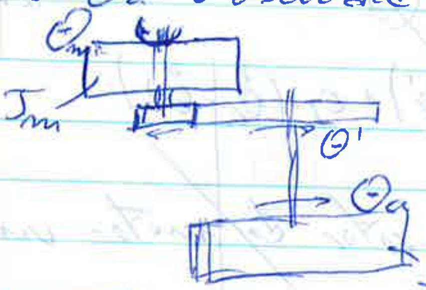
$$\dot\theta_m\cdot\frac{R}{3} = \dot\theta'\cdot R + \frac{\overline{\omega}_m}{3}\cdot\varepsilon\,\mathrm{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right) \therefore$$

(1,0) $$\boxed{\dot\theta' = \frac{\dot\theta_m}{3} - \frac{\overline{\omega}_m}{3}\cdot\frac{\varepsilon}{R}\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)} \therefore \theta' = \frac{\theta_m}{3} + \frac{\varepsilon}{R}\cos\left(\ldots\right)$$

Sendo $\dot\Theta_a$ a velocidade angular do agitador, suposto

$$\dot\Theta_a = \frac{\overline{\omega}_m}{3} + \dot\theta_a$$ onde $\frac{\overline{\omega}_m}{3}$ é a velocidade angular média

e $\dot\theta_a$ a velocidade angular de vibração torsional



$$\begin{cases} J_a\cdot\ddot\theta_a = k_t\cdot(\theta'-\theta_a) + c_t(\dot\theta'-\dot\theta_a) \\ J_m\cdot\ddot\theta_m = \frac{k_t}{3}(\theta_a-\theta') + \frac{c_t}{3}(\dot\theta_a-\dot\theta') \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_a\cdot\ddot\theta_a = k_t\cdot\left[\frac{\theta_m}{3}+\frac{\varepsilon}{R}\cdot\cos\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right) - \theta_a\right] + c_t\cdot\left(\frac{\dot\theta_m}{3} - \frac{\overline{\omega}_m}{3}\cdot\frac{\varepsilon}{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right) - \dot\theta_a\right) \\ J_m\cdot\ddot\theta_m = \frac{k_t}{3}\left[\theta_a - \frac{\theta_m}{3} - \frac{\varepsilon}{R}\cos\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)\right] + \frac{c_t}{3}\cdot\left[\dot\theta_a - \frac{\dot\theta_m}{3} + \frac{\overline{\omega}_m}{3}\frac{\varepsilon}{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)\right]\end{cases}$$

(1,5)

$$\begin{cases} J_a\cdot\ddot\theta_a + c_t\cdot\left(\dot\theta_a - \frac{\dot\theta_m}{3}\right) + k_t\left(\theta_a-\frac{\theta_m}{3}\right) = k_t\cdot\frac{\varepsilon}{R}\cdot\cos\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right) - c_t\cdot\frac{\overline{\omega}_m\varepsilon}{3R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right) \\ J_m\cdot\ddot\theta_m + \frac{c_t}{3}\cdot\left(\frac{\dot\theta_m}{3}-\dot\theta_a\right) + \frac{k_t}{3}\left(\frac{\theta_m}{3}-\theta_a\right) = -\frac{k_t}{3}\cdot\frac{\varepsilon}{R}\cdot\cos\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right) + \frac{c_t}{3}\cdot\frac{\overline{\omega}_m\varepsilon}{3R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)\end{cases}$$

Multiplicando a 2ª por 3 e
Somando membro a membro

$$J_a \cdot \ddot{\Theta}_a + 9 \cdot J_m \cdot \frac{\ddot{\Theta}_m}{3} = 0 \quad \boxed{\Theta_{a1} = 3 \cdot \Theta_{m1}} \text{ 1º modo}$$

Multiplicando a 1ª por $9J_m$ e a 2ª por $3J_a$ e
subtraindo membro a membro vem:

$$9J_m J_a\left(\ddot{\Theta}_a - \frac{\ddot{\Theta}_m}{3}\right) + c_f\cdot(J_m 9 + J_a)\cdot\left(\dot{\Theta}_a - \frac{\dot{\Theta}_m}{3}\right) + k_f\cdot(9J_m + J_a)\left(\Theta_a - \frac{\Theta_m}{3}\right) =$$

$$= (9J_m + J_a)\cdot\frac{\varepsilon}{R}\cdot\left[k_f\cdot\cos\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right) - c_f\frac{\overline{\omega}_m}{3}\cdot\text{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)\right]$$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{k_f(9J_m + J_a)}{9J_m \cdot J_a}} = 130{,}4 \text{ rad/s} \simeq 20{,}8 \text{ Hz}}$$

$$J_a \cdot \ddot{\Theta}_a + 9 \cdot J_m \cdot \frac{\ddot{\Theta}_m}{3} = 0 \;\therefore\; J_a \cdot \Theta_{a_2} = -3J_m \cdot \Theta_{m_2}$$

$$\boxed{\Theta_{m_2} = -\frac{20}{7{,}5} \cdot \Theta_{a_2}} \text{ 2º modo}$$

$$\xi_2 = \frac{c_f\cdot(9J_m + J_a)}{2\sqrt{k_f\cdot(9J_m + J_a)\cdot 9J_m J_a}} =$$

$$= 0{,}65$$

$$\frac{9J_m \cdot J_a}{9J_m + J_a}\cdot\ddot{\Theta} + c_f\cdot\dot{\Theta} + k_f\Theta = \frac{\varepsilon}{R}\cdot k_f\cdot\left[\cos\left(\frac{\overline{\omega}_m}{3}t\right) - \frac{c_f}{k_f}\frac{\overline{\omega}_m}{3}\,\text{sen}\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{R}\cdot k_f \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2\xi\overline{\omega}_m}{3\omega_2}\right)^2}\cdot\cos\left(\frac{\overline{\omega}_m t}{3} + \alpha\right)$$

$$\Theta_p = \frac{\frac{\varepsilon}{R}\cdot\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \simeq 1{,}28 \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \underline{1{,}28 \times 10^{-3} \text{ rad}} \Rightarrow \dot{\Theta}_p = 0{,}16 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\overline{\omega}_m}{3} \approx 126 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = \frac{\overline{\omega}_m}{3} = 20 \text{ Hz} \;\therefore\; r = \frac{20}{20{,}8} = 0{,}962$$

mas $$\Theta_p = \Theta_{a_2} - \frac{1}{3}\Theta_{m_2} = \Theta_{a_2} + \frac{20}{3\cdot 7{,}5}\cdot\Theta_{a_2} =$$

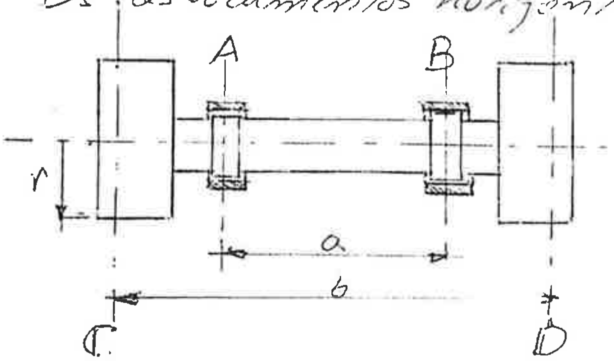
$$= 1{,}889\,\Theta_{a_2} \;\therefore$$

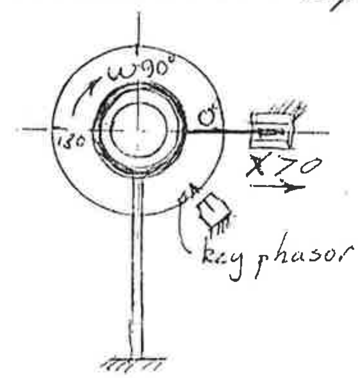
$$\boxed{\Theta_{a_2} = 0{,}68 \times 10^{-3} \text{ rad}}$$

Prova Substitutiva PMC-346 09/12/97

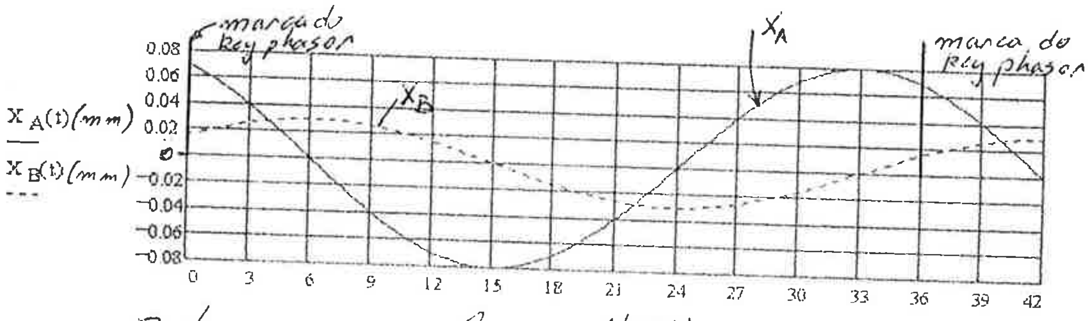
1ª Q O rotor rígido simétrico indicado na figura deve ser balanceado nos planos C e D em uma máquina de balancear de mancais flexíveis. Os deslocamentos horizontais dos mancais A e B,

$r = 100$ mm
$a = 200$ mm
$b = 300$ mm

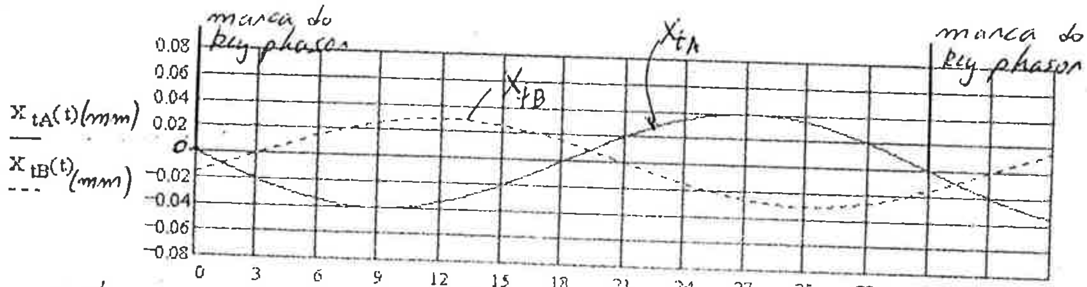




medidos para o rotor original e após terem sido adicionados 10 g no plano C na posição angular 0°, são mostrados abaixo.



Rotor original



Rotor com massa de teste

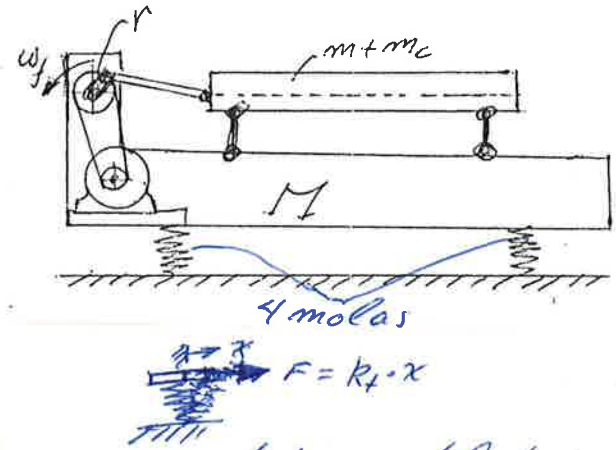
Pede-se:

a) Calcular as massas, e suas posições angulares, a serem adicionadas nos planos C e D para balancear o rotor original.

b) Se o rotor tem uma massa $M = 20$ kg e opera a uma rotação de 5000 r.p.m, pede-se qual a tolerância admissível para as massas de balanceamento de modo que o rotor satisfaça a classe ISO G 2,5.

2ªQ| A peneira vibratória representada esquematicamente na figura tem movimento essencialmente na direção horizontal, provocado por um sistema biela-manivela que gira a 30 rad/s.

Sabendo-se que o raio da manivela é $r = 2$ cm, que o comprimento da biela é muito maior que r, que a massa da peneira propriamente dita é $m = 500$ kg, que a massa da carga sobre a peneira pode variar de $0 \leq m_c \leq 1000$ kg, e que a massa da base e estrutura da peneira é $M = 7500$ kg, pede-se:

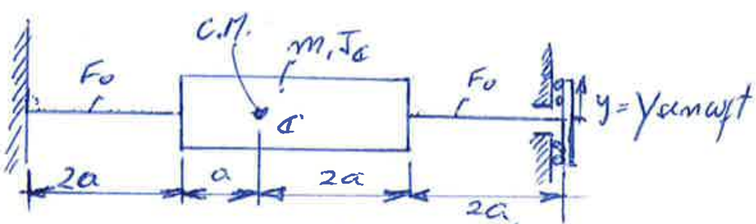


a) Escrever a equação diferencial do movimento horizontal da base da peneira para uma rigidez lateral k_t de cada uma das quatro molas de apoio.

b) Calcular a rigidez k_t para que o esforço horizontal total transmitido ao solo seja menor que 1000 N.

c) Você consideraria utilizar, além das molas, amortecedores na suspensão? Justificar.

3ªQ| A suspensão indicada na figura é formada de um corpo rígido, de massa "m" e momento de inércia $J_G = m \cdot a^2$ em relação ao centro de massa G; preso a dois fios pouco rígidos pretensionados com uma força F_0. Deseja-se estudar o comportamento da suspensão quando uma das extremidades do fio sofre um movimento senoidal $y = Y \operatorname{sen} \omega_f t$ conforme indicado na figura. Pede-se:



a) As equações diferenciais do movimento do corpo.

b) As frequências naturais de vibração do sistema.

c) Qual a frequência de excitação ω_f que, apesar de provocar a vibração do sistema, mantém o ponto G fixo.

Prov. Substitutiva

1ª Q) Desbalanceamento original

$\vec{\delta_A} = 0{,}08\,mm\ \underline{|330°} = 0{,}08\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)$

$\vec{\delta_B} = 0{,}03\,mm\ \underline{|60°} = 0{,}03\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$

Após massa de 10g na posição 0° (1,0)

$\vec{\delta_A'} = 0{,}04\,mm\ \underline{|270°} = -0{,}04\,\vec{j}$

$\vec{\delta_B'} = 0{,}03\,mm\ \underline{|120°} = 0{,}03\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$

$\vec{\delta_A'} - \vec{\delta_A} = -0{,}04\cdot\sqrt{3}\,\vec{i}$ $\therefore$ $\boxed{\begin{array}{l}\delta_{AC} = -0{,}004\sqrt{3} \\ \delta_{BC} = -0{,}003\end{array}}$ (0,5)

$\vec{\delta_B'} - \vec{\delta_B} = -0{,}03\,\vec{i}$

$\delta_{BD} = \delta_{AC} \qquad \delta_{AD} = \delta_{BC}$

$$\delta_{AC}\cdot m_C\vec{e}_C + \delta_{AD}\cdot m_D\vec{e}_D = -\vec{\delta_A}$$

$$\delta_{BC}\, m_C\vec{e}_C + \delta_{BD}\, m_D\vec{e}_D = -\vec{\delta_B}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}004\sqrt{3} & 0{,}003 \\ 0{,}003 & 0{,}004\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_C\vec{e}_C \\ m_D\vec{e}_D\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}08\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\ 0{,}03\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)\end{bmatrix}$$ (1,0)

$$m_C\vec{e}_C = \frac{0{,}08\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)\cdot 0{,}004\sqrt{3} - 0{,}03\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 0{,}003}{(0{,}004)^2\cdot 3 - (0{,}003)^2}$$

$$m_C\vec{e}_C = \frac{80\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)\cdot 4\sqrt{3} - 30\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 3}{48-9} = \frac{(480-45)\vec{i} - (160+45)\sqrt{3}\vec{j}}{39}$$

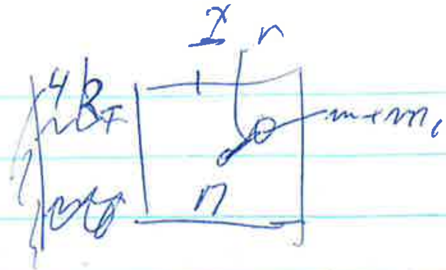
$$m_D\vec{e}_D = \frac{4\sqrt{3}\cdot 30\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) - 3\cdot 80\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)}{39} = \frac{-60\sqrt{3}\vec{i} + 300\vec{j}}{39}$$

$m_C\vec{e}_C = 11{,}41\,\vec{i} - 9{,}10\,\vec{j} = 14{,}59\,g\ \underline{|321{,}4°}$ colocar

$m_D\vec{e}_D = -2{,}66\,\vec{i} + 7{,}69\,\vec{j} = 8{,}14\,g\ \underline{|109{,}1°}$

b) $e\cdot\omega_{op} = 2{,}5 \Rightarrow e = \frac{2{,}5\cdot 60}{5000\cdot 2\pi} = 4{,}77\times10^{-3}\,mm$

2: Q)



$$(M+m+m_c)\ddot{x} + 4k_f\cdot x = (m+m_c)\cdot r\omega_f^2 \sin\omega_f t$$

$$x_p = X_p \sin(\omega_f t - \psi) \qquad X_p = \frac{(m+m_c) r\omega_f^2/4k_f}{\left|1-\left(\frac{\omega_f^2(M+m_c+m)}{4k_f}\right)\right|}$$

Force transmitted

$$F = 4k_f\cdot x_p \quad \therefore \quad F_{max} = 4k_f\cdot X_p = \frac{(m+m_c)\cdot r\cdot\omega_f^2}{\left|\left(1-\frac{\omega_f^2(M+m_c+m)}{4k_f}\right)\right|}$$

$$1000 \geq \frac{(m+m_c)\cdot r\cdot\omega_f^2}{\frac{\omega_f^2\cdot(M+m+m_c)}{4k_f}-1}$$

$$\frac{250}{k_f}\cdot\omega_f^2\cdot(M+m+m_c) - 1000 \geq (m+m_c)\cdot r\cdot\omega_f^2$$

$$k_f \leq \frac{250\omega_f^2\cdot(M+m+m_c)}{(m+m_c)\cdot r\omega_f^2+1000}$$ variable

variable

si $m_c = 0$

$$\boxed{k_f \leq 180000\ N/m}$$

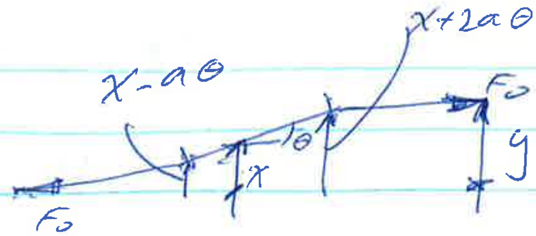
si $m_c = 1000\,kg$

$$\boxed{k_f \leq 72321\ N/m}$$

$$k_f = \frac{225000\cdot(8000+m_c)}{(500+m_c)\cdot 18+1000}$$

$$\frac{\partial k_f}{\partial m_c} = \frac{225000\left[(500+m_c)\cdot 18+1000\right] - 225000(8000+m_c)\cdot 18}{\left((500+m_c)\cdot 18+1000\right)^2} = 0$$

3ª Q)



$$\begin{cases} m\cdot\ddot{x} = -\dfrac{F_0(x-a\theta)}{2a} + \dfrac{F_0(y-x-2a\theta)}{2a} \\ J_c\cdot\ddot{\theta} = \dfrac{F_0\cdot(y-x-2a\theta)}{2a}\cdot 2a - F_0\cdot 2a\theta + \dfrac{F_0\cdot(x-a\theta)}{2a}\cdot a + \\ \quad - F_0\cdot a\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \dfrac{2F_0}{2a}\cdot x + \dfrac{F_0}{2}\cdot\theta = \dfrac{F_0}{2a}\cdot Y\sin\omega t \\ J_c\ddot{\theta} + \dfrac{F_0}{2}x + \dfrac{11}{2}F_0\cdot a\cdot\theta = F_0\cdot Y\sin\omega t \end{cases}$$

$J_c = ma^2$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \dfrac{2F_0}{2a}x + \dfrac{F_0}{2a}(a\theta) = \dfrac{F_0}{2a}\cdot Y\sin\omega t \\ m\cdot a\ddot{\theta} + \dfrac{F_0}{2a}x + 11\left(\dfrac{F_0}{2a}\right)(a\theta) = \dfrac{F_0}{a}\cdot Y\sin\omega t \end{cases}$$

$\dfrac{F_0}{2a} = k$

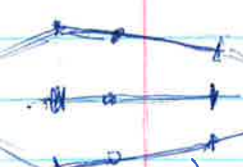
$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & k \\ k & 11k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$m^2\omega^4 - 13mk\omega^2 + 21k^2 = 0$

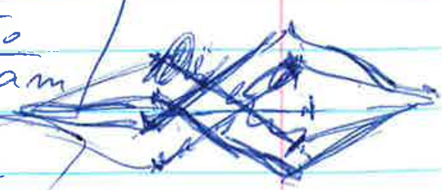
$\omega_{1,2}^2 = \dfrac{13 \mp 9{,}220}{2}\cdot\left(\dfrac{k}{m}\right)$

$\boxed{\omega_1^2 = 1{,}89\,\dfrac{F_0}{2am}}$

$\boxed{\omega_2^2 = 11{,}1\cdot\dfrac{F_0}{2am}}$



$\boxed{a\theta_1 = -0{,}1X_1}$



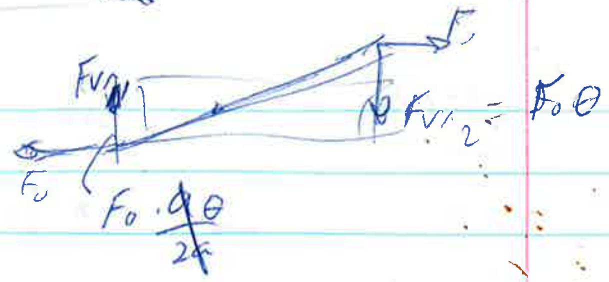
$\boxed{a\theta_2 = 1{,}1X_2}$

c) Si $x = 0$ e $\ddot{x} = 0$

$\dfrac{F_0}{2a}(a\theta) = \dfrac{F_0}{2a}Y\sin\omega t \quad \therefore \quad a\ddot{\theta} = -Y\omega^2\sin\omega t$

$m\cdot a\ddot{\theta} + 11\cdot\left(\dfrac{F_0}{2a}\right)\cdot Y\sin\omega t = \dfrac{2F_0}{2a}\cdot Y\sin\omega t$

$$F_{cm} = F_0 \cdot \left(\frac{x}{2a}\right)$$



TERCEIRA PROVA PME - 2352 03/12/03

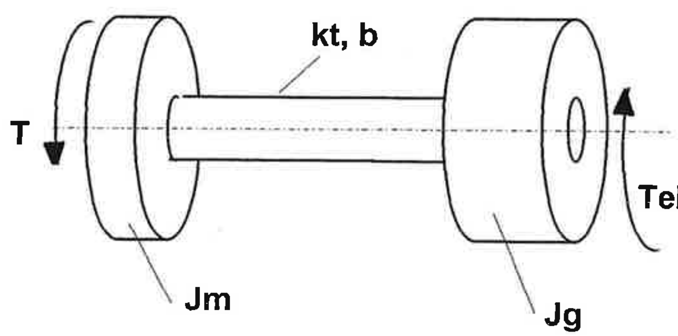
1ª Questão:

O sistema indicado na figura representa um modelo físico dinâmico de um motor de combustão interna acoplado elásticamente a um gerador elétrico que opera a1800 rpm. Sabendo-se que o torque indicado do motor, correspondente ao efeito da pressão de combustão sobre os pistões reduzido ao eixo do virabrequim, menos o torque de atrito do motor é dado por

$\mathbf{T = T_{el} \bullet [1 + 0{,}1 \bullet sen(\Omega \bullet t) + 2{,}2 \bullet sen(3 \bullet \Omega \bullet t - 0{,}14) + 0{,}9 \bullet sen(6 \bullet \Omega \bullet t - 0{,}66) + 0{,}3 \bullet sen(9 \bullet \Omega \bullet t - 1{,}05) + 0{,}25 \bullet sen(12 \bullet \Omega \bullet t - 1{,}36) + 0{,}18 \bullet sen(15 \bullet \Omega \bullet t - 1{,}50)]}$,

onde $\mathbf{\Omega = 2 \bullet \pi \bullet 1800/60}$ **rad/s** e T_{el} é o torque médio no eixo do virabrequim, o qual é igual ao torque no gerador, que os momentos de inércia do motor e do gerador são respectivamente $\mathbf{J_m}$ e $\mathbf{J_g}$, e supondo-se conhecida a rigidez torcional $\mathbf{k_t}$ do acoplamento elástico, feito de um material com coeficiente de histerese **b**, pede-se:

a) Determinar as equações diferenciais dos movimentos angulares dos eixos do motor e do gerador.
b) Calcular as freqüências fundamentais de vibração torcional do sistema e os correspondentes modos de vibrar.
c) Sendo $\mathbf{T_{el} = 1000 N \bullet m}$, $\mathbf{J_g = 30 kg \bullet m^2}$, $\mathbf{J_m = 10 kg \bullet m^2}$ e **b= 0,2**, determinar a máxima rigidez do acoplamento $\mathbf{k_t}$, de modo que a aceleração angular da vibração torcional do rotor do gerador não ultrapasse $\mathbf{6 rad/s^2}$.



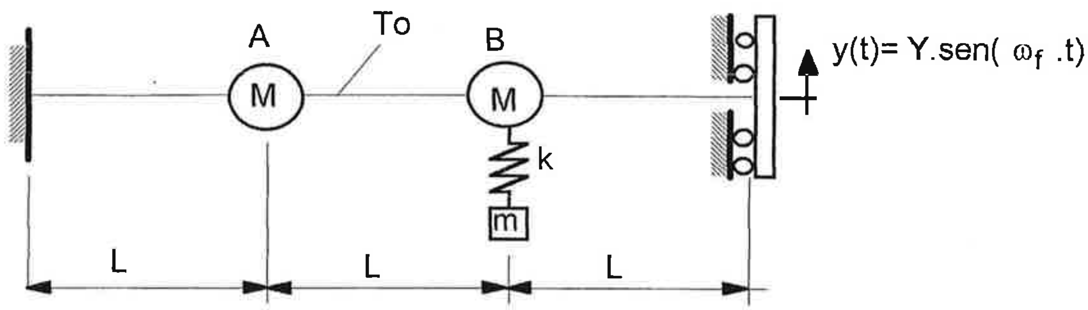
2ª Questão:

O sistema representado na figura, originalmente formado de duas massas **M** presas em um fio pré-tensionado com **To**, está vibrando em regime permanente por ação do deslocamento $\mathbf{y(t) = Y \bullet sen(\omega_f \bullet t)}$ dado. Posteriormente, com o objetivo de eliminar o movimento vertical das massas **A** e **B**, adicionou-se um absorvedor dinâmico de vibração de massa **m** à massa **B**. Pede-se:

a) Determinar as equações diferenciais dos movimentos verticais das massas **A** e **B**, no sistema original.
b) Calcular as freqüências fundamentais e os correspondentes modos de vibrar do sistema original.
c) Determinar as amplitudes de vibração vertical das massas **A** e **B** no sistema original, quando $\mathbf{\omega_f^2 = 1{,}5 \bullet To/(M \bullet L)}$.
d) Calcular o valor da rigidez **k** do absorvedor dinâmico de vibrações de massa **m= M/5** , para eliminação completa das vibrações das massas **A** e **B**, quando **y(t)** é mantido como indicado na figura, com a freqüência ω_f definida no item

anterior. Nesta condição, qual a amplitude de vibração da massa **m** do absorvedor?

e) Se o absorvedor fosse instalado na massa **A** ao invés da **B**, seria possível eliminar a vibração de ambas as massas?



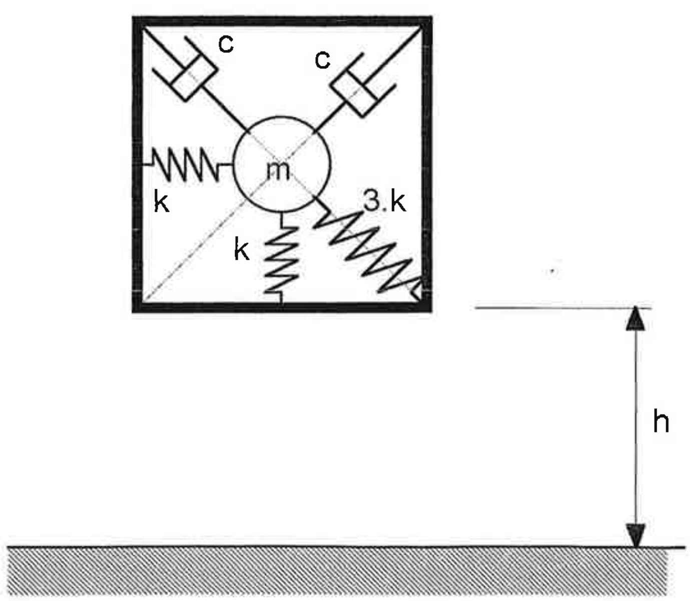
3ª Questão:

A suspensão representada na figura deve proteger o equipamento de massa **m** de quedas. Sabendo-se que a massa da embalagem é desprezível quando comparada a **m** e que as deformações das molas pelo peso próprio de **m** é muito menor que a altura de queda **h**, pede-se:

a) determinar as equações diferenciais do movimento da massa **m** em relação à embalagem.

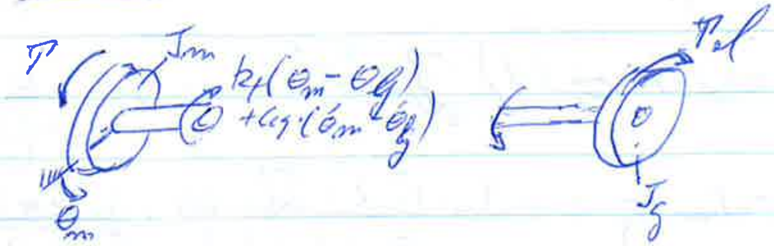
b) calcular as freqüências fundamentais de vibração da massa **m** em relação à embalagem, e os correspondentes modos de vibrar.

c) determinar a espressão do movimento vertical da massa **m**, após uma queda da embalagem de uma altura **h** em um pavimento indeformável, sendo **c= 2•√k•m**.



Solução 3ª Prova PME-2352 03/12/03

1ª Q)



Considerando somente a variação dinâmica do Torque motor

$$\begin{array}{l} J_g \times \\ J_m \times \end{array} \left| \begin{array}{l} J_m \cdot \ddot\theta_m + c_{eq}(\dot\theta_m - \dot\theta_g) + k_t(\theta_m - \theta_g) = T_{el} \cdot \sum_{i=1,3..}^{15} a_i \operatorname{sen}(i\Omega t - \theta_i) \\ J_g \ddot\theta_g - c_{eq}(\dot\theta_m - \dot\theta_g) - k_t(\theta_m - \theta_g) = 0 \end{array} \right.$$

1,5

$$\left(\begin{array}{l} J_m \cdot J_g(\ddot\theta_m - \ddot\theta_g) + (J_m + J_g) c_{eq}(\dot\theta_m - \dot\theta_g) + (J_m + J_g) \cdot k_t(\theta_m - \theta_g) = J_g \cdot T_{el} \cdot \sum_{i=1,3..}^{15} a_i \operatorname{sen}(i\Omega t - \theta_i) \\ J_m \ddot\theta_m + J_g \ddot\theta_g = T_{el} \cdot \sum_{i=1,3}^{15} (\quad) \end{array} \right.$$

Frequências fundamentais e modos de vibração:

$$\begin{cases} J_m J_g \ddot\phi + (J_m + J_g) c_{eq} \cdot \dot\phi + k_t(J_m + J_g)\phi = 0 \\ J_m \ddot\theta_m + J_g \ddot\theta_g = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = 0} \text{ e } \left(\begin{array}{l} \theta_m = A_1 t + B_1 = \theta_g \\ \ddot\theta_m = \ddot\theta_g = 0 \end{array} \right) \text{ 1º modo}$$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{k_t(J_m + J_g)}{J_m J_g}}}$$

+0,5

$$\cancel{\zeta = \frac{c_{eq}(J_m + J_g)}{2\sqrt{\frac{k_t(J_m + J_g)}{J_m \cdot J_g}}} = \frac{b \cdot k_t}{}}$$

$$c_{eq} = \frac{b \cdot k_t}{\omega_2} \qquad \left[\zeta = \frac{c_{eq} \cdot (J_m + J_g)}{2\sqrt{k_t(J_m + J_g) \cdot J_m \cdot J_g}} = \frac{b}{2} \right]$$

$$J_m \cdot \ddot\theta_m + J_g \ddot\theta_g = 0 \quad \therefore J_g \Theta_g = -J_m \Theta_m$$

$$\left. \Theta_g = -\frac{J_m}{J_g} \cdot \Theta_m \right) \text{ 2º modo de vibrar.}$$

0,5

Soluções particulares.

$$\left| J_m \cdot J_g \cdot \ddot\phi + (J_m + J_g) \cdot c_{eq} \cdot (\dot\phi) + (J_m + J_g) \cdot k_t \cdot \phi = J_g \cdot T_{el} \cdot a_i \cdot \operatorname{sen}(i\Omega t + \theta_i) \right.$$

$$\therefore \quad \phi_p = \Phi_{p_i} \cdot sen(i\Omega t - \alpha_i - \varphi_i) \quad com \quad \Phi_{p_i} = \frac{\frac{T_{el} \cdot a_i \cdot J_g}{k_t \cdot (J_g + J_m)}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}}$$

$$\ddot{\phi}_p(t) = \ddot{\theta}_m(t) - \ddot{\theta}_g(t) = -\phi_p \cdot i^2\Omega^2 \qquad tg\,\varphi_i = \frac{b}{1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$J_m \ddot{\theta}_m - J_m \ddot{\theta}_g = -J_m \cdot \frac{i^2\Omega^2 \cdot T_{el} \cdot a_i}{k_t \cdot (J_m + J_g)} \cdot \frac{J_g \, sen(i\Omega t - \alpha_i - \varphi_i)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}}$$

$$J_m \ddot{\theta}_m + J_g \ddot{\theta}_g = \frac{T_{el} \cdot a_i \cdot \cancel{k_t (J_m + J_g)} \, sen(i\Omega t - \alpha_i)}{\cancel{k_t (J_m + J_g)} \, \cancel{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}}$$

$$(J_m + J_g)\, \ddot{\theta}_g = \frac{T_{el} \cdot a_i}{k_t (J_m + J_g)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}} \times \left(J_m \, i^2\Omega^2 \right)$$

$$\times \left(k_t (J_m + J_g)\, sen(i\Omega t - \alpha_i) + J_m \cdot J_g \cdot i^2 \Omega^2 \cdot sen(i\Omega t - \alpha_i - \varphi_i) \right)$$

$$\ddot{\theta}_g = \frac{T_{el} \cdot a_i}{\cancel{k_t} \cdot (J_m + J_g)^2} \cdot \frac{\cancel{k_t \cdot (J_m + J_g)}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}} \cdot \left(sen(i\Omega t - \alpha_i) + \frac{i^2\Omega^2}{\omega_2^2} \cdot sen(i\Omega t - \alpha_i - \varphi_i) \right) =$$

$$= \frac{T_{el} \cdot a_i / (J_m + J_g)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}} \left[\left(1 + \cos\varphi_i \cdot \frac{i^2\Omega^2}{\omega_2^2}\right) sen(i\Omega t - \alpha_i) - \frac{i^2\Omega^2}{\omega_2^2} \, sen\,\varphi_i \cdot \cos(i\Omega t - \alpha_i) \right]$$

$$\ddot{\theta}_g \Big|_{máx} = \frac{T_{el} \cdot a_i / (J_m + J_g)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}} \cdot \sqrt{1 + \cos^2\varphi_i \left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^4 + 2\cos\varphi_i \left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^4 sen^2\varphi_i}$$

$$\ddot{\theta}_g \Big|_{máx} = \frac{T_{el} \cdot a_i / (J_m + J_g)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^4 + 2 \cdot \frac{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}} \left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$\ddot{\theta}_{g_i} \Big|_{máx} = \frac{T_{el} \cdot a_i}{(J_m + J_g)}$$

Se $b^2 << 1$

$$\ddot{\theta}_{g_i} \Big|_{máx} = \frac{T_{el} \cdot a_i}{(J_m + J_g) \cdot \sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2 + b^2}} \cdot \left(1 + \left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)$$

$\Omega = 198{,}5$ rad/s

$\frac{i\Omega}{\omega_2} = r_i$

$T_{el} = 1000$ Nm

$J_m + J_g = 40$ kg m²

$2200 \quad \left(1 + \left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)$

$$(J_m+J_g)\ddot{\theta}_g = T_{el}\cdot a_i\cdot\left[\operatorname{sen}(i\Omega t-\alpha_i)+\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\cdot\frac{\operatorname{sen}(i\Omega t-\alpha_i-\psi_i)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}}\right] =$$

$$= T_{el}\,a_i\cdot\left[\left(1+\frac{\cos\psi_i\cdot\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}}\right)\cdot\operatorname{sen}(i\Omega t-\alpha_i) - \frac{\operatorname{sen}\psi_i\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}}\cdot\cos(i\Omega t-\alpha_i)\right]$$

$$\left.\ddot{\theta}_{g_i}\right|_{m\acute{a}x} = \frac{T_{el}\,a_i}{(J_m+J_g)}\cdot\sqrt{1+\frac{\cos^2\psi_i\cdot\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^4}{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\psi_i\cdot\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^4}{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}+2\frac{\cos\psi_i\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}}}$$

$$\left.\ddot{\theta}_{g_i}\right|_{m\acute{a}x} = \frac{T_{el}\cdot a_i}{(J_m+J_g)}\cdot\sqrt{1+\frac{\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^4}{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}+2\cdot\frac{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}} =$$

$$= \frac{T_{el}\cdot a_i}{(J_m+J_g)}\frac{\sqrt{1+\cancel{\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^4}-\cancel{2\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2}+b^2+\cancel{\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^4}+\cancel{2\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2}-\cancel{2\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^4}}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}} =$$

$$\left.\ddot{\theta}_{g_i}\right|_{m\acute{a}x} = \frac{T_{el}\cdot a_i}{(J_m+J_g)}\frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{i\Omega}{\omega_2}\right)^2\right)^2+b^2}}$$

sendo $\frac{i\Omega}{\omega_2} = r_i$

$$\left.\ddot{\theta}_{g_i}\right|_{m\acute{a}x} = \frac{T_{el}\,a_i}{(J_m+J_g)}\cdot\frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{(1-r_i^2)^2+b^2}}$$

$\left.\ddot{\theta}_{g_i}\right|_{m\acute{a}x} = 6\ rad/s^2$

$T_{el} = 1000\ Nm$

$a_3 = 2{,}2$

$b^2 = 0{,}04$

$(J_m+J_g) = 40\ kg\cdot m^2$

$$6 = \frac{2200}{40}\cdot\frac{1{,}02}{\sqrt{(1-r_i^2)^2+b^2}} \therefore$$

$\sqrt{(r_i^2-1)^2+b^2} = 9{,}35 \therefore \boxed{r_3 = 3{,}22}$ valor mínimo de r_3

1,0

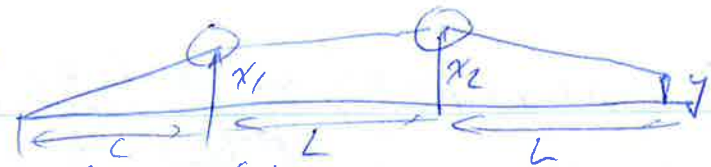
p/ $i=1 \rightarrow a_1 = 0{,}1$

$$6 = \frac{100}{40}\cdot\frac{1{,}02}{\sqrt{(r_1^2-1)^2+b^2}} \therefore (r_1^2-1)^2+b^2 = 0{,}425$$

$\boxed{r_1 = 1{,}173}$ valor mínimo de r_1 p/ $r_1 > 1$

outra solução possível seria $r_1 < 0{,}616$ mas que seria incompatível com $r_3 = 3{,}6$ ∴

2ª Q)



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -\dfrac{T_0 (x_1)}{L} + \dfrac{T_0}{L}(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -\dfrac{T_0 (x_2 - x_1)}{L} - \dfrac{T_0 (x_2 - y)}{L} \end{cases}$$

$$m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{T_0}{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{T_0}{L}\cdot y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot \operatorname{sen}(\omega_f t)$$ (1,5)

Frequências fundamentais e modos de vibrar

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda)^2 = 1 \therefore \lambda = \frac{mL\omega^2}{T_0} = \begin{cases} = 1 \\ = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{T_0}{mL}} \Rightarrow \boxed{A_{11} = A_{21}}$$ (0,5)

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3T_0}{mL}} \Rightarrow \boxed{A_{12} = -A_{22}}$$

sendo $\omega_f^2 = 1{,}5\cdot \dfrac{T_0}{mL}$ e $x_1 = X_1 \operatorname{sen}(\omega_f t)$, $x_2 = X_2 \operatorname{sen}(\omega_f t)$

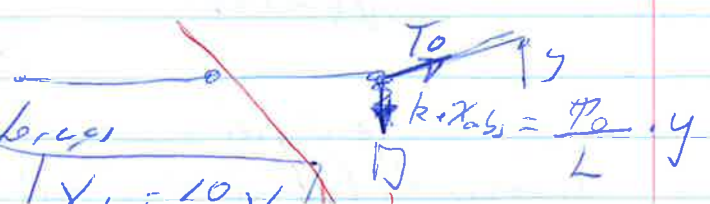
$$\begin{cases} -m\omega_f^2 X_1 + \dfrac{2T_0}{L} X_1 - \dfrac{T_0}{L} X_2 = 0 \\ -\dfrac{T_0}{L} X_1 + \dfrac{2T_0}{2} X_2 - m\omega_f^2 X_2 = \dfrac{T_0}{L}\cdot y \end{cases}$$ (0,5)

$$X_2 = (2 - 1{,}5)\cdot X_1 \therefore \boxed{X_2 = 0{,}5 X_1}$$

$$(-2 + 2 - 1{,}5)X_2 = y \therefore \boxed{X_2 = \frac{-2}{3} y}$$

Sendo $\omega_f = \sqrt{\dfrac{3T_0}{2mL}}$, $\omega_{abs} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega_f \therefore \dfrac{k}{M/5} = \dfrac{3T_0}{2M\cdot L}$

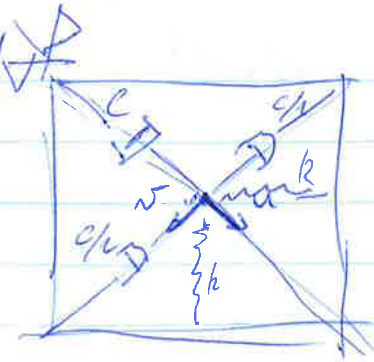
$$\boxed{k = \frac{3}{10}\frac{T_0}{L}}$$



para equilibrar as forças

$k\cdot x_{abs} = \dfrac{T_0}{L}\cdot y \operatorname{sen}(\omega_f t) \therefore$ $X_1 = 10\, y$ …

3ª Q



u e v desacoplam o sistema por simetria

$$m\cdot\ddot{u} = -3ku - c\dot{u} - 2k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot u\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$m\ddot{v} = -2k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot v\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{c}{2}\dot{v}$$

1,5

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + 4ku = 0 \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{4k}{m};\ \boxed{\zeta_2 = \frac{c}{2\sqrt{4k\cdot m}}} = \boxed{0,5}$$
$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0 \rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m}\quad \boxed{\zeta_1 = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 1}$$

(1,0)

$$\therefore u = \left[A_1 \operatorname{sen}(2\omega_1\sqrt{1-0,25}\cdot t) + B_1\cos(2\omega_1\sqrt{1-0,25}\cdot t)\right]\cdot e^{-\omega_1 t}$$

(1,0)

$$v = (A_2 + B_2 t)\cdot e^{-\omega_1 t}$$

C.I. p/ $t=0$ $\begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$

$$\dot{u}(0)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \dot{v}(0)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2gh}$$
$$\dot{u}(0)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \dot{v}(0)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\dot{u}(0) = +\dot{v}(0) \quad \therefore \quad \dot{u}(0)\sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{gh}$$

$$\dot{u}(0) = \sqrt{gh} = \dot{v}(0)$$

$$\dot{u}(t) = \left[A_1\cdot 2\omega_1\cdot\sqrt{0.75}\cdot\cos(2\omega_1\sqrt{0,75}\cdot t) - B_1 2\omega_1\sqrt{0,75}\cdot\operatorname{sen}(2\omega_1\sqrt{0,75}\cdot t)\right]$$

$$\sqrt{gh} = A_1\cdot 2\omega_1\cdot\sqrt{0,75} \quad \therefore \quad A_1 = \frac{\sqrt{gh}}{2\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\sqrt{\frac{gh\cdot m}{3k}}}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$
$$v(0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

$$\dot{v}(t) = B_2\cdot e^{-\omega_1 t} - \omega_1\cdot B_2 t\cdot e^{-\omega_1 t}$$

$$\dot{v}(0) = \boxed{\sqrt{gh} = B_2}$$

$$u(t) = e^{-\omega_1 t}\cdot\sqrt{\frac{g h m}{3k}}\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) \quad y(t) = u(t)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + v(t)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{gh}}{\omega_1\sqrt{3}} \cdot e^{-\omega_1 t} \cdot \left(\sin(\sqrt{3}\,\omega_1 t) + \sqrt{3}\,\omega_1 t\right)}$$