31/03/2020

Potenciais

Prof. Edivaldo Moura Santos

Potencial escalar e potencial vetor

- **De acordo com as equações de Maxwell:**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Potencial escalar e potencial vetor

- **De acordo com as equações de Maxwell:**

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && (1)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (2)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (3)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && (4)
\end{aligned}
$$

- **Além de disso, de acordo com o teorema de Helmholtz, para qualquer campo vetorial F, cujo divergente e rotacional vão a zero no infinito mais rápido que r^{-2}, podemos escrever:**

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W}$$

Potencial escalar e potencial vetor

- **De acordo com as equações de Maxwell:**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4}$$

- **Além de disso, de acordo com o teorema de Helmholtz, para qualquer campo vetorial F, cujo divergente e rotacional vão a zero no infinito mais rápido que r^{-2}, podemos escrever:**

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W}$$

onde

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{\mathscr{r}} d\tau' \qquad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla \times \mathbf{F}}{\mathscr{r}} d\tau' \qquad \mathscr{r} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

Potencial escalar e potencial vetor

- **De acordo com as equações de Maxwell:**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

- **Além de disso, de acordo com o teorema de Helmholtz, para qualquer campo vetorial F, cujo divergente e rotacional vão a zero no infinito mais rápido que r^{-2}, podemos escrever:**

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W}$$

onde

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{\mathscr{r}} d\tau' \qquad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla \times \mathbf{F}}{\mathscr{r}} d\tau' \qquad \mathscr{r} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

- **Portanto, nesses casos o divergente e o rotacional do campo o definem por completo.**

- **Sendo assim, podemos escrever B como o rotacional de um campo vetorial A:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \textbf{(5)}$$

- **Sendo assim, podemos escrever B como o rotacional de um campo vetorial A:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad (5)$$

- **Diferentemente do caso eletrostático, o campo elétrico E não pode mais ser escrito simplesmente como o gradiente de um campo escalar V.**

- **Sendo assim, podemos escrever B como o rotacional de um campo vetorial A:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \textbf{(5)}$$

- **Diferentemente do caso eletrostático, o campo elétrico E não pode mais ser escrito simplesmente como o gradiente de um campo escalar V.**

- **No entanto, de acordo com a equação de Maxwell (3)**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \mathbf{A} \right)$$

- **Sendo assim, podemos escrever B como o rotacional de um campo vetorial A:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \textbf{(5)}$$

- **Diferentemente do caso eletrostático, o campo elétrico E não pode mais ser escrito simplesmente como o gradiente de um campo escalar V.**

- **No entanto, de acordo com a equação de Maxwell (3)**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \Longrightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

- **Sendo assim, podemos escrever B como o rotacional de um campo vetorial A:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \textbf{(5)}$$

- **Diferentemente do caso eletrostático, o campo elétrico E não pode mais ser escrito simplesmente como o gradiente de um campo escalar V.**

- **No entanto, de acordo com a equação de Maxwell (3)**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \Longrightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

- **Portanto, a combinação entre parêntesis pode ser escrita como um gradiente**

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

- **Sendo assim, podemos escrever B como o rotacional de um campo vetorial A:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \textbf{(5)}$$

- **Diferentemente do caso eletrostático, o campo elétrico E não pode mais ser escrito simplesmente como o gradiente de um campo escalar V.**

- **No entanto, de acordo com a equação de Maxwell (3)**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \Longrightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

- **Portanto, a combinação entre parêntesis pode ser escrita como um gradiente**

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \Longrightarrow \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \textbf{(6)}$$

- **Sendo assim, podemos escrever B como o rotacional de um campo vetorial A:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \textbf{(5)}$$

- **Diferentemente do caso eletrostático, o campo elétrico E não pode mais ser escrito simplesmente como o gradiente de um campo escalar V.**

- **No entanto, de acordo com a equação de Maxwell (3)**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \Longrightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

- **Portanto, a combinação entre parêntesis pode ser escrita como um gradiente**

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \Longrightarrow \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \textbf{(6)}$$

- **Equações (5) e (6) permitem obter os campos a partir dos potenciais escalar V e vetor A**

V $\longrightarrow$ **potencial escalar**

A $\longrightarrow$ **potencial vetor**

- **Sendo assim, podemos escrever B como o rotacional de um campo vetorial A:**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \textbf{(5)}$$

- **Diferentemente do caso eletrostático, o campo elétrico E não pode mais ser escrito simplesmente como o gradiente de um campo escalar V.**

- **No entanto, de acordo com a equação de Maxwell (3)**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \Longrightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$$

- **Portanto, a combinação entre parêntesis pode ser escrita como um gradiente**

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \Longrightarrow \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \textbf{(6)}$$

- **Equações (5) e (6) permitem obter os campos a partir dos potenciais escalar V e vetor A**

V $\longrightarrow$ **potencial escalar**

A $\longrightarrow$ **potencial vetor**

- **Vejamos que equações os próprios potenciais satisfazem.**

- **A equação associada à lei de Gauss implica**

$$\nabla \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad = \quad \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- **A equação associada à lei de Gauss implica**

$$\begin{aligned}\nabla\left(-\nabla V-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2 V+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

- **A equação associada à lei de Gauss implica**

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

- **Já a lei de Ampère-Maxwell**

$$
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)
$$

- **A equação associada à lei de Gauss implica**

$$\begin{aligned}\nabla\left(-\nabla V-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2 V+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

- **Já a lei de Ampère-Maxwell**

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \mu_0\mathbf{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\\ \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} &= \mu_0\mathbf{J}-\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

- **A equação associada à lei de Gauss implica**

$$\begin{aligned}
\nabla\left(-\nabla V-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\\
\nabla^2 V+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

- **Já a lei de Ampère-Maxwell**

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \mu_0\mathbf{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\\
\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} &= \mu_0\mathbf{J}-\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

- **Logo**

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\mu_0\mathbf{J}$$

- **A equação associada à lei de Gauss implica**

$$\nabla\cdot\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

- **Já a lei de Ampère-Maxwell**

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \mu_0\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\\ \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} &= \mu_0\mathbf{J} - \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

- **Logo**

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{J}}$$

Equações diferenciais acopladas para os potenciais

- **Definindo o operador diferencial d'Alembertiano:**

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- **Definindo o operador diferencial d'Alembertiano:**

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- **Podemos escrever**

$$\Box^2 \mathbf{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- **Definindo o operador diferencial d'Alembertiano:**

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- **Podemos escrever**

$$\Box^2 \mathbf{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- **Além disso**

$$\Box^2 V + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad = \quad -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- **Definindo o operador diferencial d'Alembertiano:**

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- **Podemos escrever**

$$\Box^2 \mathbf{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- **Além disso**

$$\begin{aligned}
\Box^2 V + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad &= \quad -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\Box^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) \quad &= \quad -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

- **Definindo o operador diferencial d'Alembertiano:**

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- **Podemos escrever**

$$\Box^2 \mathbf{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- **Além disso**

$$\begin{aligned}
\Box^2 V + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\Box^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)}_{\equiv L} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

- **Definindo o operador diferencial d'Alembertiano:**

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- **Podemos escrever**

$$\Box^2 \mathbf{A} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- **Além disso**

$$\begin{aligned}
\Box^2 V + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\Box^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)}_{\equiv L} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

- **Logo, as equações para os potenciais podem ser escritas em forma mais simétrica:**

$$\begin{aligned}
\Box^2 \mathbf{A} - \nabla L &= -\mu_0 \mathbf{J} \\
\Box^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Invariância de calibre

- **As equações**

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}$$

não definem os potenciais de maneira unívoca.

Invariância de calibre

- **As equações**

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}$$

não definem os potenciais de maneira unívoca.

- **Dito de outra forma, há mais de uma solução para as equações**

$$\begin{aligned}\Box^2 \mathbf{A} - \nabla L &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \Box^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

que levam aos mesmos campos E e B.

Invariância de calibre

- **As equações**

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

não definem os potenciais de maneira unívoca.

- **Dito de outra forma, há mais de uma solução para as equações**

$$\begin{aligned} \Box^2 \mathbf{A} - \nabla L &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \Box^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

que levam aos mesmos campos E e B.

- **Já tínhamos encontrado uma tal liberdade de escolha do potencial A no caso magnetostático, em que incluímos a condição**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

para determinar A de forma unívoca.

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V &\longrightarrow V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V &\longrightarrow V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda$$
$$V \longrightarrow V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **Prova:**

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}'$$

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda$$
$$V \longrightarrow V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **Prova:**

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\lambda)$$

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **Prova:**

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\lambda$$

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **Prova:**

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\lambda}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{B}$$

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **Prova:**

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\lambda}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}' \quad = \quad -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$$

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **Prova:**

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\lambda}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}' \quad = \quad -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\lambda)$$

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **Prova:**

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\lambda}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \quad &= \quad -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\lambda) \\ &= \quad -\nabla V + \nabla\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\lambda = \mathbf{E} \end{aligned}$$

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **Prova:**

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\lambda}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \quad &= \quad -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\lambda) \\ &= \quad -\nabla V + \nabla\frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\lambda = \mathbf{E} \end{aligned}$$

- **Portanto, existe uma infinidade de potenciais V e A associados aos mesmos campos E e B**

- **No caso em questão, em que os campos são dependentes do tempo, a seguinte transformação**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V &\longrightarrow V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Tranformação de calibre
ou
transformação de gauge

onde lambda é qualquer função escalar dependente de r e t:

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$$

mantém os campos E e B inalterados.

- **Prova:**

$$\mathbf{B}' = \nabla\times\mathbf{A}' = \nabla\times(\mathbf{A}+\nabla\lambda) = \nabla\times\mathbf{A} + \underbrace{\nabla\times\nabla\lambda}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla V' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}+\nabla\lambda) \\ &= -\nabla V + \nabla\frac{\partial\lambda}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\lambda = \mathbf{E} \end{aligned}$$

- **Portanto, existe uma infinidade de potenciais V e A associados aos mesmos campos E e B**
- **Podemos usar a invariância de E e B sob transformações de calibre a nossa favor, escolhendo lambda de modo a simplificar as equações para V e A.**

Calibre de Coulomb

- **A escolha de lambda é também chamada de fixação do gauge ou calibre.**

Calibre de Coulomb

- **A escolha de lambda é também chamada de fixação do gauge ou calibre.**
- **Lembre-se que, no caso estático, já havíamos feito uma fixação de calibre, escolhendo lambda tal que**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Calibre de Coulomb

- **A escolha de lambda é também chamada de fixação do gauge ou calibre.**
- **Lembre-se que, no caso estático, já havíamos feito uma fixação de calibre, escolhendo lambda tal que**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- **Neste caso, a equação para A, por exemplo**

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Calibre de Coulomb

- **A escolha de lambda é também chamada de fixação do gauge ou calibre.**
- **Lembre-se que, no caso estático, já havíamos feito uma fixação de calibre, escolhendo lambda tal que**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- **Neste caso, a equação para A, por exemplo**

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

reduz-se a

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Calibre de Coulomb

- **A escolha de lambda é também chamada de fixação do gauge ou calibre.**
- **Lembre-se que, no caso estático, já havíamos feito uma fixação de calibre, escolhendo lambda tal que**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- **Neste caso, a equação para A, por exemplo**

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

reduz-se a

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

3 equações de Poisson

Calibre de Coulomb

- **A escolha de lambda é também chamada de fixação do gauge ou calibre.**
- **Lembre-se que, no caso estático, já havíamos feito uma fixação de calibre, escolhendo lambda tal que**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- **Neste caso, a equação para A, por exemplo**

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

reduz-se a

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \Longleftarrow$$

3 equações de Poisson

cuja solução é

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} d\tau'$$

Calibre de Coulomb

- **No caso dependente do tempo, a escolha para o divergente de A continua a mesma**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Calibre de Coulomb

- **No caso dependente do tempo, a escolha para o divergente de A continua a mesma**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

o que implica que A satisfaz agora

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

Calibre de Coulomb

- **No caso dependente do tempo, a escolha para o divergente de A continua a mesma**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

o que implica que A satisfaz agora

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

- **Já o potencial escalar agora satisfaz**

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Calibre de Coulomb

- **No caso dependente do tempo, a escolha para o divergente de A continua a mesma**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

o que implica que A satisfaz agora

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

- **Já o potencial vetor agora satisfaz**

$$\underbrace{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}_{\text{Poisson}}$$

Calibre de Coulomb

- **No caso dependente do tempo, a escolha para o divergente de A continua a mesma**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

o que implica que A satisfaz agora

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

- **Já o potencial vetor agora satisfaz**

$$\underbrace{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}_{\text{Poisson}} \quad \Longrightarrow \quad V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

Calibre de Coulomb

- **No caso dependente do tempo, a escolha para o divergente de A continua a mesma**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

o que implica que A satisfaz agora

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

- **Já o potencial vetor agora satisfaz**

$$\underbrace{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}_{\text{Poisson}} \quad \Longrightarrow \quad V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

- **O que justifica a denominação desse calibre de Coulomb, já que o potencial escalar é obtido exatamente da mesma forma que aquele do caso estático por meio da lei de Coulomb e do princípio de superposição**

Calibre de Coulomb

- **No caso dependente do tempo, a escolha para o divergente de A continua a mesma**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

o que implica que A satisfaz agora

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

- **Já o potencial vetor agora satisfaz**

$$\underbrace{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}_{\text{Poisson}} \quad \Longrightarrow \quad V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

- **O que justifica a denominação desse calibre de Coulomb, já que o potencial escalar é obtido exatamente da mesma forma que aquele do caso estático por meio da lei de Coulomb e do princípio de superposição**

- **Perceba que a equação para A, por outro lado, é bem mais complicada que a da magnetostática**

Calibre de Coulomb

- **No caso dependente do tempo, a escolha para o divergente de A continua a mesma**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

o que implica que A satisfaz agora

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

- **Já o potencial vetor agora satisfaz**

$$\underbrace{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}_{\text{Poisson}} \quad \Longrightarrow \quad V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

- **O que justifica a denominação desse calibre de Coulomb, já que o potencial escalar é obtido exatamente da mesma forma que aquele do caso estático por meio da lei de Coulomb e do princípio de superposição**
- **Perceba que a equação para A, por outro lado, é bem mais complicada que a da magnetostática**
- **Outro ponto curioso é que nesse calibre o potencial escalar no instante V é obtido da densidade de carga no mesmo instante.**

- **A aparente inconsistência entre a fórmula para o potencial escalar anterior e a teoria da Relatividade Especial é, de fato, só aparente.**

- **A aparente inconsistência entre a fórmula para o potencial escalar anterior e a teoria da Relatividade Especial é, de fato, só aparente.**

- **As quantidades físicas (mensuráveis) são os campos E e B e esses são consistentes com o fato de que nenhum sinal pode se propagar mais rápido que a luz no vácuo.**

Calibre de Lorentz

- **Nesse gauge, fazemos a escolha**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad L = 0$$

Calibre de Lorentz

- **Nesse gauge, fazemos a escolha**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad L = 0$$

- **E portanto**

$$\begin{aligned} \Box^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \Box^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Calibre de Lorentz

- **Nesse gauge, fazemos a escolha**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad L = 0$$

- **E portanto**

$$\begin{aligned} \Box^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \Box^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Calibre de Lorentz

- **Nesse gauge, fazemos a escolha**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad L = 0$$

- **E portanto**

$$\begin{aligned} \Box^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \Box^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

- **As equações acima podem ser vistas como versões em 4 dimensões (3+1) da equação de Poisson.**

Calibre de Lorentz

- **Nesse gauge, fazemos a escolha**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad L = 0$$

- **E portanto**

$$\begin{aligned} \Box^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \Box^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

- **As equações acima podem ser vistas como versões em 4 dimensões (3+1) da equação de Poisson.**

- **Perceba que nesta forma, as fontes (cargas e correntes) aparecem à direita e os potenciais à esquerda.**

Calibre de Lorentz

- **Nesse gauge, fazemos a escolha**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad L = 0$$

- **E portanto**

$$\begin{aligned} \Box^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \Box^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

- **As equações acima podem ser vistas como versões em 4 dimensões (3+1) da equação de Poisson.**

- **Perceba que nesta forma, as fontes (cargas e correntes) aparecem à direita e os potenciais à esquerda.**

- **Nesta forma, as equações são particularmente úteis na formulação do Eletromagnetismo em formato covariante que devemos ver mais adiante no curso.**

Nota sobre invariância de calibre

- **A invariância dos campos eletromagnéticos sob uma transformação de calibre**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Nota sobre invariância de calibre

- **A invariância dos campos eletromagnéticos sob uma transformação de calibre**

$$\mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda$$
$$V \quad \longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

expressa uma simetria presente na teoria eletromagnética.

Nota sobre invariância de calibre

- **A invariância dos campos eletromagnéticos sob uma transformação de calibre**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

  expressa uma simetria presente na teoria eletromagnética.

- **A visão moderna de leis de conservação em Física, está fortemente apoiada na noção de simetria**

Nota sobre invariância de calibre

- A invariância dos campos eletromagnéticos sob uma transformação de calibre

$$\mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda$$
$$V \quad \longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

  expressa uma simetria presente na teoria eletromagnética.

- A visão moderna de leis de conservação em Física, está fortemente apoiada na noção de simetria

- A relação entre simetria e leis de conservação foi mostrada de forma bastante clara no teorema de Noether.

Nota sobre invariância de calibre

- **A invariância dos campos eletromagnéticos sob uma transformação de calibre**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

  expressa uma simetria presente na teoria eletromagnética.

- **A visão moderna de leis de conservação em Física, está fortemente apoiada na noção de simetria**

- **A relação entre simetria e leis de conservação foi mostrada de forma bastante clara no teorema de Noether.**
- **O teorema se baseia na descrição das equações de movimento de uma teoria (clássica ou quântica) como as equações de Euler-Lagrange associadas à Lagrangeana da teoria em questão**

Nota sobre invariância de calibre

- **A invariância dos campos eletromagnéticos sob uma transformação de calibre**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\ V &\longrightarrow V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

  expressa uma simetria presente na teoria eletromagnética.

- **A visão moderna de leis de conservação em Física, está fortemente apoiada na noção de simetria**

- **A relação entre simetria e leis de conservação foi mostrada de forma bastante clara no teorema de Noether.**
- **O teorema se baseia na descrição das equações de movimento de uma teoria (clássica ou quântica) como as equações de Euler-Lagrange associadas à Lagrangeana da teoria em questão**

- **Emmy Noether mostrou que a toda operação de simetria que mantém a lagrangeana inalterada deve corresponder uma carga generalizada sendo conservada.**

Nota sobre invariância de calibre

- A invariância dos campos eletromagnéticos sob uma transformação de calibre

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \\
V \quad &\longrightarrow \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}
\end{aligned}
$$

  expressa uma simetria presente na teoria eletromagnética.

- A visão moderna de leis de conservação em Física, está fortemente apoiada na noção de simetria

- A relação entre simetria e leis de conservação foi mostrada de forma bastante clara no teorema de Noether.
- O teorema se baseia na descrição das equações de movimento de uma teoria (clássica ou quântica) como as equações de Euler-Lagrange associadas à Lagrangeana da teoria em questão

- Emmy Noether mostrou que a toda operação de simetria que mantém a lagrangeana inalterada deve corresponder uma carga generalizada sendo conservada.

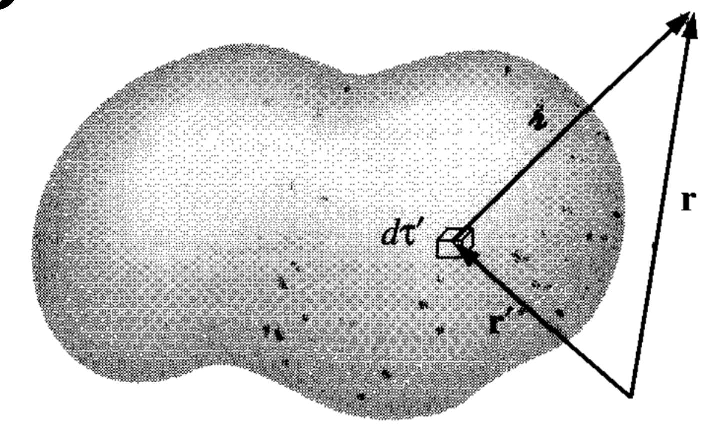
- É, portanto, bastante natural se perguntar qual a carga associada à simetria anterior de invariância de calibre do Eletromagnetismo.

Potenciais retardados

- **A solução das equações para os potenciais no calibre de Lorentz**

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\
\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

Potenciais retardados



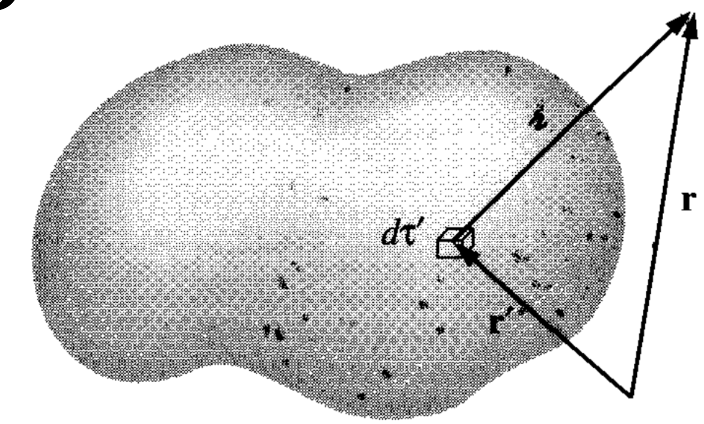
- **A solução das equações para os potenciais no calibre de Lorentz**

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\
\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

- **São conhecidas como potenciais retardados e dados por**

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'
\end{aligned}
$$

Potenciais retardados



- **A solução das equações para os potenciais no calibre de Lorentz**

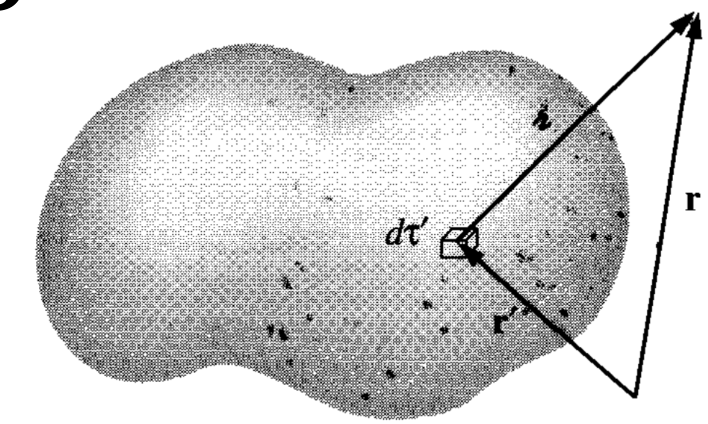
$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\
\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

- **São conhecidas como potenciais retardados e dados por**

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'
\end{aligned}
$$

$$t_r \equiv t - \frac{\mathscr{r}}{c}$$

Potenciais retardados



- **A solução das equações para os potenciais no calibre de Lorentz**

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\
\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

- **São conhecidas como potenciais retardados e dados por**

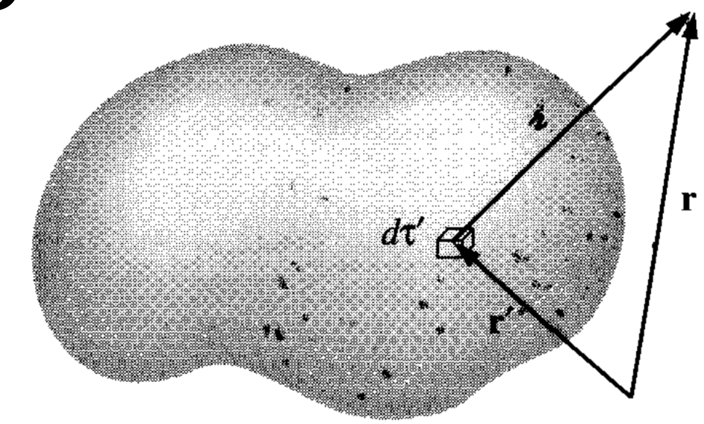
$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'
\end{aligned}
$$

Tempo retardado

$$
\downarrow
$$

$$
t_r \equiv t - \frac{\mathscr{r}}{c}
$$

Potenciais retardados



- **A solução das equações para os potenciais no calibre de Lorentz**

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\
\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

- **São conhecidas como potenciais retardados e dados por**

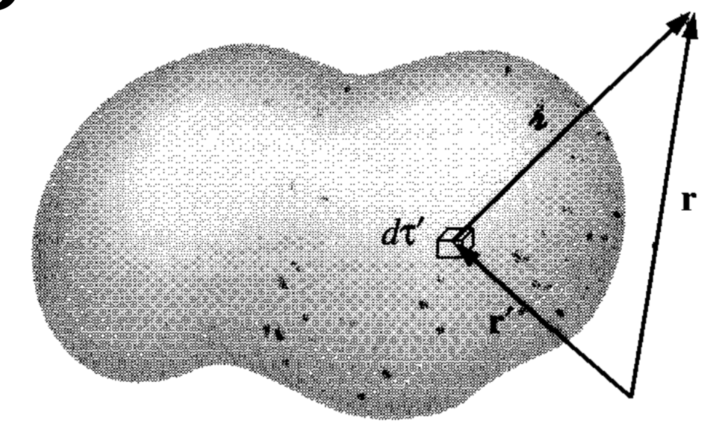
$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'
\end{aligned}
$$

Tempo retardado

$$
t_r \equiv t - \frac{\mathscr{r}}{c}
$$

- **t_r é claramente o tempo que um sinal eletromagnético leva para ir do ponto de carga r′ até o ponto de campo r, propagando-se à velocidade da luz.**

Potenciais retardados



- **A solução das equações para os potenciais no calibre de Lorentz**

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\
\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

- **São conhecidas como potenciais retardados e dados por**

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'
\end{aligned}
$$

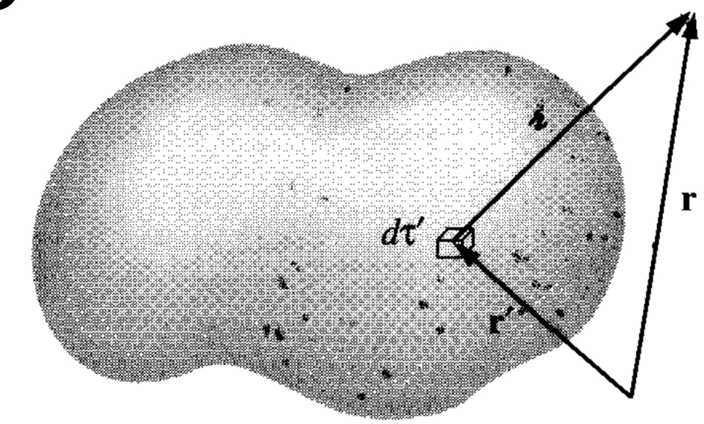
Tempo retardado

$$
t_r \equiv t - \frac{\mathscr{r}}{c}
$$

- **t_r é claramente o tempo que um sinal eletromagnético leva para ir do ponto de carga r′ até o ponto de campo r, propagando-se à velocidade da luz.**

- **Dessa forma, no calibre de Lorentz a consistência entre o Eletromagnetismo e a Relatividade Restrita é mais explícita.**

Potenciais retardados



- **A solução das equações para os potenciais no calibre de Lorentz**

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{J} \\
\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

- **São conhecidas como potenciais retardados e dados por**

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau' \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}} d\tau'
\end{aligned}
$$

Tempo retardado

$$
t_r \equiv t - \frac{\mathscr{r}}{c}
$$

- **t_r é claramente o tempo que um sinal eletromagnético leva para ir do ponto de carga r′ até o ponto de campo r, propagando-se à velocidade da luz.**

- **Dessa forma, no calibre de Lorentz a consistência entre o Eletromagnetismo e a Relatividade Restrita é mais explícita.**

- **É importante lembrar que mesmo no calibre de Coulomb esta consistência está presente. Ou seja, o Eletromagnetismo, seja qual for o gauge escolhido, é uma teoria relativística.**

- **Tomemos, por exemplo, o caso do potencial escalar**

$$V(\mathbf{r},t) \quad = \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'$$

- **Tomemos, por exemplo, o caso do potencial escalar**

$$V(\mathbf{r},t) \quad = \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'$$

- **Tomando o gradiente de V, temos**

$$\nabla V \quad = \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[(\nabla\rho)\frac{1}{\mathscr{r}} + \rho\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]d\tau'$$

- **Tomemos, por exemplo, o caso do potencial escalar**

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'$$

- **Tomando o gradiente de V, temos**

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[(\nabla\rho)\frac{1}{\mathscr{r}} + \rho\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]d\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}} + \rho\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right]
\end{aligned}$$

- **Tomemos, por exemplo, o caso do potencial escalar**

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'$$

- **Tomando o gradiente de V, temos**

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[(\nabla\rho)\frac{1}{\mathscr{r}} + \rho\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]d\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} + \rho\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right] \end{aligned}$$

onde usou-se:

$$\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t_r}\nabla t_r$$

- **Tomemos, por exemplo, o caso do potencial escalar**

$$V(\mathbf{r},t) \quad = \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'$$

- **Tomando o gradiente de V, temos**

$$\begin{aligned} \nabla V \quad &= \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[(\nabla\rho)\frac{1}{\mathscr{r}} + \rho\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]d\tau' \\ &= \quad -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} + \rho\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right] \end{aligned}$$

$$t_r \equiv t - \frac{\mathscr{r}}{c}$$

onde usou-se:

$$\nabla\rho \quad = \quad \frac{\partial\rho}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\nabla\mathscr{r}\right)$$

- **Tomemos, por exemplo, o caso do potencial escalar**

$$V(\mathbf{r},t) \quad = \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'$$

- **Tomando o gradiente de V, temos**

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[(\nabla\rho)\frac{1}{\mathscr{r}} + \rho\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]d\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}} + \rho\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right] \end{aligned} \qquad t_r \equiv t - \frac{\mathscr{r}}{c}$$

onde usou-se:

$$\nabla\rho \quad = \quad \frac{\partial\rho}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\nabla\mathscr{r}\right) = -\frac{1}{c}\dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}$$

- **Tomemos, por exemplo, o caso do potencial escalar**

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'$$

- **Tomando o gradiente de V, temos**

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[(\nabla\rho)\frac{1}{\mathscr{r}} + \rho\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]d\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}} + \rho\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right]\end{aligned}$$

$$t_r \equiv t - \frac{\mathscr{r}}{c}$$

onde usou-se:

$$\begin{aligned}\nabla\rho &= \frac{\partial\rho}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\nabla\mathscr{r}\right) = -\frac{1}{c}\dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \\ \nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) &= -\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\end{aligned}$$

• **Tomemos, por exemplo, o caso do potencial escalar**

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'$$

• **Tomando o gradiente de V, temos**

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[(\nabla\rho)\frac{1}{\mathscr{r}} + \rho\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]d\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}} + \rho\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right]\end{aligned}$$

$$t_r \equiv t - \frac{\mathscr{r}}{c}$$

onde usou-se:

$$\begin{aligned}\nabla\rho &= \frac{\partial\rho}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\nabla\mathscr{r}\right) = -\frac{1}{c}\dot{\rho}\hat{\mathscr{r}} \\ \nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right) &= -\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\end{aligned}$$

• **Calculando agora o laplaciano e usando**

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}}\right) &= \frac{1}{\mathscr{r}^2} \\ \nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) &= 4\pi\delta(\mathscr{r}) \\ \nabla\dot{\rho} &= -\frac{1}{c}\ddot{\rho}\hat{\mathscr{r}}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{c}(\nabla\dot{\rho})\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}}+\frac{1}{c}\dot{\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}}\right)+(\nabla\rho)\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}+\rho\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\right]d\tau'$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{c}(\nabla\dot{\rho})\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}}+\frac{1}{c}\dot{\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}}\right)+(\nabla\rho)\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}+\rho\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\right]d\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{1}{c^2}\ddot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}}+\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}^2}-\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}^2}+4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})\right]d\tau'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{c}(\nabla\dot{\rho})\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}}+\frac{1}{c}\dot{\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}}\right)+(\nabla\rho)\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}+\rho\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\right]d\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{1}{c^2}\ddot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}}+\cancel{\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}^2}}-\cancel{\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}^2}}+4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})\right]d\tau' \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'-\frac{1}{\epsilon_0}\int\rho(\mathbf{r}',t_r)\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})d\tau'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{c}(\nabla\dot{\rho})\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}} + \frac{1}{c}\dot{\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}}\right) + (\nabla\rho)\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} + \rho\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\right]d\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{1}{c^2}\ddot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}} + \cancel{\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}^2}} - \cancel{\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}^2}} + 4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})\right]d\tau' \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'}_{=V(\mathbf{r},t_r)} - \frac{1}{\epsilon_0}\underbrace{\int\rho(\mathbf{r}', t_r)\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})d\tau'}_{=\rho(\mathbf{r},t_r)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{c}(\nabla\dot{\rho})\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}} + \frac{1}{c}\dot{\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}}\right) + (\nabla\rho)\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} + \rho\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\right]d\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{1}{c^2}\ddot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}} + \cancel{\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}^2}} - \cancel{\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\mathscr{r}^2}} + 4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})\right]d\tau' \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'}_{=V(\mathbf{r},t_r)} - \frac{1}{\epsilon_0}\underbrace{\int\rho(\mathbf{r}', t_r)\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})d\tau'}_{=\rho(\mathbf{r},t_r)}
\end{aligned}
$$

- **Portanto**

$$
\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{c}(\nabla\dot{\rho})\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}+\frac{1}{c}\dot{\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}\right)+(\nabla\rho)\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}+\rho\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}\right)\right]d\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{1}{c^2}\ddot{\rho}\frac{1}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}+\cancel{\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}}-\cancel{\frac{1}{c}\dot{\rho}\frac{1}{\boldsymbol{\mathscr{r}}^2}}+4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})\right]d\tau' \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t_r)}{\boldsymbol{\mathscr{r}}}d\tau'}_{=V(\mathbf{r},t_r)}-\frac{1}{\epsilon_0}\underbrace{\int\rho(\mathbf{r}',t_r)\delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}})d\tau'}_{=\rho(\mathbf{r},t_r)}
\end{aligned}
$$

- **Portanto**

$$
\nabla^2 V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}
$$

- **Um cálculo similar pode ser feito para o potencial vetor retardado, mostrando que ele, de fato, satisfaz**

$$
\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J}
$$

Exemplo

- **Determine os campos e as fontes (cargas e correntes) associados aos seguintes potenciais:**

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2\,\hat{\mathbf{z}}, & |x| \leq ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

x

Exemplo

- **Determine os campos e as fontes (cargas e correntes) associados aos seguintes potenciais:**

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2\,\hat{\mathbf{z}}, & |x| \leq ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

- **Campo elétrico para |x|<ct**

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Exemplo

- **Determine os campos e as fontes (cargas e correntes) associados aos seguintes potenciais:**

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2\, \hat{\mathbf{z}}, & |x| \leq ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

- **Campo elétrico para |x|<ct**

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\hat{\mathbf{z}} = E_z \hat{\mathbf{z}}$$

Exemplo

- **Determine os campos e as fontes (cargas e correntes) associados aos seguintes potenciais:**

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2\,\hat{\mathbf{z}}, & |x| \leq ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

- **Campo elétrico para |x|<ct**

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\hat{\mathbf{z}} = E_z \hat{\mathbf{z}}$$

- **Campo magnético para |x|<ct**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Exemplo

- **Determine os campos e as fontes (cargas e correntes) associados aos seguintes potenciais:**

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2\,\hat{\mathbf{z}}, & |x| \leq ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

- **Campo elétrico para |x|<ct**

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\hat{\mathbf{z}} = E_z\hat{\mathbf{z}}$$

- **Campo magnético para |x|<ct**

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\mathbf{y}}$$

Exemplo

- **Determine os campos e as fontes (cargas e correntes) associados aos seguintes potenciais:**

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2 \, \hat{\mathbf{z}}, & |x| \leq ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

- **Campo elétrico para |x|<ct**

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\hat{\mathbf{z}} = E_z \hat{\mathbf{z}}$$

- **Campo magnético para |x|<ct**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\frac{\partial |x|}{\partial x}\hat{\mathbf{y}} = B_y \hat{\mathbf{y}}$$

Exemplo

- **Determine os campos e as fontes (cargas e correntes) associados aos seguintes potenciais:**

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2\,\hat{\mathbf{z}}, & |x| \leq ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

- **Campo elétrico para |x|<ct**

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\hat{\mathbf{z}} = E_z\hat{\mathbf{z}}$$

- **Campo magnético para |x|<ct**

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mu_0 k}{2c}(ct-|x|)\frac{\partial |x|}{\partial x}\hat{\mathbf{y}} = B_y\hat{\mathbf{y}} = \begin{cases} +\frac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\hat{\mathbf{y}}, & x > 0 \\ -\frac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\hat{\mathbf{y}}, & x < 0 \end{cases}$$

Exemplo

- **Determine os campos e as fontes (cargas e correntes) associados aos seguintes potenciais:**

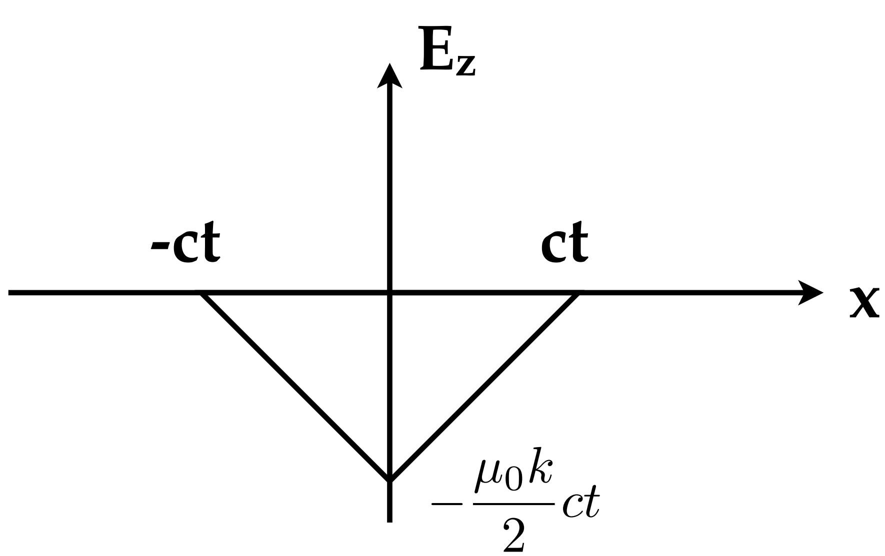
$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2\,\hat{\mathbf{z}}, & |x| \leq ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

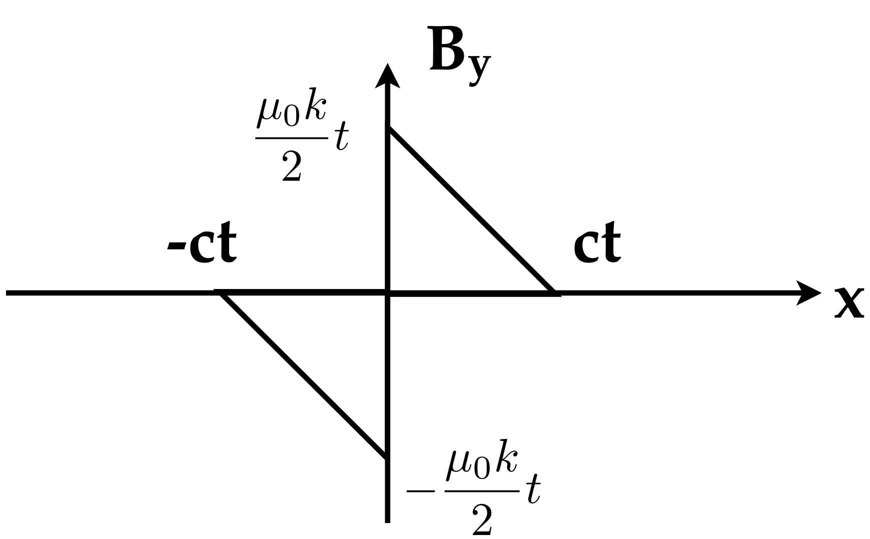
- **Campo elétrico para |x|<ct**

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\hat{\mathbf{z}} = E_z\hat{\mathbf{z}}$$

- **Campo magnético para |x|<ct**

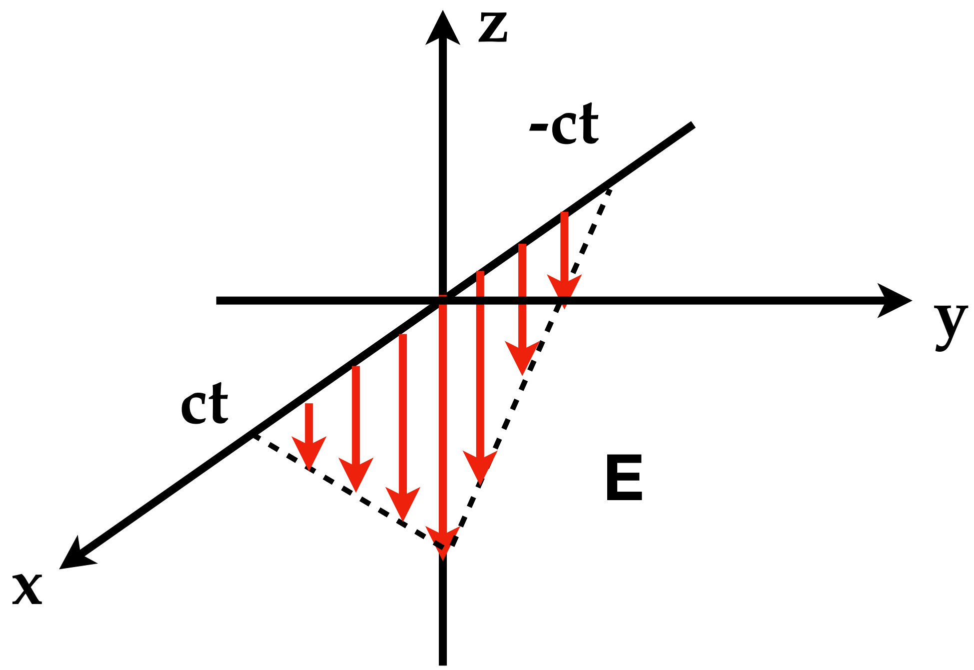
$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mu_0 k}{2c}(ct-|x|)\frac{\partial |x|}{\partial x}\hat{\mathbf{y}} = B_y\hat{\mathbf{y}} = \begin{cases} +\frac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\hat{\mathbf{y}}, & x > 0 \\ -\frac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\hat{\mathbf{y}}, & x < 0 \end{cases}$$



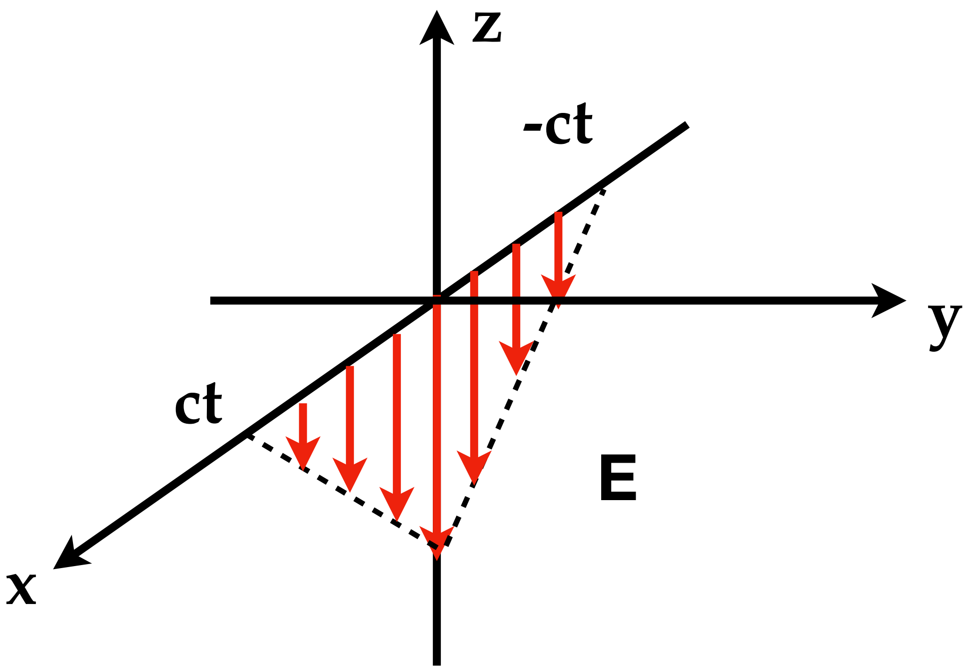


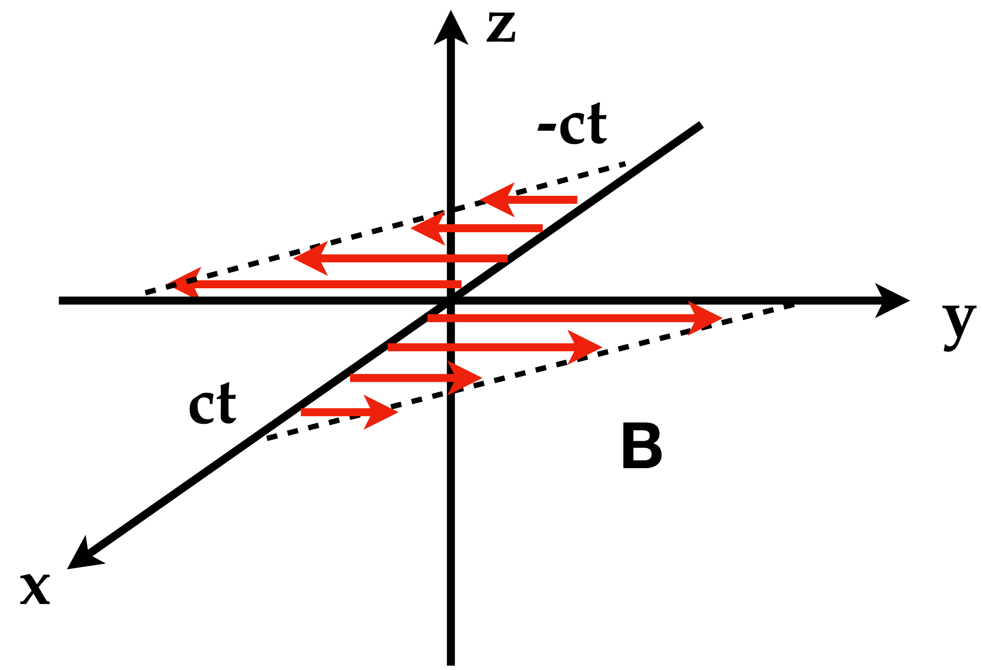
$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

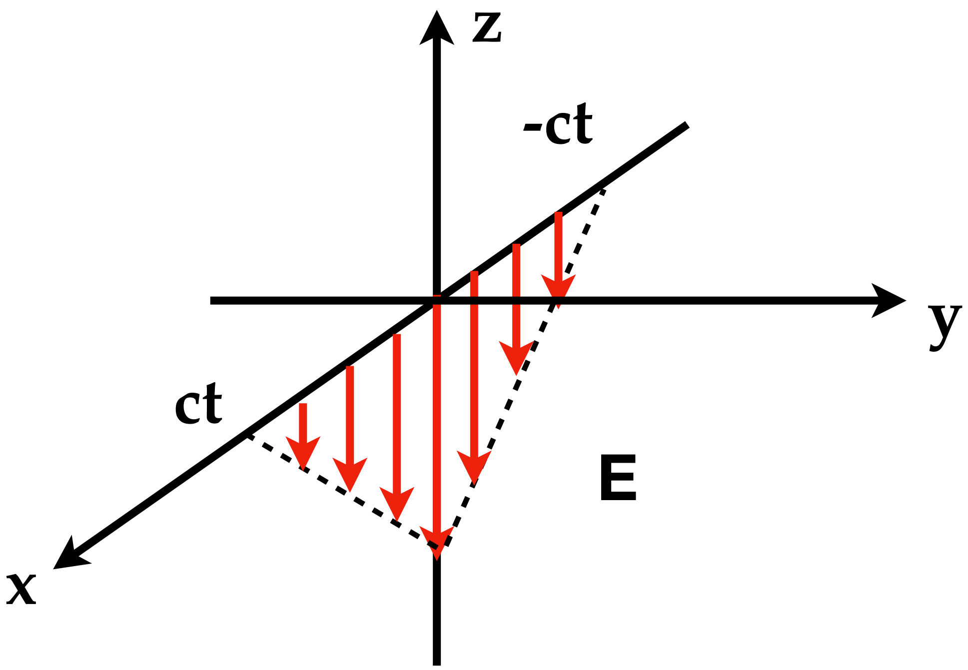


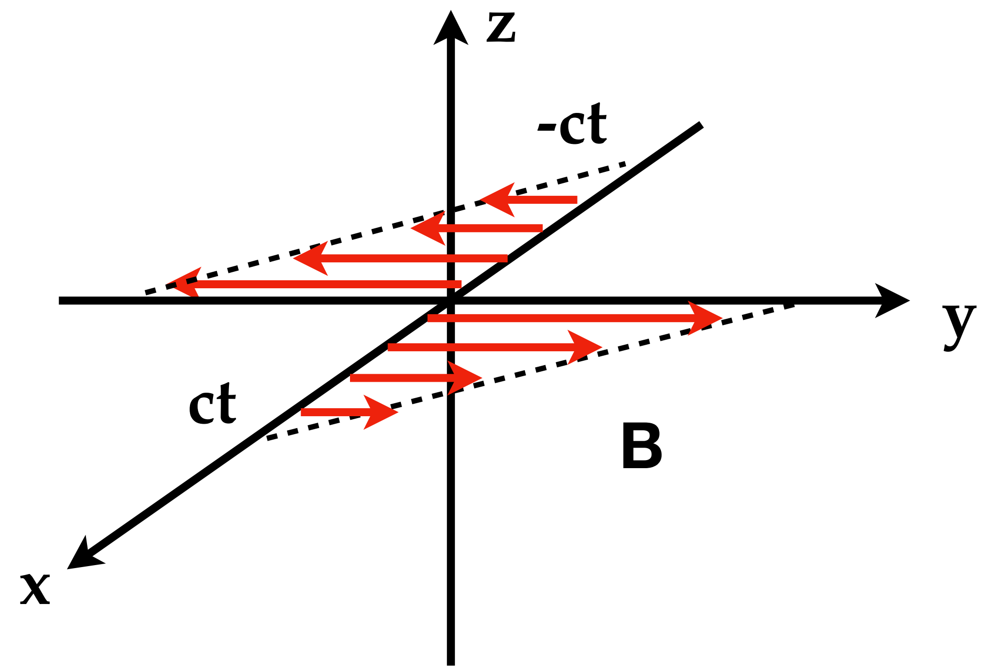
$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$





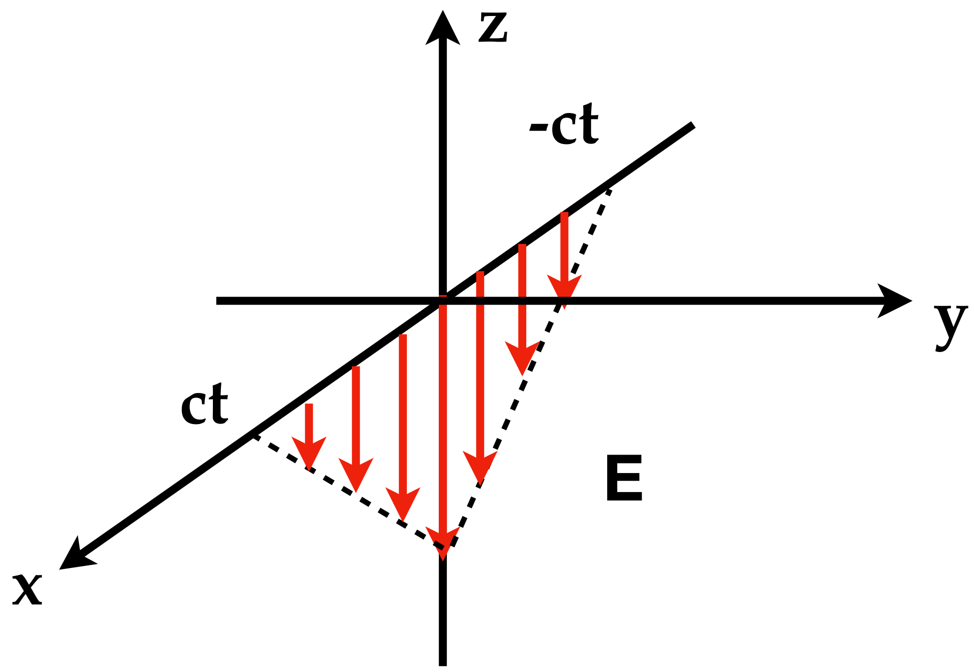
$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

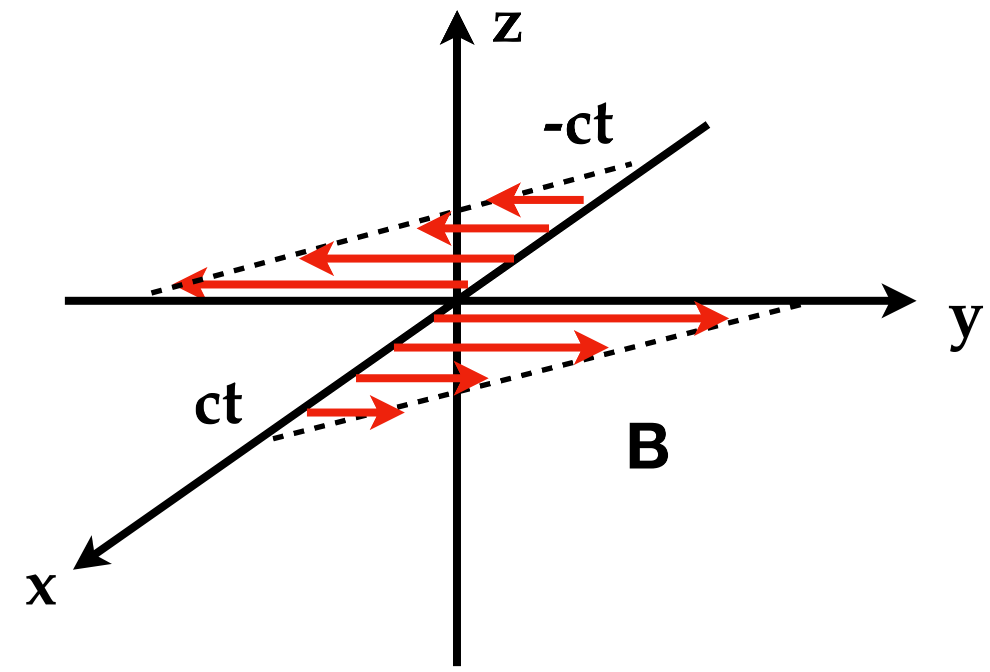




- **Componente // de B tem descontinuidade no plano x=0**

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$



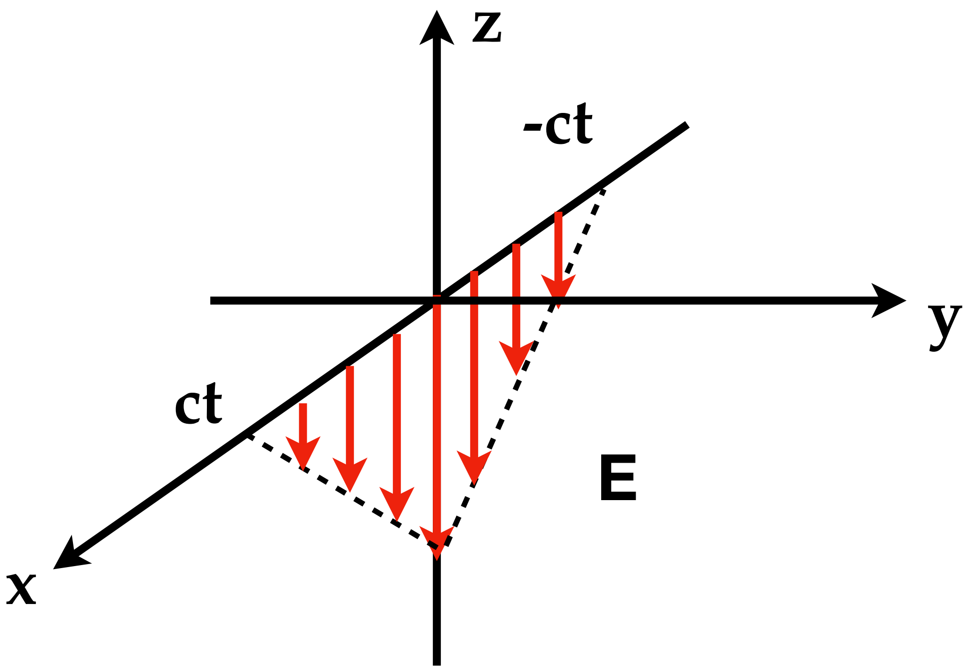


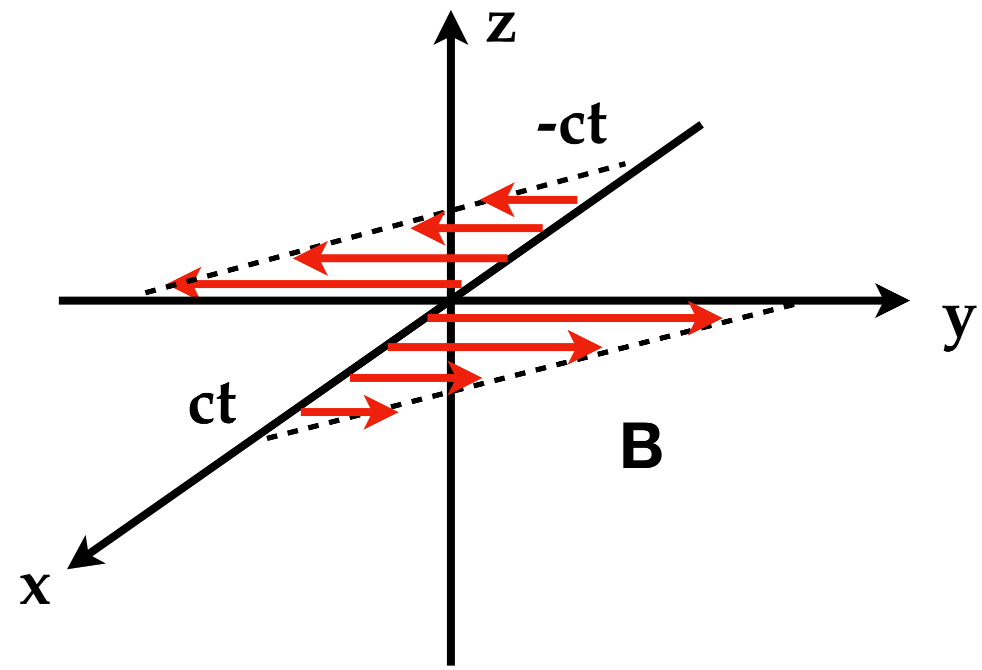
- **Componente // de B tem descontinuidade no plano x=0**

- **Densidade de corrente associada à descontinuidade**

$$\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_1^{//} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_2^{//} \quad = \quad \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$



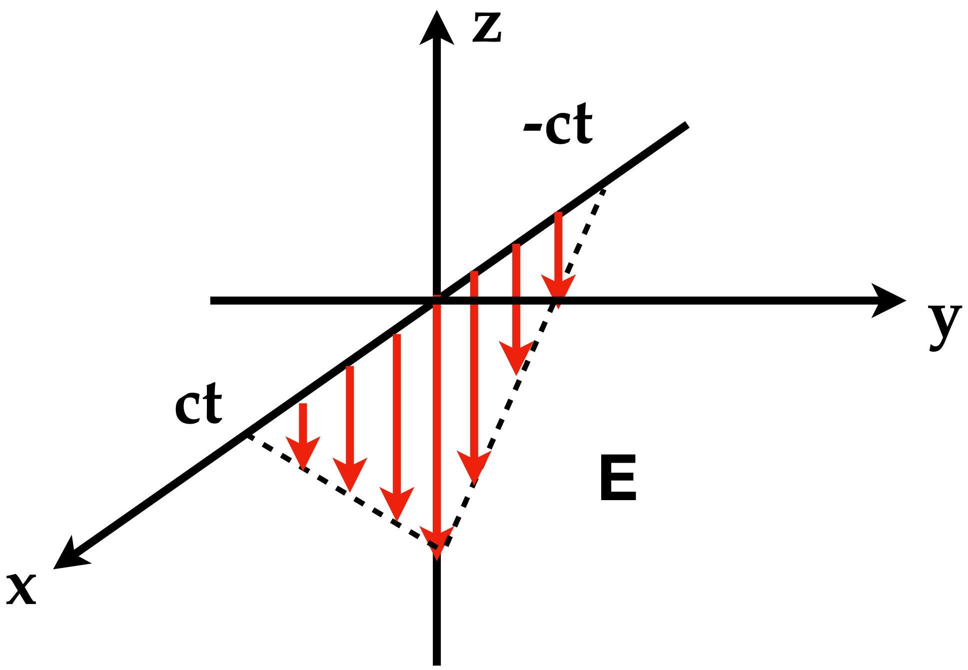


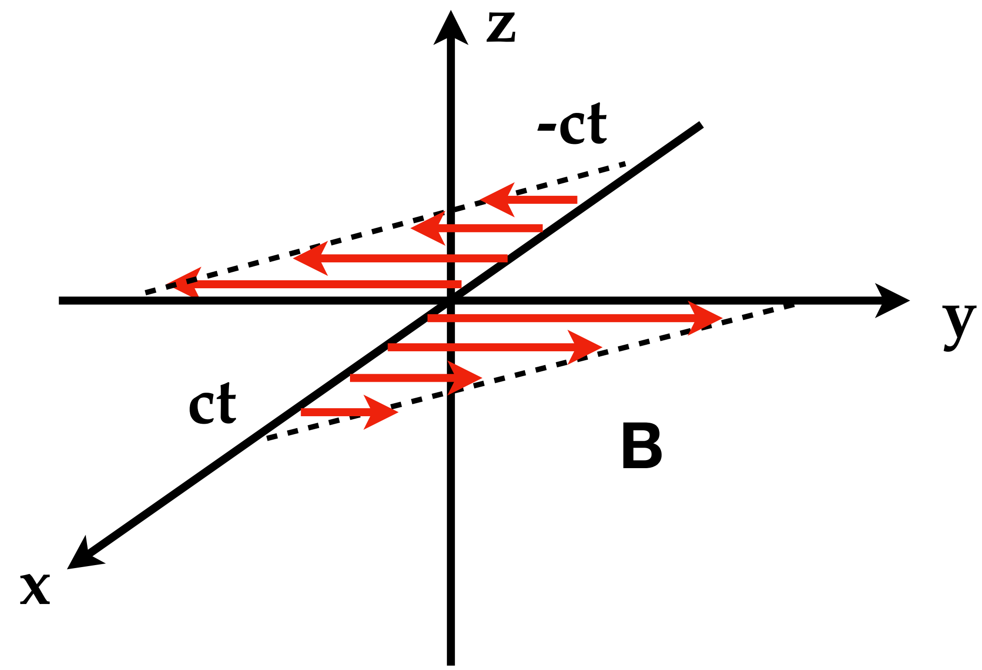
- **Componente // de B tem descontinuidade no plano x=0**

- **Densidade de corrente associada à descontinuidade**

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_1^{//} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_2^{//} &= \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} \\
\frac{1}{\mu_0}\left[B_y(x>0) - B_y(x<0)\right]\hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$



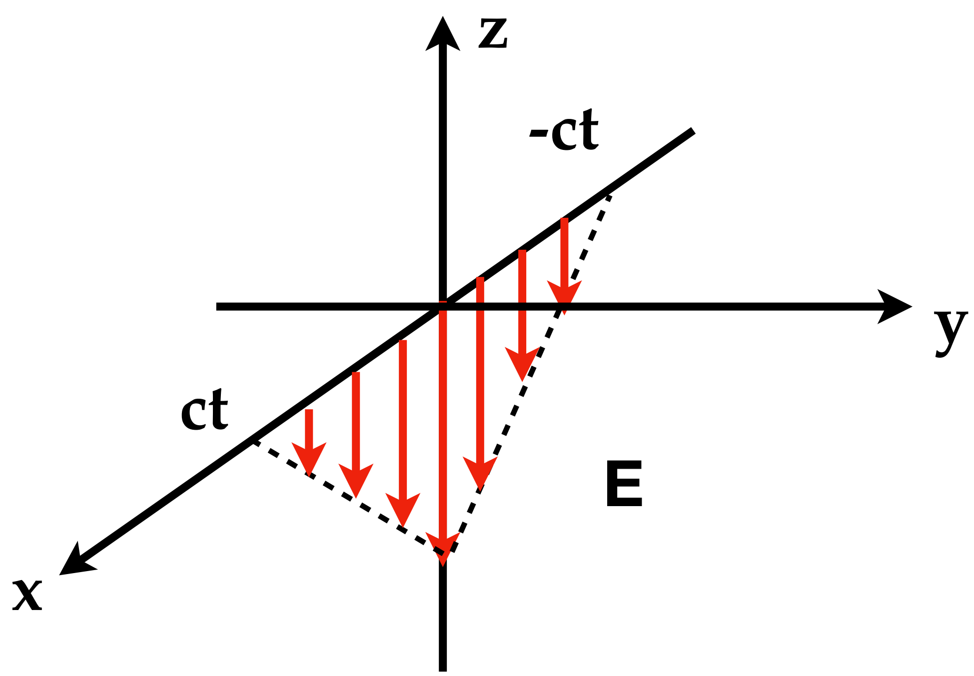


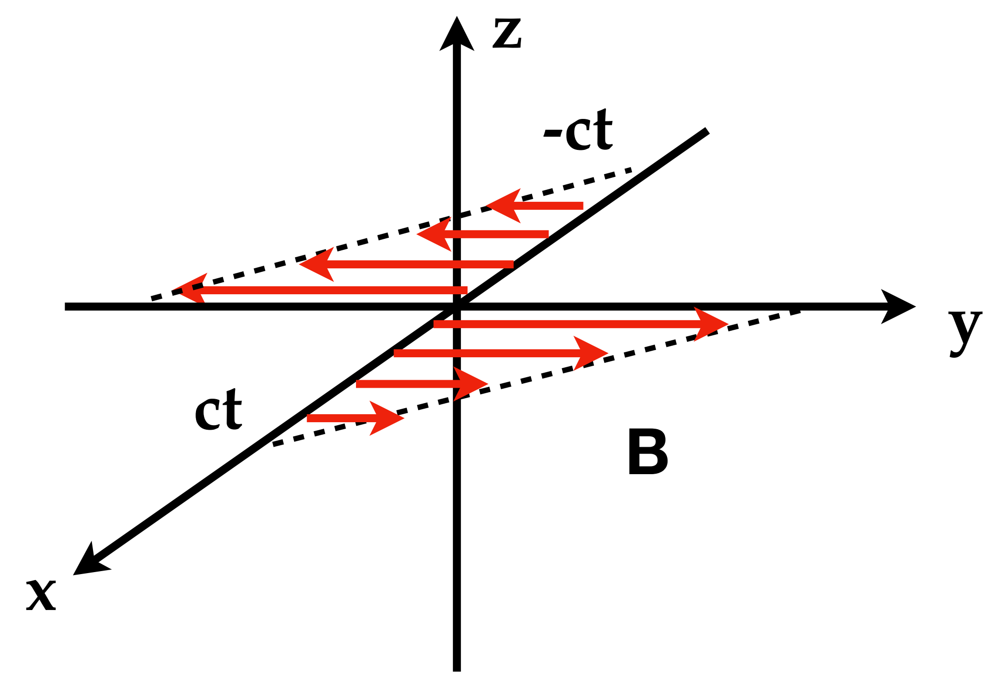
- **Componente // de B tem descontinuidade no plano x=0**

- **Densidade de corrente associada à descontinuidade**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_1^{//} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_2^{//} &= \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} \\
\frac{1}{\mu_0}\left[B_y(x>0) - B_y(x<0)\right]\hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{x}} \\
kt\,\hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$





- **Componente // de B tem descontinuidade no plano x=0**

- **Densidade de corrente associada à descontinuidade**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_1^{//} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_2^{//} &= \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{1}{\mu_0}\left[B_y(x>0) - B_y(x<0)\right]\hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{x}} \\ kt\,\hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = kt\,\hat{\mathbf{z}}$$