PME 2341 Prova Substitutiva 05/07/05

1ª Q) $\vec{\delta}_A = 0{,}1\,\angle 60^\circ = 0{,}1(\cos 60^\circ \vec{i} + \operatorname{sen} 60^\circ \vec{j}) = 0{,}05\vec{i} + 0{,}086\vec{j}$

$\vec{\delta}_B = 0{,}2\,\angle 240 = 0{,}2\cdot(\cos 240^\circ \vec{i} + \operatorname{sen} 240^\circ \vec{j}) = -0{,}1\vec{i} - 0{,}173\vec{j}$

$\vec{\delta}_{CM} = \frac{\vec{\delta}_A + \vec{\delta}_B}{2} = +0{,}025\vec{i} + 0{,}043\vec{j} = +0{,}05\,\angle 60^\circ$

1,0 ∴ devemos retirar $\boxed{m_E = \frac{0{,}05\cdot 20000}{125} = 8g}$ na posição 60º.

(0,5) Corrigido o desbalanceamento estático, sobra:

$\vec{\delta}_{A'} = 0{,}15\,\angle 60^\circ \quad ; \quad \delta_{B'} = 0{,}15\,\angle 240^\circ$

como $\alpha_{CA} = -0{,}01\ mm/g$ e $\alpha_{CB} = 0{,}002\ mm/g$

$\alpha_{DA} = 0{,}002\ mm/g$ e $\alpha_{DB} = -0{,}01\ mm/g$

$$\begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}002 \\ 0{,}002 & -0{,}01 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_C \vec{e}_C \\ m_D \vec{e}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0{,}15 \\ 0{,}15 \end{pmatrix} \angle 60^\circ$$

1,5 $\boxed{m_C = \frac{+12}{0{,}96} = 12{,}5g \text{ a } \angle 60^\circ}$ $\boxed{\text{retirar } 12{,}5g \text{ a } 240^\circ}$

$\boxed{m_D = \frac{-12}{0{,}96} = -12{,}5g \text{ a } \angle 60^\circ}$ $\boxed{\text{retirar } 12{,}5g \text{ a } 60^\circ}$

5000 rpm

$e \cdot \omega_{op} \leq 6{,}3\ mm/s \qquad e \leq \frac{6{,}3}{524} = 0{,}012\ mm$

$\boxed{\Delta m_C \cdot r_C = \Delta m_D\, r_D < 120\, g\,mm}$ (0,5)

2ª Q) x – coordenada da superfície líquida do lado de pressão, medida da posição de equilíbrio, positiva para baixo

$\rho A L \ddot{x} = (p(t) - P_{atm})\cdot A - \frac{12\cdot\mu\cdot l_c}{h^2}\cdot\dot{x} - 2\rho g A x$

$\rho L \ddot{x} + \frac{12\mu}{} \frac{l_c}{A h^2}\cdot\dot{x} + 2\rho g x = p(t) - P_{atm}$ (1,5)

Para que a solução seja responsiva e pouco oscilante, façamos

$\xi = 1 \therefore \frac{12\mu \ell_c}{A \cdot h^2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{2\rho g \ell \cdot L}} = 1 \therefore$

(1,0)

$$\boxed{h^2 = \frac{6\mu \ell_c}{\rho \cdot A\cdot\sqrt{2gL}}} \qquad \boxed{\omega=\sqrt{\frac{2g}{L}}}$$

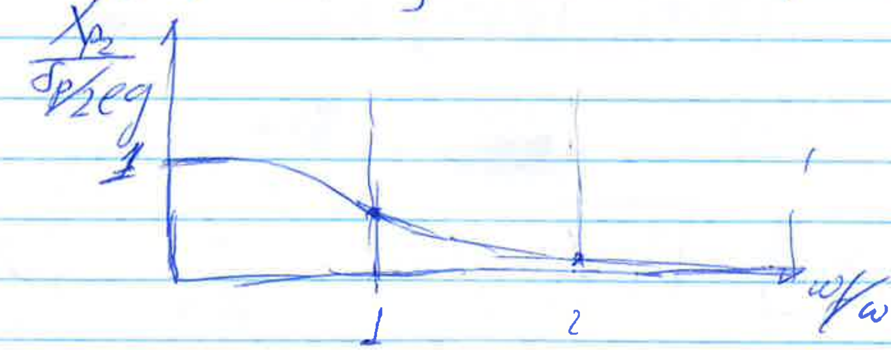
Se $p(t)=P_0+\delta p\cdot sen(\omega_f t)$ a solução particular é a soma de duas componentes $x_{p_1} = \frac{P_0-P_{atm}}{2\rho g}$ e

(1,0)

$$x_{p_2} = \frac{\delta p/2\rho g}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r)^2}}\cdot sen(\omega_f t-\psi) \; ; \; r=\frac{\omega_f}{\omega} \; ; \; tg\psi = \frac{2r}{1-r^2}$$

$$x_p(t) = \frac{P_0-P_{atm}}{2\rho g} + \frac{\delta p/2\rho g}{1+\left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2}\cdot sen(\omega_f t-\psi)$$

A resposta, portanto, apresenta um valor constante $\frac{P_0-P_{atm}}{2\rho g}$ e outro que depende do valor de δp, que reduz-se à medida que ω_f aumenta.



3ª Q)

$\alpha_1 D_1 = \alpha_2 D_2 \therefore k_2\cdot(\theta_2-\alpha_2)\cdot D_1 = -k_1(\theta_1-\alpha_1)\cdot D_2$

$J_1\ddot\theta_1 = k_1\cdot(\alpha_1-\theta_1) = k_1\alpha_1 - k_1\theta_1 \therefore \frac{J_1}{k_1}\cdot\ddot\theta_1+\theta_1=\alpha_1$

$J_2\ddot\theta_2 = k_2\cdot(\alpha_2-\theta_2) = k_2\frac{D_1}{D_2}\cdot\alpha_1 - k_2\theta_2$

$\frac{J_2}{k_2}\ddot\theta_2+\theta_2 = \frac{D_1}{D_2}\cdot\left(\frac{J_1}{k_1}\cdot\ddot\theta_1+\theta_1\right)$

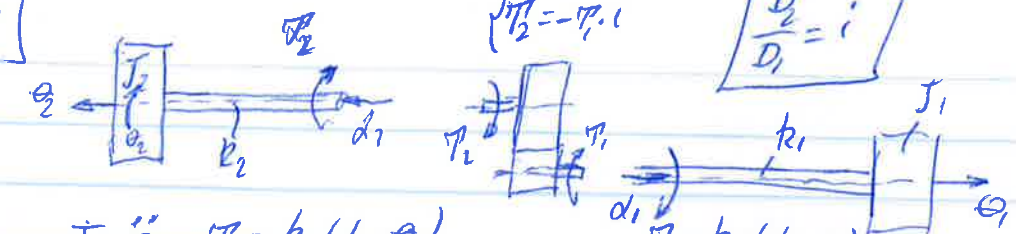
$D_1 k_2\cdot(\theta_2-\alpha_2) = k_1 D_2\cdot\left(\theta_1-\alpha_2\cdot\frac{D_2}{D_1}\right) \therefore D_1 k_2\cdot\theta_2 - k_1 D_2\theta_1 =$
$= D_1 k_2\alpha_2 - k_1\frac{D_2^2}{D_1}\cdot\alpha_2$

$(D_1^2 k_2 - k_1 D_2^2)\cdot\alpha_2 = D_1^2 k_2\theta_2 - k_1\cdot D_2\cdot D_1\theta_1$

3:Q)

$$\begin{cases}\alpha_1 = \alpha_2 \cdot i \\ T_2 = -T_1 \cdot i\end{cases} \qquad \boxed{\frac{D_2}{D_1} = i}$$

(a)



$$J_2 \cdot \ddot{\theta}_2 = T_2 = k_2(\alpha_2 - \theta_2) \qquad T_1 = k_1 \cdot (\alpha_1 - \theta_1)$$

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = k_1 \cdot (\alpha_1 - \theta_1)$$

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - k_1 \alpha_1 = 0 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + k_2 \theta_2 - k_2 \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{com} \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \cdot i \\ k_2(\alpha_2 - \theta_2) = -i \cdot k_1 \cdot (\alpha_1 - \theta_1) \end{cases}$$

ou $\frac{k_2}{i^2} \cdot (\alpha_2 i - \theta_2 i) = -k_1(\alpha_1 - \theta_1) \therefore \frac{k_2}{i^2} \cdot (\alpha_1 - \theta_2') =$

$= -k_1(\alpha_1 - \theta_1) \therefore \boxed{\left(\frac{k_2}{i^2} + k_1\right)\alpha_1 = k_1 \theta_1 + \frac{k_2}{i^2} \cdot \theta_2'}$ com $\boxed{\theta_2' = \theta_2 \cdot i}$

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - \dfrac{k_1\left(k_1 \theta_1 + \frac{k_2}{i^2} \cdot \theta_2'\right)}{k_2/i^2 + k_1} = 0 \\ \dfrac{J_2}{i^2} \cdot \ddot{\theta}_2' + \dfrac{k_2}{i^2} \cdot \theta_2' - \dfrac{k_2}{i^2} i \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + \dfrac{k_1 \cdot \frac{k_2}{i^2}}{k_2/i^2 + k_1} \cdot (\theta_1 - \theta_2') = 0 \\ \dfrac{J_2}{i^2} \ddot{\theta}_2' + \underbrace{\dfrac{k_1 \cdot k_2/i^2}{k_2/i^2 + k_1}}_{k_{eq}} (\theta_2' - \theta_1) = 0 \end{cases} \qquad (b)$$

para $J_1 = J_2 = J$; $i = 2$; $k_1 = k_2 = k$ vem:

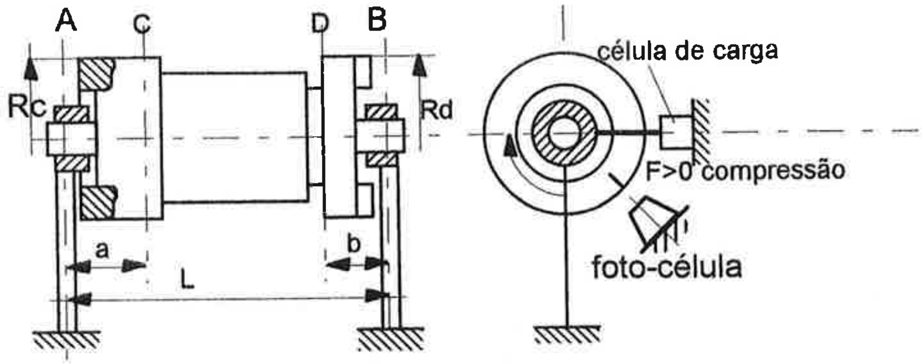
$$\begin{cases} J \ddot{\theta}_1 + \dfrac{k}{5}(\theta_1 - \theta_2') = 0 \\ \dfrac{J}{4} \ddot{\theta}_2' + \dfrac{k}{5}(\theta_2' - \theta_1) = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} J \ddot{\theta}_1 + \dfrac{k}{5}(\theta_1 - \theta_2') = 0 \\ J \ddot{\theta}_2' + \dfrac{4k}{5}(\theta_2' - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J \ddot{\theta}_1 + \dfrac{J}{4} \ddot{\theta}_2' = 0 \Rightarrow \omega = 0 \quad \boxed{\theta_{11}(t) = \theta_{21}'(t) = A + \Omega t} \\ J(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2') + k(\theta_1 - \theta_2') = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{J}} \;\text{e}\; \boxed{4 \cdot \theta_{12}(t) = -\theta_{22}'(t)} \end{cases}$$

PROVA SUBSTITUTIVA PME - 2352 15/12/04

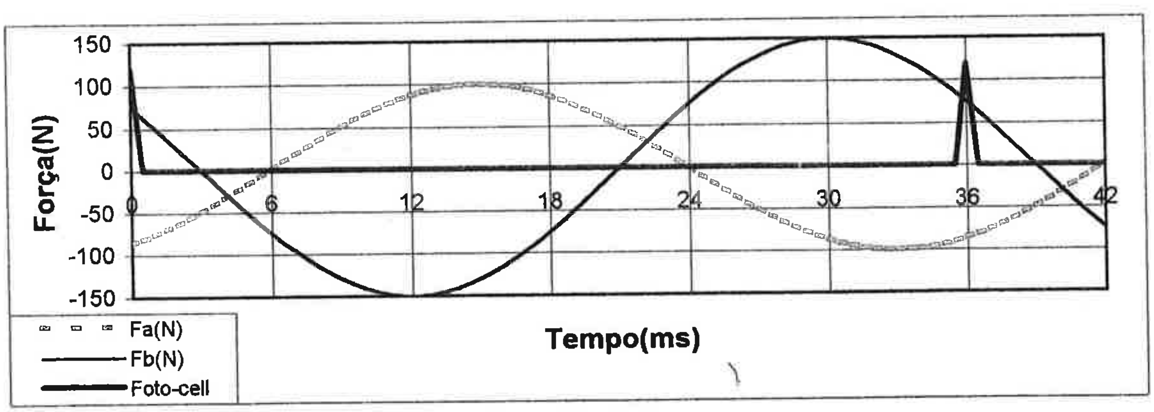
1ª Questão

O rotor de massa **M=50 kg** e comprimento **L=400 mm**, e cujos planos de balanceamento **C** e **D** distam **a=100 mm** e **b=60 mm** dos planos dos mancais, como indicado na figura, está sendo balanceado em uma máquina de balancear de mancais rígidos. Os gráficos das forças horizontais medidas nos mancais **A** e **B** em



função do tempo, disparado a partir do sinal da foto-célula, são apresentados na figura. Conhecendo-se os valores dos raios de balanceamenrto **Rc=100 mm** e **Rd=80 mm** pede-se:

a) As massas a serem retiradas nos planos **C** e **D,** bem como suas posições angulares, para balancear o rotor;
b) Se o rotor tem uma rotação de trabalho de **3600 rpm** e deve ser balanceado para uma classe **ISO G6.3**, determinar os valores de tolerância admissível para as massas de balanceamento;



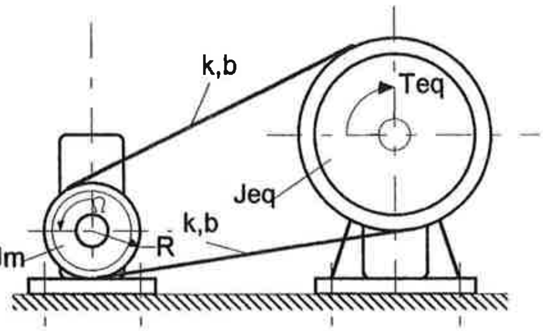
2ª Questão:

Um motor de combustão interna monocilíndrico de quatro tempos, operando a uma velocidade angular média Ω, aciona um equipamento por meio de uma transmissão por correias V com redução de **2:1**. Sabendo-se que, para o estudo de vibrações torcionais, o motor pode ser representado por um volante de momento de inércia **Jm** acionado por um torque decorrente da combustão interna

$$T_{ef}=T\cdot[1+2\cdot sen(\Omega/2\cdot t+1)+2\cdot sen(\Omega\cdot t+0,5)+1,8\cdot sen(3\cdot\Omega/2\cdot t+0,1)+1,4\cdot sen(2\cdot\Omega\cdot t-0,1)],$$

que o equipamento acionado tem momento de inércia **Jeq** e um torque resistente praticamente independente da rotação igual a **Teq**, que o raio da polia motora é **R**, e que a correia é tal que seu material apresenta coeficiente de histerese **b** e cada seu lado tem rigidez **k**, pede-se:

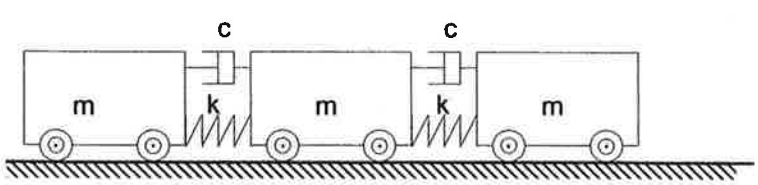
a) as equações diferenciais dos movimentos angulares dos volantes do motor e do equipamento acionado;
b) as freqüências naturais de oscilação torcional do sistema e os modos fundamentais de vibração;
c) sendo **Ω=120rad/s, R=0,25m, Teq=60N.m, Jm=1kg.m^2, Jeq=8kg.m^2, k=25000N/m** e **b=0,1** comparar as freqüências naturais com as freqüências de excitação para verificar a ocorrência de ressonâncias.



3ª Questão:

O sistema representado na figura modela um "treminhão" trafegando em uma pista reta e horizontal. Supondo que as massas dos três módulos são iguais entre si, assim como as rigidezas e amortecimentos dos engates, e ignorando-se as resistências aerodinâmica e de rolamento, pede-se:

a) escrever as equações diferenciais dos movimentos horizontais de cada módulo do "treminhão";
b) calcular as freqüências naturais do sistema não amortecido;
c) determinar os modos de vibrar, as freqüências fundamentais do sistema amortecido e os fatores modais de amortecimento;
d) determinar as expressões gerais que permitam calcular a evolução no tempo dos três módulos do "treminhão".



Solução Prova Substitutiva 15/12/04

1ºQ) $\vec{F_a} = 100N \angle 150°$

$\vec{F_b} = 150N \angle 300°$

$$\vec{F_c} = \vec{F_a} \cdot \frac{(l-b)}{(l-a-b)} - \vec{F_b} \cdot \frac{(b)}{(l-a-b)}$$

$$\vec{F_d} = \vec{F_b} \cdot \frac{(l-a)}{(l-a-b)} - F_a \cdot \frac{a}{(l-a-b)}$$

$$\vec{F_c} = 1{,}417 \cdot 100 \cdot (\cos 150 \vec{i} + \operatorname{sen} 150 \vec{j}) - 0{,}25 \cdot 150 \cdot (\cos 300 \vec{i} + \operatorname{sen} 300 \vec{j}) =$$
$$= -141{,}5 \vec{i} + 103{,}3 \vec{j} = 175{,}2 N \angle 143{,}9°$$

mas $F_c = m_c R_c \cdot \omega^2 \therefore m_c = 5{,}75 \times 10^{-2}$ kg

$\omega = \frac{2\pi}{36 \times 10^{-3}} = 174{,}5$ rad/s

$\boxed{\text{Plano C} \quad \text{Retirar } 57{,}5g \text{ na posição } 143{,}9°}$

$$\vec{F_d} = 1{,}25 \cdot 150 \cdot (\cos 300 \vec{i} + \operatorname{sen} 300 \vec{j}) - 0{,}417 \cdot 100 \cdot (\cos 150 \vec{i} + \operatorname{sen} 150 \vec{j}) =$$
$$= 129{,}9 \vec{i} - 183{,}2 \vec{j} = 224{,}6 N \angle 305{,}3°$$

$F_d = m_d R_d \cdot \omega^2 \therefore m_d = 9{,}22 \times 10^{-2}$ kg

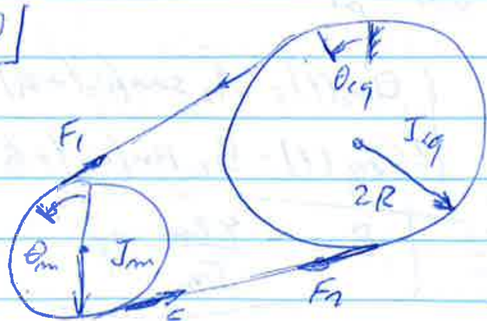
$\boxed{\text{Plano D} \rightarrow \text{Retirar } 92{,}2g \text{ na posição } 305{,}3°}$

Classe ISO G 6,3 $\therefore e \cdot \omega_{op} = 6{,}3$ mm/s

$\omega_{op} = \frac{3600}{60} \cdot 2\pi = 377$ rad/s $\therefore e = 0{,}0167$ mm

$\Delta m_c \cdot R_c = \Delta m_d \cdot R_D = \frac{M \cdot e}{2} = 418$ g·mm $\therefore$ $\boxed{\begin{array}{l} \Delta m_c = 4{,}2g \\ \Delta m_d = 5{,}2g \end{array}}$

2ºQ)



$$\begin{cases} T_{ef} - (F_1 - F_2) \cdot R = J_m \cdot \ddot{\theta}_m \\ (F_1 - F_2) \cdot 2R - T_{eq} = J_{eq} \cdot \ddot{\theta}_{eq} \end{cases}$$

$$F_1 = F_{01} + k \cdot (\theta_m R - \theta_{eq} \cdot 2R) + c_{eq} (\dot{\theta}_m R - \dot{\theta}_{eq} \cdot 2R)$$

$$(F_{o_1} - F_{o_2}) \cdot R = T$$

$$(F_{o_1} - F_{o_2}) \cdot 2R = T_{eq}$$

$$\boxed{c_{eq} = \frac{bk}{\omega_f}}$$

$$T\left(1 + \sum a_i \operatorname{sen}\left(i\frac{\Omega}{2}t + \alpha_i\right)\right) - \cancel{(F_{o_1} - F_{o_2})R} \mp 2k(\theta_m R - \theta_{eq} \cdot 2R) \cdot R - 2c_{eq} \cdot (\dot\theta_m R - \dot\theta_{eq} 2R) R =$$

$$= J_m \ddot\theta_m$$

$$J_m \ddot\theta_m + 2c_{eq} \cdot (\dot\theta_m R^2 - 2\dot\theta_{eq} \cdot R^2) + 2k(\theta_m R^2 - 2\theta_{eq} \cdot R^2) = \sum T a_i \operatorname{sen}\left(i\frac{\Omega}{2}t + \alpha_i\right)$$

$$\cancel{(F_{o_1} - F_{o_2}) \cdot 2R} + 2k(\theta_m R - \theta_{eq} \cdot 2R) 2R + 2c_{eq} \cdot (\dot\theta_m R - \dot\theta_{eq} 2R) \cdot 2R - \cancel{T_{eq}} = J_{eq} \cdot \ddot\theta_{eq}$$

$$J_{eq} \cdot \ddot\theta_{eq} + 4c_{eq} \cdot (\dot\theta_m R^2 - \dot\theta_{eq} 2R^2) + 4k \cdot (\theta_m R^2 - 2\theta_{eq} \cdot R^2) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{J_m}{R^2} \cdot \ddot\theta_m + 2c_{eq} \cdot (\dot\theta_m - 2\dot\theta_{eq}) + 2k(\theta_m - 2\theta_{eq}) = \frac{T}{R^2} \sum a_i \operatorname{sen}\left(\frac{i\Omega}{2}t + \alpha_i\right) \\ \frac{J_{eq}}{4R^2} \cdot (2\ddot\theta_{eq}) - 2c_{eq} (\dot\theta_m - 2\dot\theta_{eq}) - 2k(\theta_m - 2\theta_{eq}) = 0 \end{cases}$$

~~modo~~ 1ª frequência natural $\omega_1 = 0$ (r-d-f-d)

$$\begin{cases} \theta_{m_1}(t) = A + Bt \\ 2\theta_{eq_1}(t) = A + Bt \end{cases} \quad (1º\ modo)$$

$$\frac{J_{eq}}{4R^2} \cdot \frac{J_m}{R^2} \cdot (\ddot\theta_m - 2\ddot\theta_{eq}) + 2 \cdot c_{eq} \cdot \left(\frac{J_m}{R^2} + \frac{J_{eq}}{4R^2}\right) \cdot (\dot\theta_m - 2\dot\theta_{eq}) + 2k \cdot \left(\frac{J_m}{R^2} + \frac{J_{eq}}{4R^2}\right) \cdot (\theta_m - 2\theta_{eq}) =$$

$$= \frac{J_{eq} \cdot T}{4R^4} \sum a_i \operatorname{sen}\left(\frac{i\Omega}{2}t + \alpha_i\right)$$

2ª frequência natural

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{2k \cdot \left(\frac{J_m}{R^2} + \frac{J_{eq}}{4R^2}\right)}{\frac{J_{eq}}{4R^2} \cdot \frac{J_m}{R^2}} = \frac{8kR^2 \cdot \left(J_m + \frac{J_{eq}}{4}\right)}{J_{eq} \cdot J_m}}$$

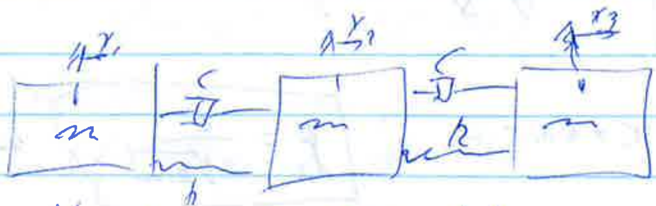
$$\frac{J_m}{R^2} \cdot \ddot\theta_m + \frac{J_{eq}}{4R^2} \cdot 2\ddot\theta_{eq} = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} \theta_{m_2}(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \\ 2\theta_{eq_2}(t) = B_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

$$J_m \cdot A_2 = -\frac{J_{eq}}{4} \cdot B_2 \quad \therefore \quad \boxed{B_2 = -\frac{4J_m}{J_{eq}} \cdot A_2} \quad (2º\ modo)$$

$\left(\omega_2 = 68{,}5 \text{ rad/s}\right)$

$\frac{\Omega}{2} = 60 \text{ rad/s} \therefore$ Frequências de excitação $\begin{cases} 60 \text{ rad/s} \\ 120 \text{ rad/s} \\ 180 \text{ rad/s} \\ 240 \text{ rad/s} \end{cases}$

3ª Q)



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m\ddot{x}_2 = k(x_3 - x_2) + c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) - c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \end{cases}$$

$$m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Amortecimento proporcional e sistema semi definido

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ chamando $\lambda = \frac{m\omega^2}{k}$, para o sistema não amortecido vem:

$$\left[-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore$$

$$\Delta = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \therefore (1-\lambda)\big((1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 2\big) \therefore$$

$\lambda_1 = 0 \quad \therefore \quad \omega_1^2 = 0 \Rightarrow$ translação

$\lambda_2 = 1 \qquad \omega_2^2 = \frac{k}{m}$

$\lambda_3 = 3 \qquad \omega_3^2 = \frac{3k}{m}$

P/ $\lambda = 0 \quad X_1 = X_2 = X_3 \quad$ translação $\left(1\right.$

p/ $\lambda = \lambda_2 = 1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

p/ $\lambda = \lambda_3 = 3$ $\quad -2X_{13} - X_2 = 0 \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\quad -X_2 - 2X_{33} = 0$

1º modo $\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_3 = 0 \end{pmatrix}$ não ~~faz~~ faz sentido falar em amortecimento modal

2º modo $\quad m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\xi_2 = \dfrac{c}{2\sqrt{km}}} \quad \omega_{d_2} = \omega_2\sqrt{1-\xi_2^2}$

3º modo $\quad m\ddot{x}_1 + 3c\dot{x}_1 + 3kx_1 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\xi_3 = \dfrac{3c}{2\sqrt{3k\,m}}} \quad \omega_{d_3} = \omega_3\sqrt{1-\xi_3^2}$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B_1 t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\xi_2\omega_2 t} \cdot \operatorname{sen}(\omega_{d_2}t + \phi_2) + A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\xi_3\omega_3 t} \cdot \operatorname{sen}(\omega_{d_3}t + \phi_3)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = (A_1 + B_1 t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot e^{-\xi_2\omega_2 t} \cdot \operatorname{sen}(\omega_{d_2}t + \phi_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A_3 e^{-\xi_3\omega_3 t} \cdot \operatorname{sen}(\omega_{d_3}t + \phi_3)$$

PME2341 — 3^a **Prova** — **30/06/2004**

Prof. Francisco E. Baccaro Nigro — *Prof. Walter Ponge-Ferreira*

1^a Questão

O modelo da figura 1 representa um veículo que trafega em uma estrada plana e horizontal com velocidade v, sendo M_1 e M_2 as massas do cavalo e carreta respectivamente e K a rigidez do engate entre eles. Subitamente, o cavalo freia instantaneamente bloqueando as rodas, enquanto o freio da carreta falha e não atua. Sabendo-se que o coeficiente de atrito entre os pneus e a pista é $\mu = 1$ e supondo-se que não ocorre desalinhamento entre cavalo e carreta e que as suspensões não se deformam, pede-se:

a) Determinar as equações diferenciais dos movimentos horizontais das massas M_1 e M_2 durante a frenagem;

b) Calcular as freqüências naturais e os modos de vibração do sistema;

c) Desenvolver uma expressão para a força dinâmica que atua no engate durante a frenagem, calculando seu valor máximo.

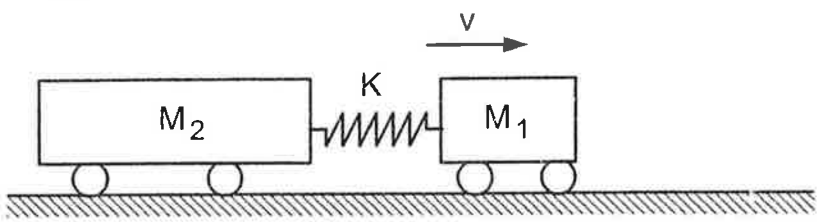


Figura 1: Veículo em Frenagem Súbita do Cavalo Mecânico

2^a Questão

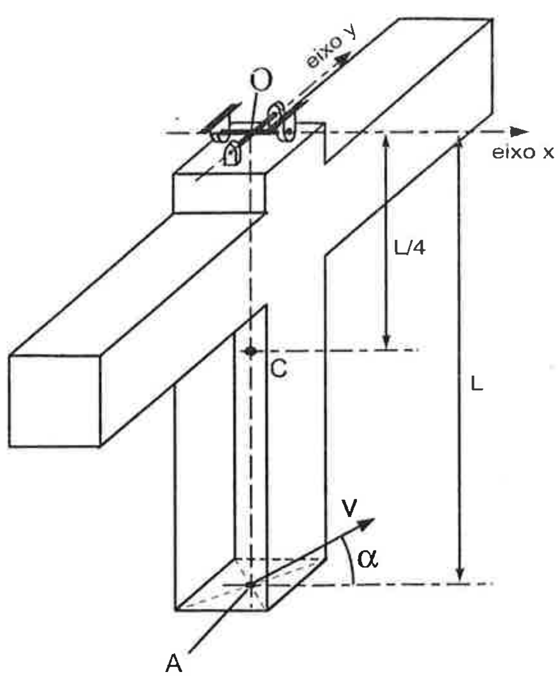


Figura 2: Pêndulo em Forma de Cruz

O sólido em forma de cruz mostrado na figura 2, com altura L, massa m e momentos de inércia $J_{ox} = m \cdot L^2/3$ e $J_{oy} = m \cdot L^2/9$ está articulado em sua extremidade O por meio de uma junta Cardan que possibilita inclinações do sólido em qualquer direção. Sabendo-se que a junta Cardan apresenta o mesmo momento de atrito seco M_{at} em torno dos dois eixos da cruzeta e que o centro de massa C do sólido dista $L/4$ de O, pede-se:

a) Deduzir as equações diferenciais do movimento do ponto A na extremidade inferior do sólido, supondo-se pequenas amplitudes de oscilação;

b) Sendo M_{at} desprezível, calcular as freqüências naturais e os modos principais de vibrar do ponto A do sólido;

c) Supondo M_{at} desprezível e que no instante $t = 0$ o ponto A está na posição de equilíbrio e apresenta uma velocidade v horizontal na direção indicada na figura, determinar a projeção da trajetória do ponto A no plano horizontal.

3^a Questão

O modelo dinâmico de parâmetros concentrados indicado na figura 3 pretende representar a formação de ondas acústicas em um cano de escapamento de motor de combustão interna, o qual é submetido em uma de suas extremidades à introdução forçada dos gases que saem dos cilindros do motor e tem a outra extremidade livre para a atmosfera. Os valores de K e M estão relacionados com o módulo de compressibilidade e massa específica dos gases, e w_f à freqüência angular de explosão do motor. Pede-se:

a) Determinar as equações diferenciais dos movimentos das massas M e $M/2$ do modelo original;

b) Calcular as freqüências naturais e os modos de vibração do modelo original;

c) Calcular as amplitudes de vibração das massas M e $M/2$ em regime permanente para $w_f^2 = 4 \cdot K/M$.

Com o objetivo de reduzir a formação de ruído na freqüência de explosão, modificou-se o modelo original, adicionando-se o absorvedor dinâmico de massa m e rigidez k indicado na figura 3. Para este novo modelo, pede-se:

d) Sendo $w_f^2 = 4 \cdot K/M$, qual a relação entre k e m que minimiza as oscilações das massas M e $M/2$, e sendo $k = K/5$, qual a amplitude do movimento de m ?

e) Se o mesmo absorvedor fosse adicionado à massa $M/2$ ao invés de a M, ele teria o mesmo efeito no sistema? Por que?

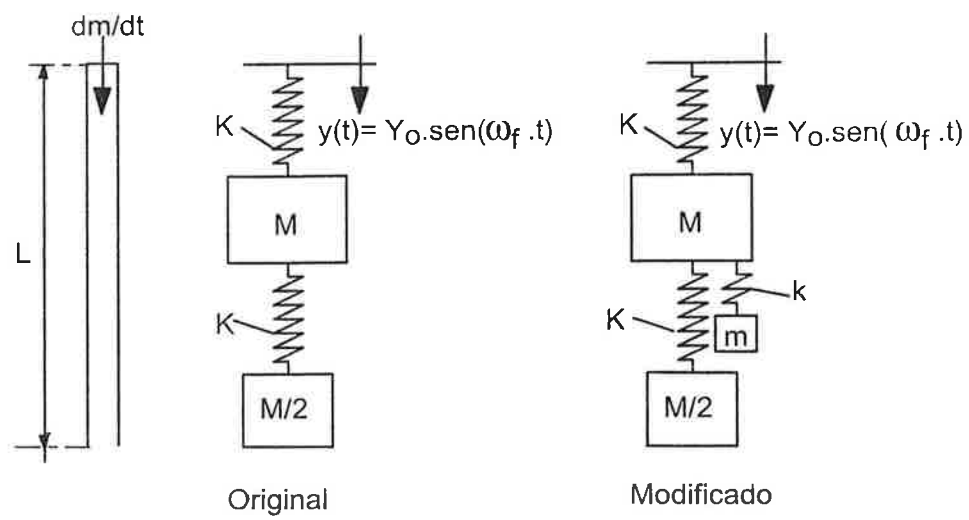


Figura 3: Modelo Dinâmico de Massas Concentradas do Cano de Escapamento

Solução 3ª Prova PME2341 30/6/14

1ª Q

(a)

$$
\begin{cases}
m_2 \times & m_1 \ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = -\mu m_1 g \\
m_1 \times & m_2 \ddot{x}_2 - K(x_1 - x_2) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + K(m_1+m_2)(x_2 - x_1) = \mu m_2 m_1 g \\
m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = -\mu m_1 g
\end{cases}
$$

(b) Frequências naturais e modos de vibrar. (solução dos sistema de equações homogêneas)

Definindo $y_1(t) = \dfrac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1+m_2}$

$y_2(t) = x_2(t) - x_1(t)$

$$
\begin{cases}
(m_1+m_2)\ddot{y}_1 = 0 \\
m_1 m_2 \ddot{y}_2 + K(m_1+m_2)\, y_2 = 0
\end{cases}
$$

1º modo
$$
\begin{cases}
y_1(t) = C t + D \quad \therefore \boxed{\omega_1 = 0} \\
y_2(t) = 0 = A_2 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) - A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \phi_1) \quad \therefore \boxed{A_{11} = A_{21}}
\end{cases}
$$

2º modo
$$
\begin{cases}
y_1(t) = 0 \quad \therefore m_1 A_1 = -m_2 A_2 \quad \therefore \boxed{A_{22} = -\frac{m_1}{m_2} A_{12}} \\
y_2(t) = B \operatorname{sen}(\omega_2 t + \phi_2) \;;\; \omega_2 = \sqrt{\dfrac{K(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}
\end{cases}
$$

c) $F_{din} = K \cdot y_2(t) \therefore F_{din} = K(y_{2_h}(t) + y_{2_p}(t)) = K \cdot y_2(t)$

C.I. p/ $t=0$ $\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 = y_2(0) \\ \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0 = \dot{y}_2(0) \end{cases}$

$$\begin{cases} y_2(t) = E\sin(\omega_2 t) + F\cos(\omega_2 t) + \dfrac{\mu m_1 m_2 g}{K(m_1+m_2)} \\ \dot{y}_2(t) = E\omega_2\cos(\omega_2 t) - F\omega_2\sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

$$y_2(0) = F + \frac{\mu m_1 m_2 g}{K(m_1+m_2)} = 0$$

$$\dot{y}_2(0) = 0 = E$$

$$y_2(t) = \frac{\mu m_1 m_2 g}{K(m_1+m_2)} \cdot \left(1 - \cos(\omega_2 t)\right)$$

$$F_{din} = \frac{\mu \cdot m_1 m_2 g}{m_1+m_2} \cdot \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{K(m_1+m_2)}{m_1 m_2}} \cdot t\right)\right)$$

$$F_{din_{max}} = \frac{2\mu m_1 m_2 g}{m_1+m_2}$$

2.a) $\begin{cases} J_{ox} \cdot \ddot{\phi} + mg\dfrac{L}{4}\phi + M_{at} \cdot \dfrac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|} = 0 \\ J_{oy} \cdot \ddot{\psi} + mg\dfrac{L}{4}\psi + M_{at} \cdot \dfrac{\dot{\psi}}{|\dot{\psi}|} = 0 \end{cases}$

mas para o ponto A $\begin{cases} x_A = L \cdot \psi \\ y_A = L \cdot \phi \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{mL^2}{3} \cdot \dfrac{\ddot{y}_A}{L} + \dfrac{M_{at}}{m} \cdot \dfrac{\dot{y}_A}{|\dot{y}_A|} + mg \cdot \dfrac{L}{4} \cdot y_A = 0 \\ \dfrac{mL^2}{9} \cdot \dfrac{\ddot{x}_A}{L} + \dfrac{M_{at} \cdot \dot{x}_A}{mL|\dot{x}_A|} + mg \cdot \dfrac{L}{4} \cdot x_A = 0 \end{cases}$$

(1,5)

$$\begin{cases} \ddot{y}_A + \dfrac{3M_{at}}{mL} \cdot \dfrac{\dot{y}_A}{|\dot{y}_A|} + \dfrac{3g}{4L} y_A = 0 \\ \ddot{x}_A + \dfrac{9M_{at}}{mL} \cdot \dfrac{\dot{x}_A}{|\dot{x}_A|} + \dfrac{9g}{4L} x_A = 0 \end{cases}$$

(1,0)

1º modo $\begin{cases} y_A = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{3g}{4L}}\, t + \phi_1\right) \\ x_A = 0 \end{cases}$

2º modo $\begin{cases} y_A = 0 \end{cases}$

c) Sendo $\dot{y}_A(0) = V \sin\alpha$ e $y_A(0) = 0$

$\dot{x}_A(0) = V\cos\alpha$, $x_A(0) = 0$

$y_A = A\sin(\omega_1 t)$ ∴ $\dot{y}_A(t) = A\omega_1 \cos(\omega_1 t)$

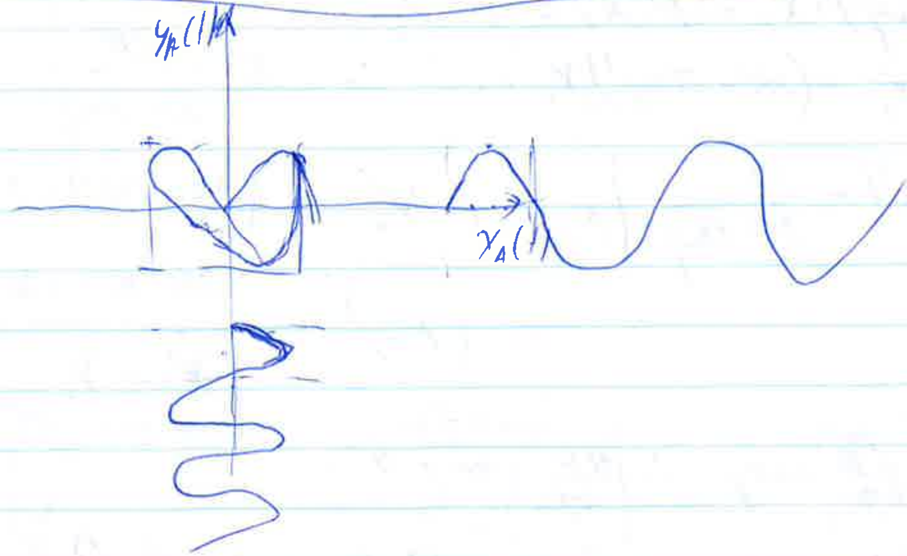
$x_A = B\sin(\omega_2 t)$ ∴ $\dot{x}_A(t) = B\omega_2 \cos(\omega_2 t)$

$\dot{y}_A(0) = A\omega_1 = V\sin\alpha$ ∴ $\boxed{A = \frac{V\sin\alpha}{\omega_1}}$

$\dot{x}_A(0) = B\omega_2 = V\cos\alpha$ ∴ $\boxed{B = \frac{V\cos\alpha}{\omega_2}}$

$$\begin{cases} y_A(t) = \frac{V\sin\alpha}{\omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t) & ; \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{4L}} \\ x_A(t) = \frac{V\cos\alpha}{\omega_2} \cdot \sin(\omega_2 t) & ; \omega_2 = \sqrt{\frac{9g}{4L}} = \sqrt{3}\cdot\omega_1 \end{cases}$$

$$\boxed{y_A(t) = \frac{V\sin\alpha}{\omega_1} \cdot \sin\left(\omega_1 \cdot \frac{\arcsin}{\omega_2}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\omega_1\cdot x_A(t)}{V\cos\alpha}\right)\right)}$$ $(1,0)$



3ª Q)

$$\begin{cases} M\cdot\ddot{x}_1 = K\cdot(x_2 - x_1) + K(y - x_1) \\ \frac{M}{2}\ddot{x}_2 = K\cdot(x_1 - x_2) \end{cases}$$

(1,0) $M\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = Ky(t) = K\cdot Y_0 \sin(\omega_f t)$

b) Modos de vibrar e frequências naturais (sistema de equações homogêneas)

$$M\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = 0$$

$$M\ddot{x}_2 - 2Kx_1 + 2Kx_2 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi) \\ x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (2K - M\omega^2)A_1 - KA_2 = 0 \\ -2K A_1 + (2K - M\omega^2)A_2 = 0 \end{array}$$

$$(2K - M\omega^2)^2 - 2K^2 = 0 \quad \therefore \quad M\omega^2 = \begin{cases}(2 - \sqrt{2})K \\ (2 + \sqrt{2})K\end{cases}$$

$$\boxed{\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\cdot\frac{K}{M}} \quad \boxed{\omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\cdot\frac{K}{M}}$$

$$p/\ \omega^2 = \omega_1^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{2}A_{11} = A_{21}} \qquad (1,0)$$

$$p/\ \omega^2 = \omega_2^2 \Rightarrow \boxed{-\sqrt{2}A_{12} = A_{22}}$$

c) solução em regime permanente

$$\left\{\begin{array}{l} M\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = KY_0 \sin(\omega_f t) \\ M\ddot{x}_2 - 2Kx_1 + 2Kx_2 = 0 \end{array}\right. \quad \therefore \quad \begin{array}{l} x_{1p}(t) = X_1 \sin(\omega_f t) \\ x_{2p}(t) = X_2 \cdot \sin(\omega_f t) \end{array}$$

$$\omega_f^2 = 4\frac{K}{M}$$

$$(2K - M\omega_f^2)\cdot X_1 - K\cdot X_2 = KY_0$$

$$-2K X_1 + (2K - M\omega_f^2)X_2 = 0 \quad \therefore \quad X_2 = \frac{2K}{2K - M\omega_f^2}\cdot X_1$$

$$\left[(2K - M\omega_f^2) - \frac{2K^2}{2K - M\omega_f^2}\right]X_1 = KY_0 \quad \therefore \quad [(2K - M\omega_f^2)^2 - 2K^2]X_1 = (2K - M\omega_f^2)\cdot KY_0$$

$$2K^2X_1 = -2K^2Y_0 \quad \therefore \quad \boxed{X_1 = -Y_0}$$

$$(1,0) \qquad \boxed{X_2 = Y_0}$$

d) $\omega_{abs} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_f \quad \therefore \quad \boxed{4\frac{K}{M}\cdot m = k}$

Isto faz com que a massa M fique parada. Portanto $K\cdot Y_0 = k\cdot X_{abs}$

Com $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$ e a massa $\frac{M}{2}$ também fica parada $\quad (0,5) \quad \therefore \boxed{X_{abs} = 5\cdot Y_0}$

e) Se abrir-se a $\frac{M}{2}$, provocaria a perda desta massa, mas a massa M se moveria com: $M\cdot\ddot{x}_1(t) + 2Kx_1 = KY_0 \sin(\omega_f t)$

$$X_{1p} = \frac{Y_0/2}{1 - \omega_f^2 \ldots} = \frac{Y_0/2}{\ldots} \quad \therefore \quad \boxed{X_1 = -Y_0/\ldots}$$

PME2341 — **3ª Prova** — **24/06/2003**

Prof. Francisco E. Baccaro Nigro — *Prof. Walter Ponge-Ferreira*

1 Questão

Um esmeril de massa total M, cujo rotor de massa m gira a *1720 rpm*, é suportado por um pedestal de massa e amortecimento desprezíveis. Devido ao desbalanceamento estático do rotor, que satisfaz, no limite, a classe de balanceamento ISO G 100, o esmeril vibra horizontalmente com uma velocidade de vibração de *50 mm/s* (valor de pico), e sabe-se que a freqüência natural da vibração horizontal do esmeril é menor que a freqüência de rotação. Deseja-se dimensionar um absorvedor dinâmico de vibrações formado por uma massa m_{abs} suportada por duas molas de rigidez $k/2$, como indicado na figura 1. Pede-se:

i) Deduzir as equações diferenciais dos movimentos horizontais do corpo do esmeril e da massa m_{abs}.

ii) Sendo dados que $M = 20$ kg e $m = 5$ kg, e lembrando que o rotor está com um desbalanceamento estático no limite da classe ISO G 100, estimar a freqüência natural do esmeril sem o absorvedor incorporado.

iii) Determinar a rigidez equivalente do pedestal.

iv) Sendo desejável que a amplitude do deslocamento da massa do absorvedor em relação ao corpo do esmeril não ultrapasse *1 mm*, calcular o valor de m_{abs} e de k.

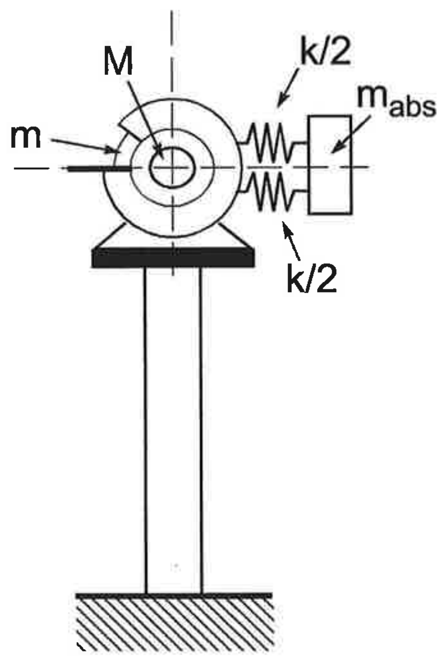


Figura 1: Esmeril com absorvedor dinâmico

2 Questão

O sistema rotativo apresentado na figura 2 é formado por três discos com os valores de momento de inércia indicados na figura, ligados por dois eixos de rigidez k_t, feitos de um material com coeficiente de histerese b. Sabendo-se que os mancais de apoio apresentam atrito desprezível, pede-se:

i) Deduzir as equações diferenciais dos movimentos angulares dos discos

ii) Determinar as freqüências naturais e os modos de vibração do sistema não amortecido.

iii) Calcular os fatores de amortecimento para cada modo de vibração.

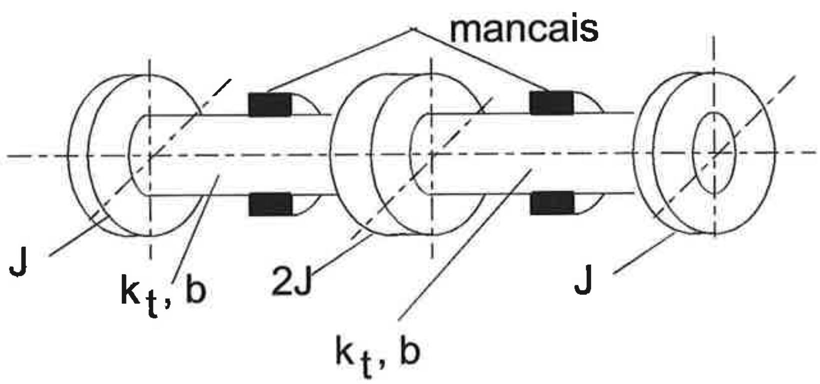


Figura 2: Sistema de vibração torsional

3 Questão

Um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, com freqüência natural ω_n, deve ser excitado com um eletroímã. A força exercida pelo eletroímã é proporcional ao quadrado da corrente elétrica aplicada à sua bobina, i. e.,

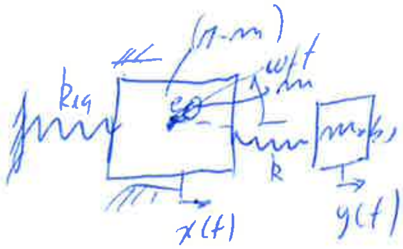
$$F(t) = \beta \left[I_0 + I_1 \sin(\Omega t) \right]^2$$

Pede-se:

i) Determinar a série de Fourier da força de excitação.

ii) Para quais valores da freqüência de excitação Ω haverá ressonância do sistema?

1ª Q.



$$(M-m)\ddot{x} + m\cdot\ddot{\overline{(x+e\cos\omega_f t)}} = -k_{eq}x - k(x-y)$$

$$m_{abs}\,\ddot{y} = -k(y-x)$$

(i)
$$\begin{cases} M\ddot{x} + (k_{eq}+k)x - ky = me\omega_f^2\cos(\omega_f t) \\ m_{abs}\cdot\ddot{y} - kx + ky = 0 \end{cases}$$

1,5

(ii) Sem absorvedor

$$M\ddot{x} + k_{eq}x = me\omega_f^2\cos(\omega_f t)$$

$$x_p = X_p\cdot\cos(\omega_f t - \varphi) \qquad X_p = \frac{me\omega_f^2/k_{eq}}{\left|1-\left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2\right|} = \frac{\frac{me}{M}\cdot\left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2}{\left|1-\left(\frac{\omega_f}{\omega}\right)^2\right|}$$

$$X_p\cdot\omega_f = \dot{X}_p = \frac{m}{M}\cdot e\cdot\omega_f\cdot\frac{r^2}{|1-r^2|}$$

$$50\times10^{-3} = \frac{5}{20}\cdot100\times10^{-3}\cdot\frac{r^2}{|1-r^2|} \quad \therefore \quad r^2 = 2 \; ; \; \boxed{r=\sqrt{2}} > 1$$

1,0

$$r^2 = \frac{2}{3} \qquad \cancel{r = \sqrt{\tfrac{2}{3}} < 1}$$

$$\omega_f = \frac{1720}{60}\cdot2\pi = 180\ rad/s \quad \therefore \quad \boxed{\omega = 127{,}3\ rad/s}$$

(iii)
$$\omega^2 = \frac{k_{eq}}{M} \quad \therefore \quad \boxed{k_{eq} = 3{,}24\times10^5\ N/m}$$

(iv)
$$\omega_{abs} = \omega_f = 180\ rad/s = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

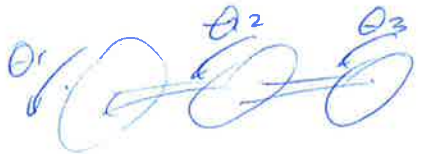
$$F_{abs} = me\omega_f^2 = me\omega_f\cdot\omega_f = 5\cdot100\times10^{-3}\cdot180 = 90N = k\cdot Y \;\therefore$$

$$Y = 1mm \;\therefore\; \boxed{k = 90\times10^3\ N/m}$$

(1,0)

$$m = \frac{k}{\omega_f^2} \;\therefore\; \boxed{m = 2{,}78\ kg}$$

2ª Q



$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 + k_t(\theta_1-\theta_2) + c_{eq}(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2) = 0 \\ 2J\ddot{\theta}_2 \cancel{+}\, k_t(\theta_1-\theta_2) + k_t(\theta_2-\theta_3) + c_{eq}(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) + \\ \qquad + c_{eq}\cdot(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_3) = 0 \\ J\cdot\ddot{\theta}_3 + k_t(\theta_3-\theta_2) + c_{eq}\cdot(\dot{\theta}_3-\dot{\theta}_2) = 0 \end{cases}$$

(i)
$$J\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\\ \ddot{\theta}_3\end{pmatrix} + c_{eq}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix} + k_t\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(2,0)

$c_{eq} = \dfrac{b\cdot k_t}{\omega_i}$; onde ω_i é a frequência angular correspondente.

(ii)

$$\begin{vmatrix} \left(1-\frac{J\omega^2}{k_t}\right) & -1 & 0 \\ -1 & \left(2-\frac{2J\omega^2}{k_t}\right) & -1 \\ 0 & -1 & \left(1-\frac{J\omega^2}{k_t}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore 2(1-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda)\cdot 2 = 0$$

$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)\cdot(1-\lambda)-2\right] = 0$

$(1-\lambda)\,\lambda\,(2-\lambda) = 0$

(1,0)

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & \boxed{\omega_1^2 = 0} \\ \lambda_2 = 1 \quad \therefore & \boxed{\omega_1^2 = \frac{k_t}{J}} \\ \lambda_3 = 2 & \boxed{\omega_2^2 = \frac{2k_t}{J}} \end{cases}$$

$\omega_1^2 = 0$ vem $\theta_{11} = \theta_{21} = \theta_{31}$

$\omega_2^2 = \frac{k_t}{J}$ vem $\theta_{12} = -\theta_{32}$ e $\theta_{22} = 0$

$\omega_3^2 = \frac{2k_t}{J}$ vem $\theta_{13} = -\theta_{23}$ e $\theta_{33} = -\theta_{23}$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) $\zeta_1 = 0$ (1º modo)

p/ 2º modo $J\ddot{\theta}_{11} + c_{eq}\dot{\theta}_{11} + k_t\theta_{11} = 0$ pois $\theta_{21} = 0$

(0,5)
$$\boxed{\zeta_2 = \frac{c_{eq}}{2\sqrt{k_t\cdot J}} = \frac{b\,k_t}{2\omega_2\cdot\sqrt{k_t\cdot J}} = \frac{b}{2}}$$

p/ 3º modo

$\boxed{3-a}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$
$= 1 - 2\sin^2\alpha$

(i) $F(t) = \beta[I_0 + I_1 \operatorname{sen}(\Omega t)]^2 = \beta \cdot [I_0^2 + 2I_0I_1 \operatorname{sen}(\Omega t) + I_1^2 \operatorname{sen}^2(\Omega t)] =$

$= \beta \cdot I_0^2 + 2I_0I_1\beta \operatorname{sen}(\Omega t) + \beta I_1^2 \left(\frac{1-\cos(2\Omega t)}{2}\right) =$

$F(t) = \beta\left(I_0^2 + \frac{I_1^2}{2}\right) + 2I_0I_1\beta \operatorname{sen}(\Omega t) - \frac{\beta I_1^2}{2} \cos(2\Omega t)$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \beta\left(I_0^2 + \frac{I_1^2}{2}\right) + 2I_0I_1\beta \operatorname{sen}(\Omega t) - \frac{\beta I_1^2}{2} \cos(2\Omega t)$

(ii) para $\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ e para $2\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ou $\boxed{\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}}$