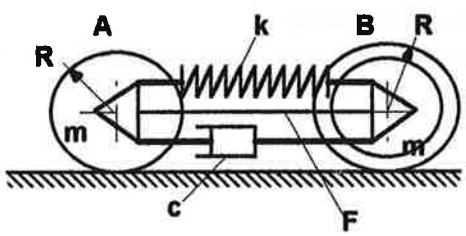
TERCEIRA PROVA PME - 2352 11/12/02

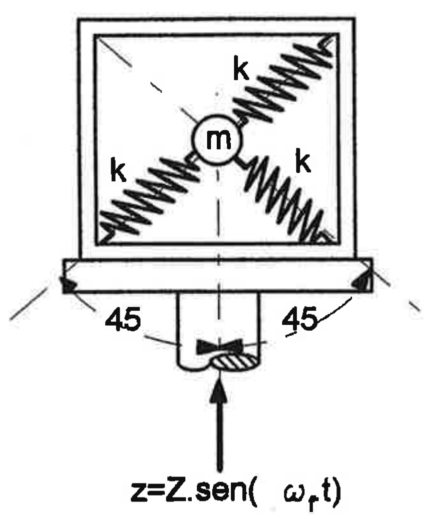
1ª Questão: O brinquedo esquematizado na figura é formado de dois cilindros **A** e **B** de massa **m** e raio **R**, que rolam sem escorregar sobre um plano horizontal. O cilindro **A** é homogêneo e o cilindro **B** tem sua massa concentrada na periferia, de modo que os momentos de inércia em relação aos respectivos centros são: $\mathbf{J_A=m.R^2/2}$ e $\mathbf{J_B= m.R^2}$. Os centros dos cilindros estão ligados por uma mola de rigidez **k** e um amortecedor de constante de amortecimento **c**. Sabendo-se que inicialmente os dois cilindros estão em repouso e que a mola encontra-se comprimida de Δ**x** por efeito de um fio **F**, que é cortado no instante **t= 0**, pede-se:

a) escrever as equações diferenciais dos movimentos horizontais dos centros dos cilindros após o fio ter sido cortado;
b) determinar as freqüências naturais e os modos de vibrar do sistema;
c) calcular a evolução do sistema no tempo, após o fio **F** ter sido cortado.



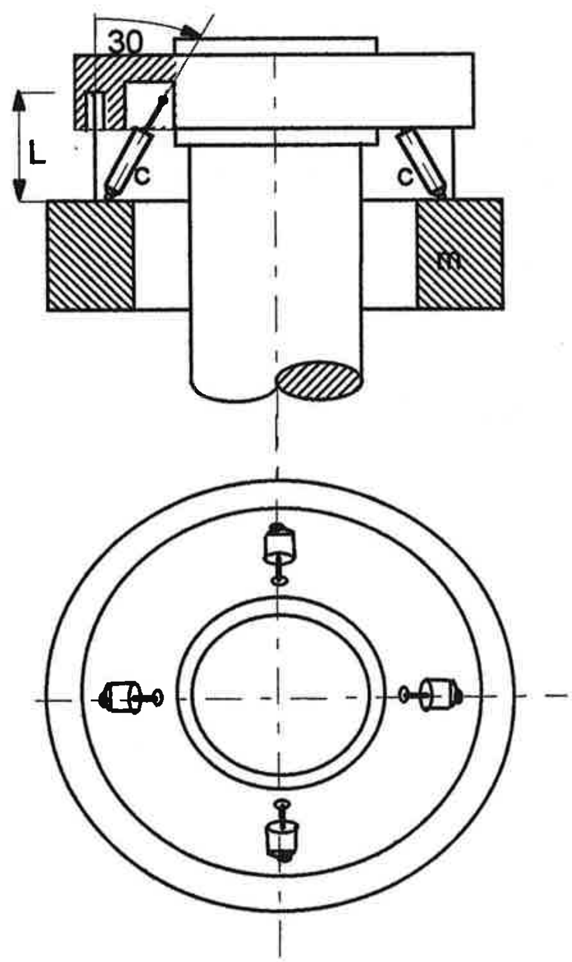
2ª Questão: A suspensão indicada na figura deve proteger a massa **m** de vibrações impostas pelo ambiente. Supondo-se que a embalagem está sendo submetida a uma vibração vertical de amplitude **Z** e freqüência ω_f, pede-se:

a) deduzir as equações diferenciais do movimento absoluto da massa **m**;
b) determinar as freqüências naturais e os modos fundamentais de vibrar do sistema;
c) calcular a amplitude de vibração horizontal da massa **m** em regime permanente, provocada pela vibração vertical da embalagem.



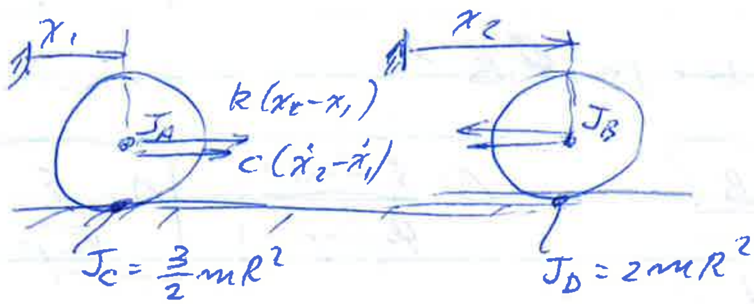
3ª Questão: Chaminés elevadas e esbeltas podem apresentar oscilações laterais auto-excitadas pelo vento. O esquema da figura representa a extremidade superior de uma chaminé que oscilava com uma amplitude **a= 20cm** a uma freqüência **f=0,5Hz**, e na qual se instalou um anel suspenso por 4 cabos de aço, para absorver essa oscilação. Estimou-se que a rigidez lateral da chaminé para uma força aplicada na sua extremidade é **k_{eq}= 500N/mm** e que o coeficiente de amortecimento estrutural da chaminé para a referida oscilação lateral é **b_h= 0,05**. Sabendo-se que a massa do anel suspenso é **m= 1000kg** e que são utilizados 4 amortecedores de constante de amortecimento viscoso **c= 10N.s/mm**, instalados conforme indicado na figura , pede-se:

a) deduzir as equações diferenciais dos movimentos da extremidade da chaminé e do anel absorvedor no plano vertical ortogonal à direção do vento;
b) determinar as freqüências naturais e os modos fundamentais de vibrar do sistema não amortecido;
c) calcular o comprimento **L** dos cabos de aço que mantém o anel suspenso para que este funcione bem como absorvedor de oscilações.
d) Explique a necessidade de se utilizar amortecedores na suspensão do anel absorvedor.



3ª Prova PME 2352 11/12/02

1ª Q



TMA em relação à ~~B~~ C e D vem:

$$\begin{cases} J_C \cdot \ddot{\theta}_1 = R\cdot[k(x_2-x_1)+c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)]; & R\theta_1 = x_1 \\ J_C\cdot\ddot{\theta}_2 = -R\cdot[k(x_2-x_1)+c(\dot{x}_2-\dot{x}_1)]; & R\theta_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 2\times \\ \frac{3}{2}\times \end{matrix} \begin{cases} \frac{3}{2}m\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + k(x_1-x_2) = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 - c(\dot{x}_1-\dot{x}_2) - k(x_1-x_2) = 0 \end{cases}$$

1,5

$$\begin{cases} \cancel{3}m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) + \frac{7}{2\cdot3}c(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + \frac{7}{2\cdot3}k(x_1-x_2)=0 \\ \frac{3}{2}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(\ddot{y}_1) + \frac{7}{6}c(\dot{y}_1) + \frac{7}{6}ky_1 = 0 \\ 3\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 0 \end{cases}$$

$y_1 = x_1 - x_2$

$y_2 = 4x_2 + 3x_1$

0,5

$\boxed{\omega_1 = 0}$ $\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{7k}{6m}}}$ $\boxed{\xi_2 = \frac{\frac{7}{6}c}{2\cdot\sqrt{\frac{7}{6}k\cdot m}}}$

$x_2 = \frac{y_2 - 3y_1}{7}$

$x_1 = \frac{y_2 + 4y_1}{7}$

$$\begin{cases} y_1 = [A\,\mathrm{sen}(\omega_2\sqrt{1-\xi_2^2}\,t) + B\cos(\omega_2\sqrt{1-\xi_2^2}\,t)]\,e^{-\xi_2\omega_2 t} \\ y_2 = C + D\cdot t \end{cases}$$

C.I. $\begin{cases} \dot{y}_1(0) = 0 \\ y_1(0) = \Delta x \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$

$$\dot{y}_1 = [A\omega_d \cdot \cos(\omega_d t) - B\omega_d \,\text{sen}(\omega_d t)]\, e^{-\xi\omega t} - \xi\omega \cdot e^{-\xi\omega t} \cdot [A\,\text{sen}(\omega_d t) + B\cos(\omega_d t)]$$

$$\dot{y}_1(0) = 0 = A\omega_d - \xi\omega \cdot B$$

$$y_1(0) = \boxed{\Delta x = B} \qquad A = \frac{\xi\omega \cdot \Delta x}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \boxed{A = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \Delta x}$$

$$y_1(t) = e^{-\xi\omega t} \cdot \Delta x\left[\text{sen}(\omega_d t) \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \cos(\omega_d t)\right] =$$

$$\boxed{y_1(t) = e^{-\xi\omega t} \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \cos(\omega_d t - \phi)} \qquad tg\,\phi = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

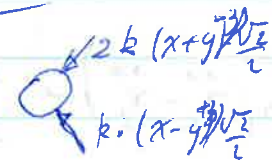
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{7k}{6m}}}$$

$$\boxed{y_2(t) = 0}$$

$$\boxed{x_1(t) = \frac{4y_1(t)}{7}} \qquad \boxed{\xi = \sqrt{\frac{7}{24}} \cdot \frac{c}{\sqrt{km}}}$$

$$\boxed{x_2(t) = \frac{-3y_1(t)}{7}}$$

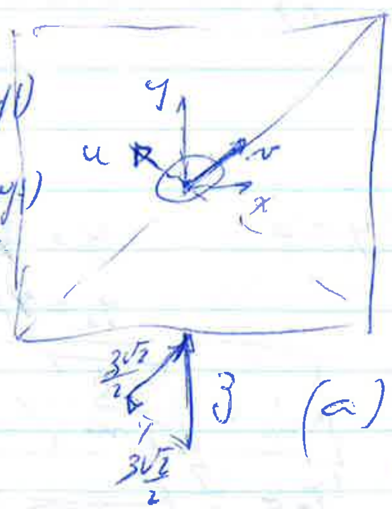
1,0



$$m\ddot{x} = -k(x+\dot{y}) \qquad m\ddot{y} = -k(x+y)$$

2ª Q

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \frac{3}{2}kx + \frac{k}{2}y = \frac{k}{2}z_1\,\text{sen}(\omega_f t) \\ m\ddot{y} + \frac{k}{2}x - \frac{3k}{2}y = \frac{3k}{2}z_1\,\text{sen}(\omega_f t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} m\ddot{v} = -2k\left(v - z\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ m\ddot{u} = -k\left(u - z\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

(a) $$\begin{cases} m\ddot{u} + ku = k \cdot Z_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sen}(\omega_f t) \\ m\ddot{v} + 2kv = kZ_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\omega_f t) \end{cases}$$

(b) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ → vibração na direção de u

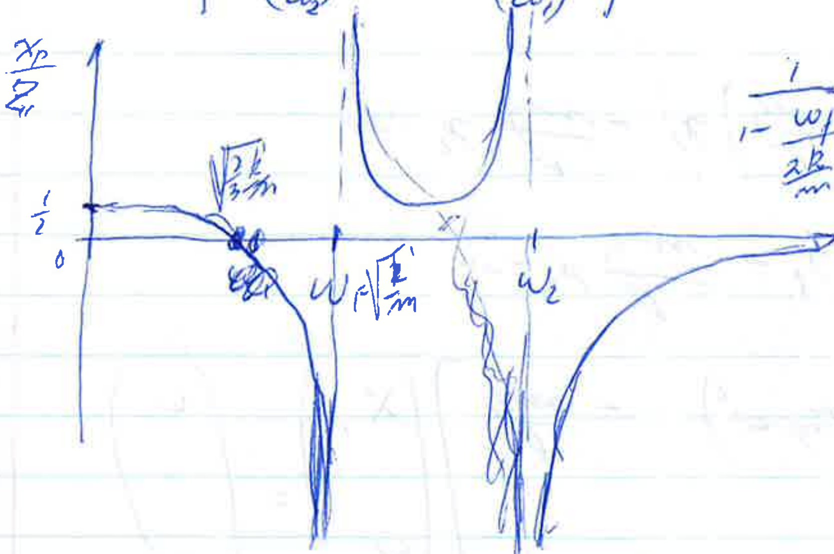
$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ → vibração na direção de v

$$u_p = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot Z_1}{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_1}\right)^2}\,\text{sen}(\omega_f t) \qquad v_p = \frac{\sqrt{2} \cdot Z_1}{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_2}\right)^2}\,\text{sen}(\omega_f t)$$

$$\cancel{x_p = \left(\frac{Z}{2} \sin(\omega_f t)\right)}$$

$$x_p = \left(\frac{Z}{1-\left(\frac{\omega_f}{\omega_2}\right)^2} - \frac{Z/2}{1-\left(\frac{\omega_f}{\omega_1}\right)^2} \right) \cdot \sin(\omega_f t)$$

1.0

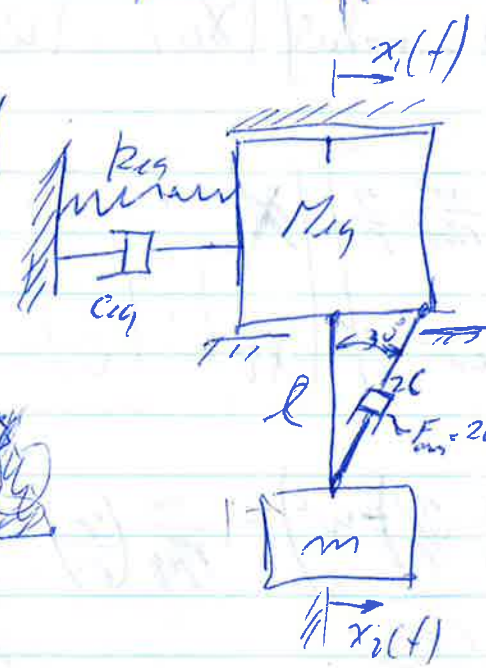


$$\frac{1}{1-\frac{\omega_f^2}{2k/m}} = \frac{1/2}{1-\frac{\omega_f^2}{k/m}} \therefore 2\left(1-\frac{2\omega_f^2}{2k/m}\right) = 1-\frac{\omega_f^2}{2k/m}$$

$$\frac{4k}{m} - 4\omega_f^2 = \frac{2k}{m} - \omega_f^2$$

$$2\frac{k}{m} = 3\omega_f^2 \therefore \omega_{f0}^2 = \sqrt{\frac{2k}{m \cdot 3}}$$

3-Q



$-\frac{k}{2}(x-q)^{+3}$

$+\frac{k}{2}(x-q)^{+3}$

$$k_{eq} = 5 \times 10^5 \ N/m$$

$$\sqrt{\frac{k_{eq}}{M_{eq}}} = 2\pi f = \boxed{\omega_0 = \pi \ rad/s}$$

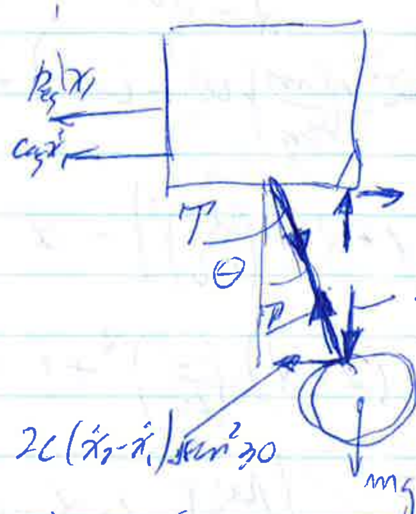
$$M_{eq} = 50661 \ kg$$

$$c_{eq} = \frac{D_h \cdot k_{eq}}{\omega_0} = 7.96 \times 10^3 \ Ns/m$$

$$M_{eq} \cdot \ddot{x}_1 = -k_{eq} \cdot x_1 - c_{eq} \cdot \dot{x}_1 + mg\frac{(x_2 - x_1)}{l} + \frac{c}{2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

5

1.0



$$T \approx mg + \frac{3}{2}c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$\boxed{1.5}$

$$\begin{cases} M_{eq}\cdot\ddot{x}_1 + \left(C_{eq}+\frac{c}{2}\right)\dot{x}_1 - \frac{c}{2}\dot{x}_2 + \left(k_{eq}+\frac{g\cdot m}{\ell}\right)x_1 - \frac{mg}{\ell}x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - \frac{c}{2}\dot{x}_1 + \frac{c}{2}\dot{x}_2 - \frac{mg}{\ell}x_1 + \frac{mg}{\ell}x_2 = 0 \end{cases}$$

P/ $C = C_{eq} = 0$

$$\begin{cases} M_{eq}\ddot{x}_1 + \left(k_{eq}+\frac{mg}{\ell}\right)x_1 - \frac{mg}{\ell}x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - \left(\frac{mg}{\ell}\right)x_1 + \frac{mg}{\ell}x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \left(k_{eq}+\frac{mg}{\ell} - M_{eq}\cdot\omega^2\right) & -\frac{mg}{\ell} \\ -\frac{mg}{\ell} & \frac{mg}{\ell} - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1,0

$$\begin{bmatrix} \frac{k_{eq}}{M_{eq}} + \frac{m}{M_{eq}}\frac{g}{\ell} - \omega^2 & -\frac{m}{M_{eq}}\cdot\frac{g}{\ell} \\ -\frac{g}{\ell} & \frac{g}{\ell} - \omega^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)\cdot\left(\frac{k_{eq}}{M_{eq}} + \frac{m}{M_{eq}}\cdot\frac{g}{\ell} - \omega^2\right) - \frac{m}{M_{eq}}\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 = 0$$

Sendo $\frac{g}{\ell} = \omega_0^2$ $\quad \ell = 1\,m$ $\quad \alpha \sim 0{,}02$

1,0

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\omega_0^2 + \left(\frac{m}{M_{eq}}\right)\omega_0^2 - \omega^2\right) - \frac{m}{M_{eq}}\cdot\omega_0^2 = 0$$

$$\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\left(1 + \alpha - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) - \alpha = 0$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - (2+\alpha)\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1 = 0 \therefore \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{2+\alpha-\sqrt{(2+\alpha)^2-4}}{2} =$$

$$= \frac{2+\alpha-\sqrt{4\alpha+\cancel{\alpha^2}}}{2} = \frac{2+\alpha-2\sqrt{\alpha}}{2}$$

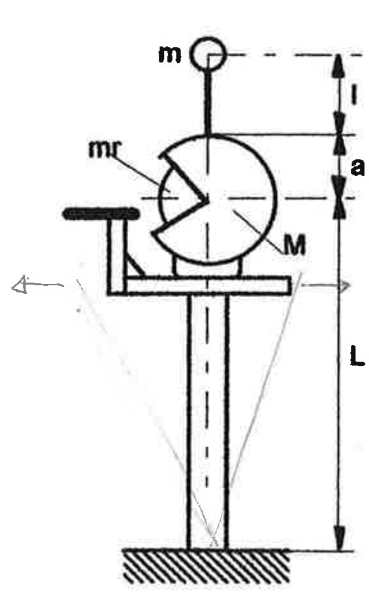
$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = 1+\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\alpha} \qquad \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 = 1+\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\alpha}$$

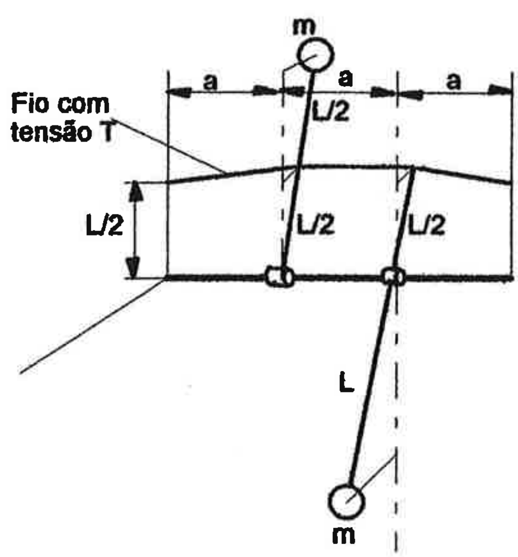
TERCEIRA PROVA PME - 2352 05/12/01

1ª Questão:

O sistema da figura representa um esmeril de oficina de massa total **M** (incluindo a massa do rebolo **mr**) que oscila horizontalmente devido ao desbalanceamento do rebolo que gira a **1200 rpm**. Inicialmente, com o esmeril desligado, determinou-se a frequência natural de oscilação horizontal da massa **M** como sendo **2 Hz**. Ao mesmo tempo, observou-se que o pedestal, de massa desprezível, praticamente não se deforma, e que a oscilação horizontal do esmeril decorre da deformação de sua fixação no chão. Posteriormente, para reduzir a vibração horizontal, decidiu-se projetar um absorvedor dinâmico de vibrações, constituído de uma massa **m** presa a uma viga de comprimento ***l***, que é engastada na massa **M** na cota **(L+a)**, como mostrado na figura. Sabendo-se que o centro de massa do rebolo tem uma excentricidade **e** em relação ao eixo de giro geométrico, e supondo-se conhecidos os diversos parâmetros apresentados na figura, pede-se:

a) determinar as equações diferenciais dos movimentos horizontais do centro do esmeril (massa **M**) e do absorvedor (massa **m**);
b) sabendo-se que a deformação na extremidade de uma viga engastada de comprimento ***l*** e módulo de rigidez **EJ**, submetida a uma força **P** aplicada na extremidade é $\delta = Pl^3/(3EJ)$, calcular o valor de **EJ** para tornar o absorvedor dinâmico efetivo;
c) sendo **mr = M/5**, **m = M/10** e ***l* = a = L/5**, calcular a amplitude de vibração do absorvedor durante seu funcionamento na condição de projeto.





2ª Questão:

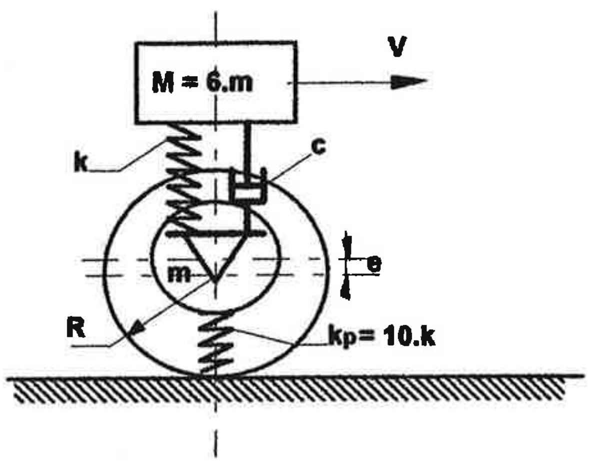
O sistema representado na figura é constituído de dois pêndulos simples, sendo um deles invertido. Um fio pré-tensionado com uma força **T** (que pode ser admitida constante) contribui para restituir o sistema à posição de equilíbrio. Sendo dados **m, L, T e a**, pede-se:

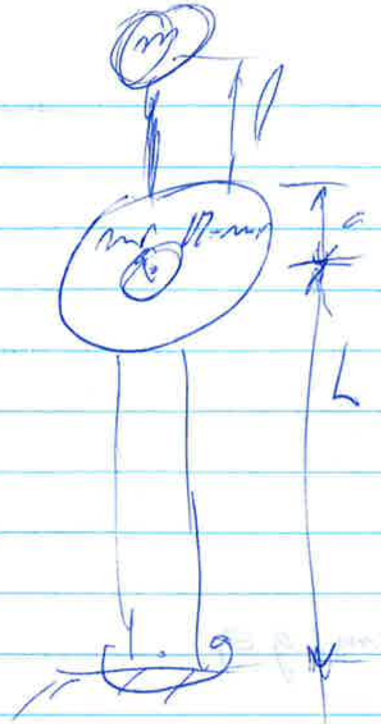
a) as equações diferenciais de oscilação dos pêndulos;
b) as frequências naturais de oscilação do sistema, supondo-se que a força **T** seja suficiente grande;
c) o valor de **T** que torna o sistema de equações diferenciais semi-definido.

3ª Questão:
O carro do professor está com um dos pneus traseiros ovalizado por desgaste não uniforme. O modelo físico mostrado na figura representa a suspensão referente ao pneu com problema, sendo que **R** é o raio externo do pneu, **M** é a massa equivalente do chassi correpondente àquela roda, **k** é a rigidez e **c** o coeficiente de amortecimento da suspensão, k_p é a rigidez do pneu, **m** é a massa do cubo e aro da roda e **e** representa a excentricidade do pneu. Supondo o veículo trafegando em um pavimento perfeitamente plano, a uma velocidade **V**, pede-se:

a) as equações diferenciais dos movimentos verticais do chassi do veículo (massa **M**) e do cubo da roda (massa **m**);

b) a amplitude e a frequência do movimento vertical do chassi, supondo **M = 6.m**, k_p **= 10. k** e o veículo se deslocando em regime permanente.





$$ML^2\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_t}{ML^2} \therefore \boxed{k_t = ML^2\cdot\omega_0^2}$$

$$M(L\ddot{\theta}) + \frac{k_t}{L^2}\cdot L\theta = 0$$

$$M\ddot{x} + \left(\frac{k_t}{L^2}\right)\cdot x = 0$$

$$\Sigma MA_O = (M-m_r)\cdot\ddot{x}\cdot L + m_r\cdot(\ddot{x} + \dot{\overline{e\omega_f\cos(\omega_f t)}})\cdot L$$

$$+ m\cdot\ddot{y}\cdot(L+a+\ell) = -k_t\cdot\frac{x}{L}$$

$$\begin{cases} M\ddot{x} + m\dfrac{(L+a+\ell)}{L}\cdot\ddot{y} + \dfrac{k_t}{L^2}\cdot x = m_r\cdot e\omega_f^2\sin(\omega_f t) \\ m\cdot\ddot{y} = -\dfrac{3EI}{\ell^3}\cdot\left(y - x\left(1+\dfrac{\ell+a}{L}\right)\right) \end{cases}$$

(a)
$$\begin{cases} M\ddot{x} + m\left(\dfrac{L+a+\ell}{L}\right)\cdot\ddot{y} + M\cdot\omega_0^2\cdot x = m_r e\omega_f^2\cdot\sin(\omega_f t) \\ m\ddot{y} - \dfrac{3EI}{\ell^3}\left(1+\dfrac{\ell+a}{L}\right)x + \dfrac{3EI}{\ell^3}\cdot y = 0 \end{cases}$$

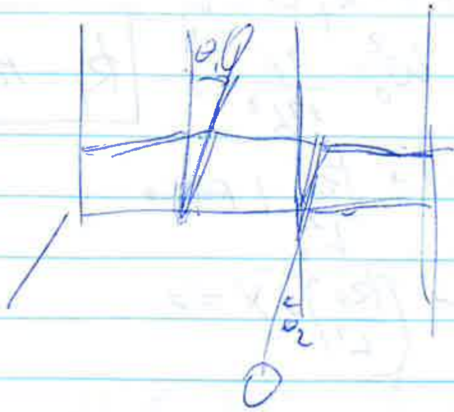
(2,0)

(b) $\frac{3EI}{m\ell^3} = \omega_f^2 \quad \therefore \quad \boxed{\ell^3 = \frac{m\omega_f^2}{3EI}}$ @ $\omega_f = \frac{2\pi\cdot 1200}{60} = 40\pi$

$$\boxed{\ell^3 = \frac{m\cdot(40\pi)^2}{3EI}}$$

(1,0)

(2)



$$\begin{cases} m\cdot L^2\cdot\ddot{\theta}_1 = -\frac{T}{a}\cdot\left(\frac{L}{2}\theta_1\right)\frac{L}{2} - \frac{T}{a}\cdot\left(\frac{L}{2}\theta_1 - \frac{L}{2}\theta_2\right)\frac{L}{2} + mLg\,\theta_1 \\ mL^2\ddot{\theta}_2 = -\frac{T}{a}\left(\frac{L}{2}\cdot\theta_2\right)\frac{L}{2} - \frac{T}{a}\cdot\left(\frac{L}{2}\theta_2 - \theta_1\right)\frac{L}{2} - mLg\cdot\theta_2 \end{cases}$$

$$mL\ddot{\theta}_1 + \frac{T}{a}\frac{L}{2}\theta_1 - \frac{T}{a}\cdot\frac{L}{4}\cdot\theta_2 - mg\,\theta_1 = 0$$

$$\left.\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{T}{2ma} - \frac{g}{l}\right)\theta_1 - \frac{T}{4ma}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 - \frac{T}{4ma}\theta_1 + \left(\frac{T}{2ma} + \frac{g}{L}\right)\theta_2 = 0 \end{cases}\right\} \quad 2.0$$

$$\cancel{\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \pm \frac{T}{4ma}(\theta_1+\theta_2) + \frac{T}{2ma}(\theta_1+\theta_2) - \frac{g}{l}\cdot(\theta_1-\theta_2)} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{T}{2ma} - \frac{g}{l} - \omega^2 & -\frac{T}{4ma} \\ -\frac{T}{4ma} & \frac{T}{2ma} + \frac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4 - \frac{T}{ma}\cdot\omega^2 + \left(\frac{T}{2ma}\right)^2 - \left(\frac{g}{l}\right)^2 - \left(\frac{T}{4ma}\right)^2 = 0$$

$$\omega^4 - \frac{T}{}\omega^2 + 3\left(\frac{T}{}\right)^2 - \left(\frac{g}{}\right)^2$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{T}{2ma} \mp \sqrt{\left(\frac{T}{2ma}\right)^2 - \frac{3}{16}\left(\frac{T}{ma}\right)^2 + \left(\frac{g}{\ell}\right)^2} =$$

(1.0)

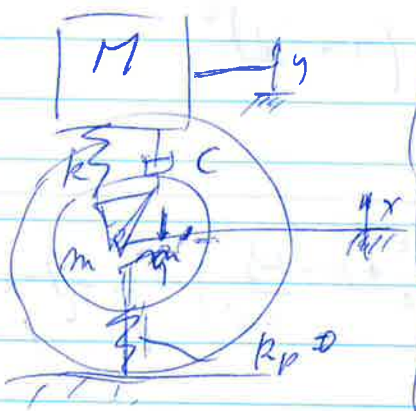
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{T}{2ma} \mp \sqrt{\frac{1}{16}\left(\frac{T}{ma}\right)^2 + \left(\frac{g}{\ell}\right)^2} \qquad (b)$$

(c) $\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 = \frac{3}{16}\left(\frac{T}{ma}\right)^2 \quad \therefore \quad \boxed{T = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{g}{\ell}\, ma}$

$$\boxed{T = \frac{4mga}{\sqrt{3}\,\ell}} \quad (0.5)$$

3-Q)

$$\frac{V}{R} = \omega_f$$



$$\begin{cases} m\ddot{x} = k_p(e\cos(\omega_f t) - x) + k(y-x) + c(\dot{y}-\dot{x}) \\ M\ddot{y} = k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (k+k_p)x - ky + c\dot{x} - c\dot{y} = k_p e\cos(\omega_f t) \\ M\ddot{y} - c\dot{x} + c\dot{y} - kx + ky = 0 \end{cases}$$

2.0

$$\boxed{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} (1+\frac{k_p}{k}) & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_p e\begin{pmatrix} \cos(\omega_f t) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + k_p x + k(x-y) = e^{i\omega_f t} \cdot k_p e \qquad 0.5$$

$$M\ddot{y} - c(\dot{x}-\dot{y}) - k(x-y) = 0$$

$$x = X e^{i\omega_f t} \qquad y = Y e^{i\omega_f t}$$

$$\begin{bmatrix} (-m\omega_f^2 + k_p + k + i\omega_f c) & -(k_p + i\omega_f c) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \end{pmatrix} \quad k_p e$$

$$y = \frac{k_p \cdot e(k + i\omega_f c)}{(k + i\omega_f c - m\omega_f^2)(k + k_p + i\omega_f c - m\omega_f^2) - (k + i\omega_f c)^2}$$

$$y = \frac{10k \cdot e \cdot (k + i\omega_f c)}{(k + i\omega_f c - 6m\omega_f^2)(\cancel{11}k + i\omega_f c - m\omega_f^2) - (k + i\omega_f c)^2} =$$

$$= \frac{10e \cdot \left(1 + \frac{i\omega_f c}{k}\right)}{\left[\left(1 - \frac{6m}{k}\omega_f^2\right) + \frac{i\omega_f c}{k}\right]\left[\left(11 - \frac{m}{k}\omega_f^2\right) + \frac{i\omega_f c}{k}\right] - \left(1 + \frac{i\omega_f c}{k}\right)^2} =$$

$$= \cancel{10e \cdot (1 + i\omega_f)} \qquad \frac{\omega_f c}{k} = \alpha \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \frac{\omega_f}{\omega_0} = r$$

$$= \frac{10e \cdot (1 + i\alpha)}{\left[\left(1 - 6\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right) + i\alpha\right]\left[\left(11 - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right) + i\alpha\right] - (1 + i\alpha)^2} =$$

$$= \frac{10e(1 + i\alpha)}{\left(1 - 6\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right)\left(11 - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right) - \alpha^2 + \left(1 - 6\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2} + 11 - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right) \cdot i\alpha - (1 - \alpha^2 + 2i\alpha)}$$

$$= \frac{10e(1 + i\alpha)}{(1 - 6r^2)(11 - r^2) - \cancel{\alpha^2} + \cancel{\alpha^2} - 1 + (12 - 7r^2 - 2) \cdot i\alpha} =$$

$$= \frac{10e \cdot (1 + i\alpha)\left[(10 + 6r^4 - 67r^2) - (10 - 7r^2) \cdot i\alpha\right]}{\left[(10 + 6r^4 - 67r^2) + (10 - 7r^2) \cdot i\alpha\right]\left[(10 + 6r^4 - 67r^2) - (10 - 7r^2) i\alpha\right]} =$$

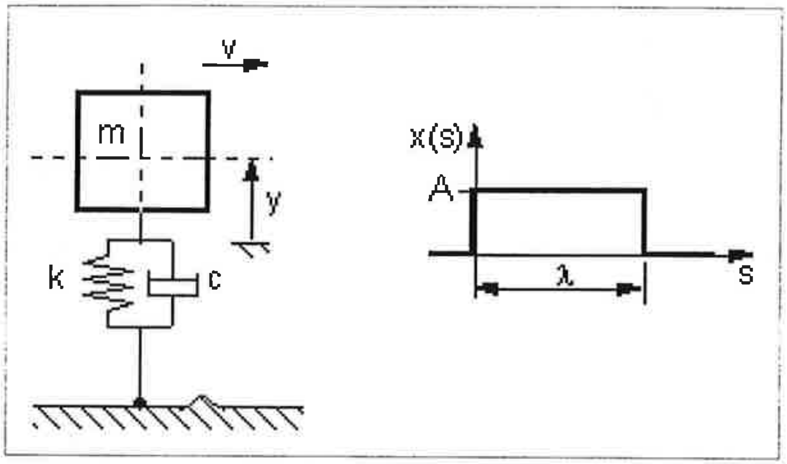
$$= \frac{10e \cdot \left[(10 + 6r^4 - 67r^2 + (10 - 7r^2) \cdot \alpha^2) + (\cancel{10} + 6r^4 - 67r^2 - \cancel{10} + 7r^2) i\alpha\right]}{(10 + 6r^4 - 67r^2)^2 + (10 - 7r^2)^2 \cdot \alpha^2} =$$

$$= \frac{10e \cdot \left[(10 + 6r^4 - 67r^2 + 10\alpha^2 - 7r^2\alpha^2) + 6(r^2 - 10) \cdot r^2 \cdot i\alpha\right]}{(10 + 6r^4 - 67r^2)^2 + (10 - 7r^2)^2 \alpha^2} \quad (1.0)$$

TERCEIRA PROVA PME - 2341 27/06/01

1ª Questão

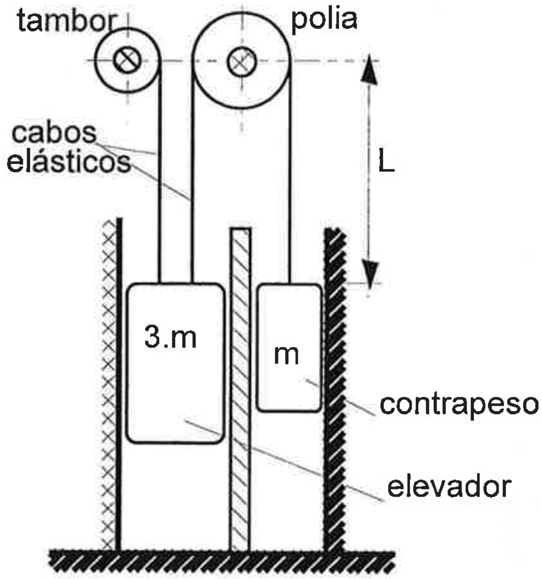
O sistema mostrado na figura representa um modelo simplificado de suspensão composto de uma massa **m** sobre uma mola de rigidez k e constante de amortecimento **c**. Deseja-se estudar a resposta do sistema **y(t)** quando ultrapassa com velocidade constante **v** um obstáculo retangular de altura **A** e comprimento λ. Pede-se: a) determinar a equação diferencial do movimento do sistema amortecido; b) determinar a expressão do movimento da massa **y(t),** considerando-se o amortecimento desprezível (ζ=**0**); c) determinar a velocidade que produz a menor vibração livre após a passagem pelo obstáculo.



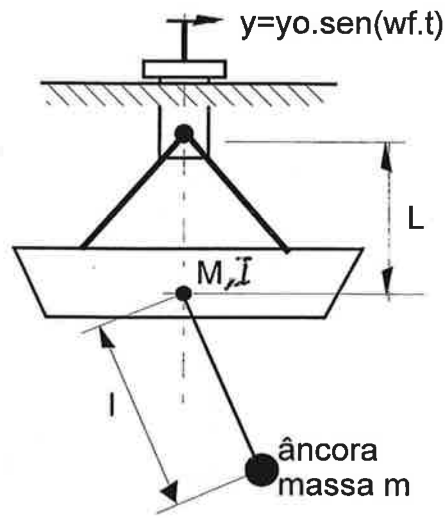
2ª Questão

O esquema da figura representa um elevador vertical de massa **3.m** com seu contrapeso de massa **m** suspenso por um cabo de nylon de comprimento **2.L**. Tanto a polia como o cabo tem massas desprezíveis. Além disso, um outro cabo de mesmo tipo e comprimento **L** permite comandar o movimento do elevador através de um motor elétrico e um tambor de enrolamento de cabo. Deseja-se estudar os movimentos verticais do elevador e do contrapeso quando o tambor de enrolamento está frenado, com o elevador na posição correspondente ao meio de seu curso, como mostrado na figura. Sabendo-se que os cabos tem uma flexibilidade **f** [1/N] por unidade de comprimento e coeficiente de histerese **b**, pede-se:

a) Obter as equações diferenciais dos movimentos verticais do elevador e contrapeso para pequenas amplitudes de vibração (cabos se mantém tracionados).
b) Determinar as frequências naturais e modos de vibrar do sistema não amortecido.
c) Determinar os fatores de amortecimento e modos de vibrar do sistema amortecido pela histerese do material dos cabos



2a Questão



3a Questão

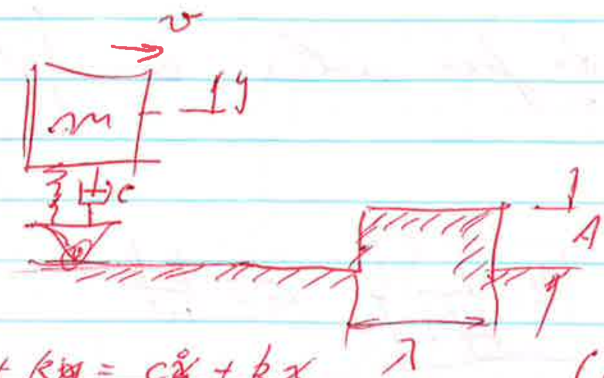
3ª Questão

O esquema representa um brinquedo denominado "acertando a âncora", encontrado em um parque de diversões. A barquinha de massa **M** e momento de inércia **I** em relação ao centro de massa é excitada pelo movimento horizontal do suporte, **y=yo.sen(wf.t)**. O marinheiro no barco deve "acertar o comprimento **l** "da corda da âncora de massa **m**, de modo a fazer com que a barquinha se desloque horizontalmente o mínimo possível, para melhorar seu conforto. Pede-se:

a) Obter as equações diferenciais dos movimentos horizontais da barquinha e da âncora, supondo pequenas amplitudes de oscilação.
b) Determinar o comprimento **l** da corda da âncora que minimiza o movimento horizontal absoluto do centro de massa da barquinha.
c) Para a condição anterior, determinar a amplitude do movimento horizontal da âncora.

Solução 3ª Prova PME 2341 27/06/01.

1ª Q)



$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = c\dot{x} + kx \qquad (50)$$

$x(t) = 0$ p/ $t < 0$

$x(t) = A$ p/ $0 \le t \le \frac{\lambda}{v}$

$x(t) = 0$ p/ $t > \frac{\lambda}{v}$

p/ $\zeta = 0$ $\quad m\ddot{y} + ky = k \cdot x(t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \cdot \int_0^t k \cdot x(\tau) \operatorname{sen}(\omega(t-\tau))\, d\tau$$

p/ $0 \le t \le \frac{\lambda}{v}$ $\quad y(t) = \frac{1}{m\omega} \cdot \int_0^t k \cdot A \cdot \operatorname{sen}(\omega(t-\tau))\, d\tau =$

$$= -A \int_{\omega t}^{0} \operatorname{sen}(\omega(t-\tau))\, d(\underbrace{\omega(t-\tau)}_{\alpha}) =$$

$$= A \cdot \int_0^{\omega t} \operatorname{sen}\alpha \cdot d\alpha = A \cdot (-\cos\alpha)\Big|_0^{\omega t} = A \cdot (1 - \cos(\omega t))$$

$$\boxed{y(t) = A \cdot (1 - \cos(\omega t)) \quad \text{p/ } 0 \le t \le \frac{\lambda}{v}} \quad (20)$$

p/ $t > \frac{\lambda}{v}$ $\quad y(t) = A\omega \left[\int_0^{\lambda/v} \operatorname{sen}(\omega(t-\tau))\, d\tau + \right.$

$$\left. + \int_{\lambda/v}^{t} 0 \cdot \operatorname{sen}\omega(t-\tau)\, d\tau \right] = -A \cdot \int_{\omega t}^{\omega(t-\frac{\lambda}{v})} \operatorname{sen}(\omega(t-\tau))\, d(\underbrace{\omega(t-\tau)}_{\alpha}) =$$

$$= + A \cdot \cos\alpha \Big|_{\omega t}^{\omega(t-\frac{\lambda}{v})} = A \left[\cos\left(\omega\left(t - \frac{\lambda}{v}\right)\right) - \cos(\omega t) \right] =$$

$$= A \cdot \left[\cos\left(\frac{\omega\lambda}{v}\right) \cdot \cos\omega t + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\lambda}{v}\right) \cdot \operatorname{sen}(\omega t) - \cos(\omega t) \right] =$$

(20) $y(t) = A \cdot \left[\left(\cos\left(\frac{\omega\lambda}{v}\right) - 1 \right) \cdot \cos(\omega t) + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\lambda}{v}\right) \operatorname{sen}(\omega t) \right]$ ...

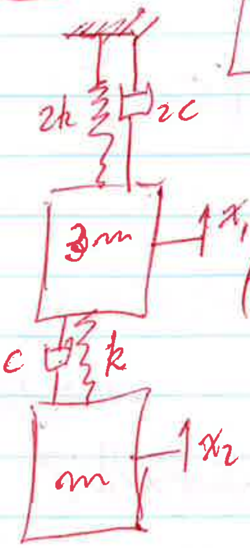
Portanto se $\frac{\omega\lambda}{v} = 2\pi n$; $n = 1, 2, \ldots$

A amplitude fica nula. Ou $\boxed{v = \frac{\omega\cdot\lambda}{2\pi\cdot n}}$ → $y(t) =$
p/ $t>$

(10)

2ª Q)

$\boxed{k = \frac{1}{2f\cdot L}}$ $\quad c = \frac{b\cdot k}{\omega}$



(10)
$$\begin{cases} 3m\ddot{x}_1 + 3k\,x_1 - kx_2 + 3c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - c\dot{x}_1 + c\dot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$m\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como o amortecimento é pequeno, vamos achar os modos de vibração e frequências naturais do sistema não amortecido.

$$\left|\begin{pmatrix} 3k - 3m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix}\right| = 0 \therefore \begin{vmatrix} 3\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) & -1 \\ -1 & \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$3\cdot\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 - 1 = 0 \therefore \boxed{\omega_{1,2}^2 = \left(1 \mp \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{k}{m}} \quad (20)$$

modos de vibração

p/ $\omega = \omega_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{k}{m}}$

$$\left[3\cancel{k} - 3\cancel{k}\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]\cdot X_{1,1} - \cancel{k}\cdot X_{2,1} = 0 \therefore \boxed{X_{2,1} = \sqrt{3}\cdot X_{1,1}}$$

1º modo

(20)

p/ $\omega = \omega_2 = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\frac{k}{m}}$

$$\left[3\cancel{k} - 3\cancel{k}\cdot\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]\cdot X_{1,2} - \cancel{k}\,X_{2,2} = 0 \therefore \boxed{X_{2,2} = -\sqrt{3}\cdot X_{1,2}}$$

2º modo

Portanto $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ desacopl. também o amortecimento

$$\Phi^T [M] \Phi = m \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot m$$

$$\Phi^T [K] \Phi = k \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3 & \cancel{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3} \; 0 \\ \cancel{3+\sqrt{3}-\sqrt{3}-3} \; 0 & 3+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3 \end{pmatrix} \cdot k = k \begin{pmatrix} 2(3-\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & 2(3+\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

$$\Phi^T [C] \Phi = c \begin{pmatrix} 2(3-\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & 2(3+\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6m\ddot{z}_1 + 2(3-\sqrt{3}) c \dot{z}_1 + 2(3-\sqrt{3}) k z_1 = 0 & \Rightarrow \omega_1^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \frac{k}{m} \\ 6m\ddot{z}_2 + 2(3+\sqrt{3}) c \dot{z}_2 + 2(3+\sqrt{3}) k z_2 = 0 & \Rightarrow \omega_2^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \frac{k}{m} \end{cases}$$

onde $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = [\Phi]^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$z_1 = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $z_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2 \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\boxed{\zeta_1} = \frac{2(3-\sqrt{3}) c}{2\sqrt{6m \cdot 2(3-\sqrt{3}) k}} = \frac{c_1}{2\sqrt{m_1 k_1}} = \frac{c_1 \omega_1}{2 k_1} = \frac{2(3-\sqrt{3}) \cdot c \cdot \omega_1}{4(3-\sqrt{3}) \cdot k}$$

$$= \boxed{\zeta_1 \simeq \frac{b}{2}} \quad (20)$$

$$\zeta_2 = \frac{c_2}{2\sqrt{m_2 k_2}} = \frac{c_2 \omega_2}{2 k_2} = \frac{2\cancel{(3+\sqrt{3})} \cdot c \cdot \omega_2}{4 \cdot \cancel{(3+\sqrt{3})} \cdot k} \simeq \boxed{\frac{b}{2} = \zeta_2}$$

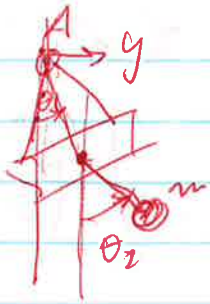
pois $\omega_{1d} \simeq \omega_1$ e $\omega_{2d} = \sqrt{1-\zeta_2^2} \cdot \omega_2 \simeq \omega_2$

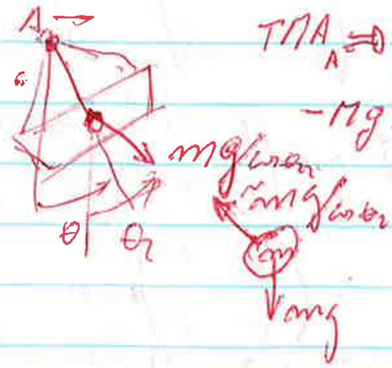
Obviamente, como todos os elementos elásticos têm a mesma histerese

$\zeta = \frac{c\omega}{2k}$

$+\ddot{\alpha}\,\wedge$

3ª Q





$TMA_A \Rightarrow (ML^2+I)\cdot\ddot{\theta}_1 = mg\theta_2\cdot L + -MgL\theta_1 - mg\cdot L\theta_1 - M\cdot\ddot{y}\cdot L$

(30)
$$\begin{cases} (ML^2+I)\cdot\ddot{\theta}_1 + (M+m)gL\theta_1 - mgL\theta_2 = -ML\ddot{y} = MLy_0\omega_f^2\,\text{sen}(\omega_f t) \\ m(L\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + \ddot{y}) + mg\cdot\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ML^2+I)\cdot\ddot{\theta}_1 + (M+m)gL\theta_1 - mgL\theta_2 = MLy_0\omega_f^2\,\text{sen}(\omega_f t) \\ L\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = y_0\omega_f^2\,\text{sen}(\omega_f t) \end{cases}$$

p/ que $L\theta_1 + y = 0 \Rightarrow \theta_1 = -\frac{y_0\,\text{sen}(\omega_f t)}{L}$ e ∴

$\ddot{\theta}_1 = \frac{y_0\omega_f^2}{L}\,\text{sen}(\omega_f t)$

$(ML^2+I)\cdot\frac{y_0\omega_f^2}{L}\,\text{sen}(\omega_f t) - (M+m)g\cdot y_0\cdot\text{sen}(\omega_f t) - mgL\cdot\theta_2 = MLy_0\omega_f^2\,\text{sen}(\omega_f t)$

$\left(\frac{I\cdot\omega_f^2}{L} - (M+m)g\right)y_0\,\text{sen}(\omega_f t) = mgL\theta_2$

$y_0\omega_f^2\,\text{sen}(\omega_f t) + l\cdot\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = y_0\omega_f^2\,\text{s}(\omega_f t)$

$l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0 \quad ∴ (-\omega_f^2 l + g)\cdot\Theta_2 = 0$ e

$\theta_2 = \Theta_2\cdot\text{sen}(\omega_f t)$ $\quad \boxed{l = \frac{g}{\omega_f^2}}$ (30)

$\cancel{\Theta_2 = \frac{y_0 g}{L}\cdot\left(\frac{I\omega_f^2}{L\,mg} - 1\right)}$ (20)

$\Theta_2 = \frac{y_0}{L}\left[\frac{I\omega_f^2}{L\cdot mg} - \left(\frac{M}{m}+1\right)\right] = \frac{y_0}{L}\left[\frac{I}{L\cdot l} - \left(\frac{M}{m}+1\right)\right]$

$$\boxed{\Theta_2 = -\frac{y_0}{L}\cdot\left[\frac{M}{m}+1-\frac{I}{Ll}\right]}$$