Noções de Probabilidade

ALEATORIEDADE

CARA OU COROA ?

Qual será o rendimento da Caderneta de Poupança no fim deste ano?

E qual será a taxa de inflação acumulada neste ano?

Quem será o próximo presidente do Brasil?

Vai chover amanhã ?

Quantas pessoas, para locomoção urbana, trocarão o taxi por um serviço de aplicativo que conecta uma pessoa a um motorista particular, nos próximos 2 anos?

A sua sinusite é viral ou bacteriana?

Experimento Aleatório: é aquele que, mesmo quando realizado sob as mesmas condições, não possui necessariamente um resultado pré-determinado.

Exemplos

1. Lançar uma moeda e observar o resultado; lançar um dado e observar o resultado.
2. Sortear um aluno da USP e perguntar sobre seu hábito de fumar.
3. Sortear um doador de sangue e verificar o seu tipo sanguíneo.

Espaço Amostral (Ω): conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Doador de sangue (tipo sanguíneo) .

   $\Omega = \{A, B, AB, O\}$

3. Hábito de fumar.

   $\Omega = \{\text{Fumante, Não fumante}\}$

4. Tempo de duração de uma lâmpada.

   $\Omega = \{t \in R: t \geq 0\}$

- Os elementos de Ω são chamados de pontos amostrais.

Eventos: ocorrências no experimento aleatório / subconjuntos do espaço amostral Ω

Notação: A, B, C, ...

$\varnothing$ (conjunto vazio): *evento impossível*

Ω: *evento certo*

Exemplo: Lançamento de um dado.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

A: sair face par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

B: sair face maior que 3 $\Rightarrow B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

C: sair face 1 $\Rightarrow C = \{1\} \subset \Omega$

D: sair face ímpar $\Rightarrow D = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$

Composição de eventos

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral.

***$A \cup B$*: união dos eventos *A* e *B*.**

Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos, A ou B (ou ambos).

Ex.: Sair face par ou maior que 3

$$A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{4,5,6\} = \{2,4,5,6\}$$

***$A \cap B$*: interseção dos eventos *A* e *B*.**

Representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

Ex.: Sair face par e maior que 3

$$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\}$$

- A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é,

$$A \cap B = \varnothing$$

Ex.: sair uma face par e ser igual a 1

$A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \varnothing$

- A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é,

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{e} \quad A \cup B = \Omega$$

Ex.: sair uma face par e sair uma face ímpar são eventos complementares

$A \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{1,3,5\} = \varnothing$

$A \cup D = \{2, 4, 6\} \cup \{1,3,5\} = \Omega$

O evento complementar de A, representado por A^c, é o evento em Ω em que A não ocorre.

Ex.: não sair uma face par

$A^c = \{1,3,5\}$

Diagrama de *Venn*

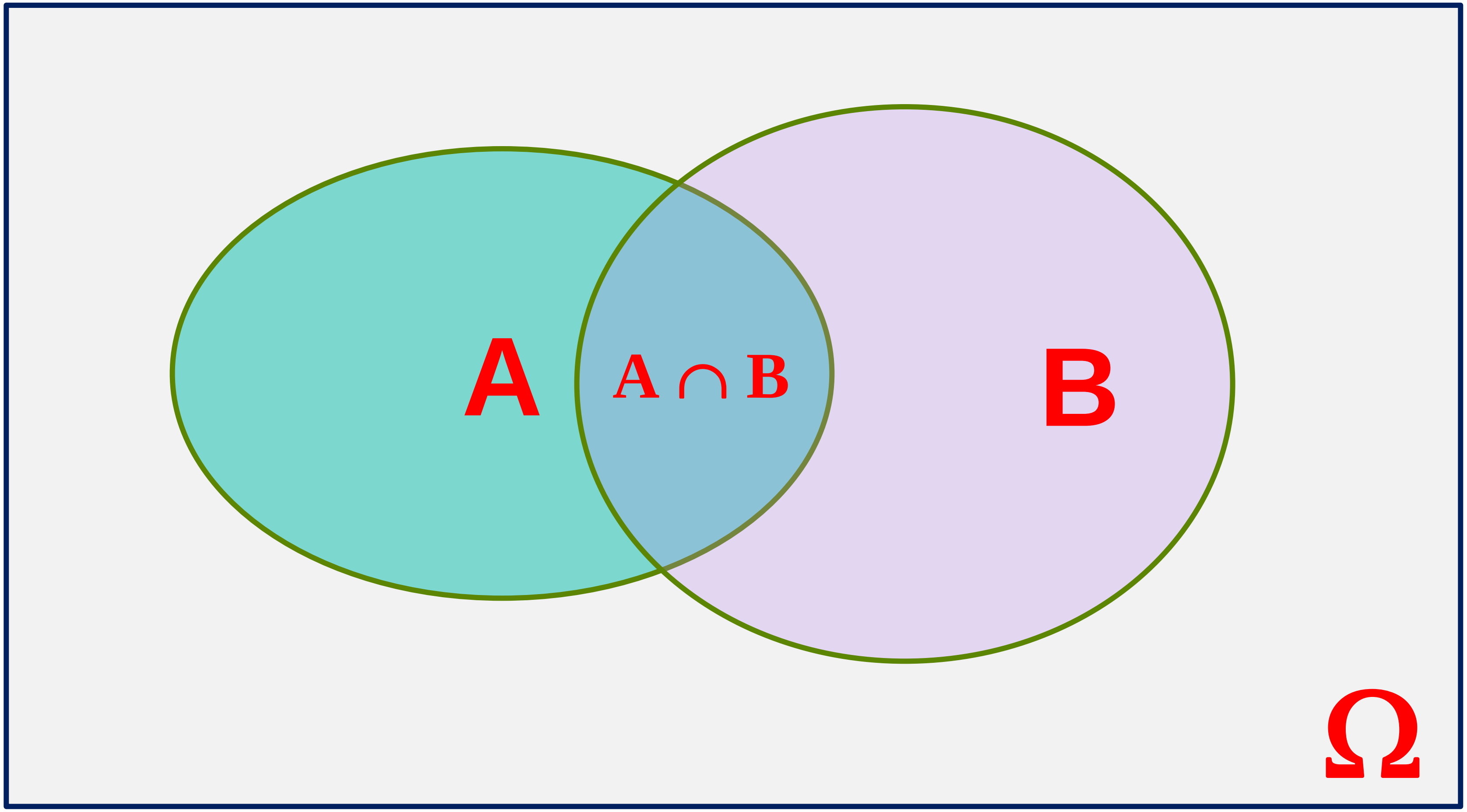
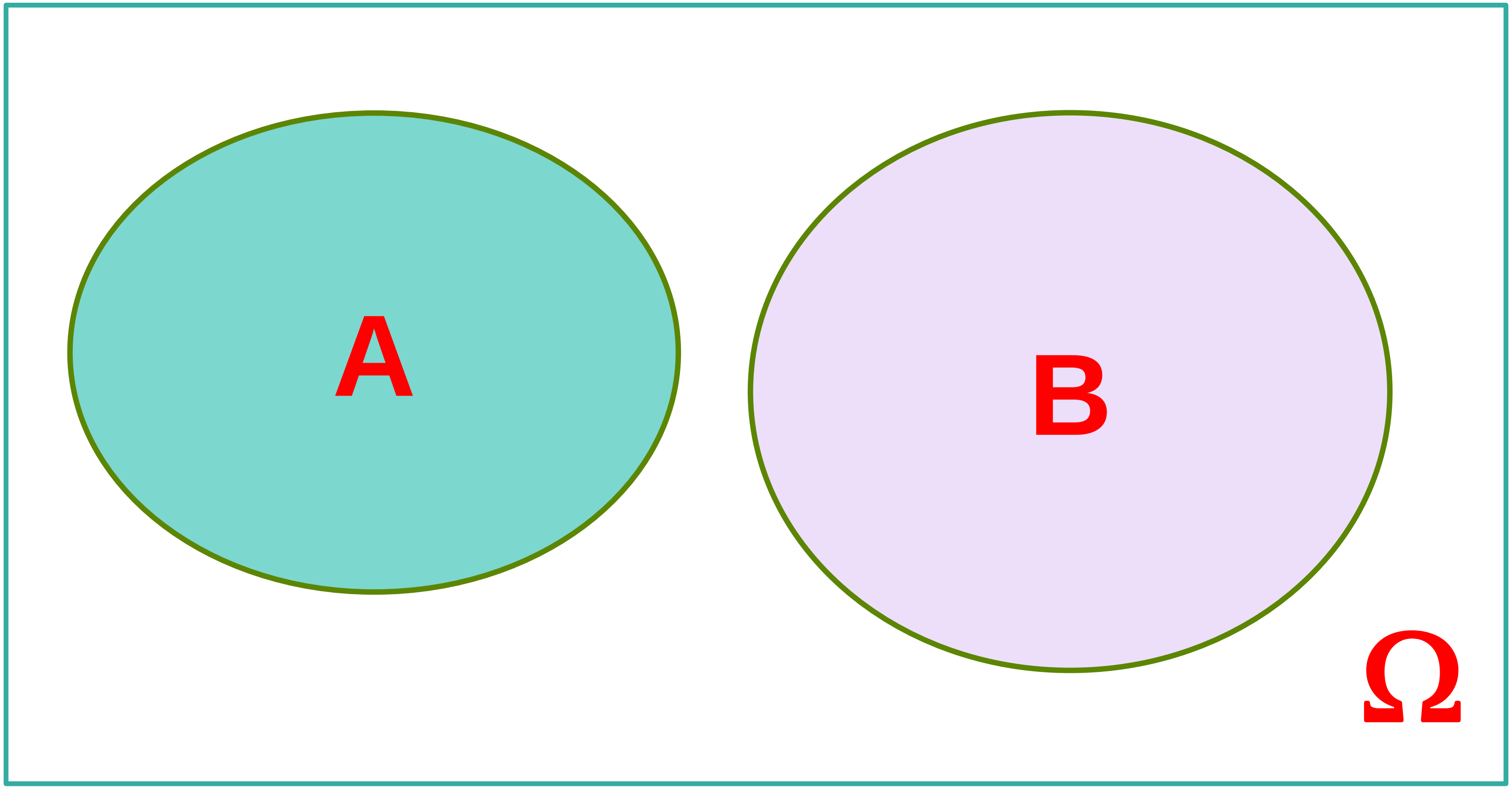


Diagrama de *Venn* com dois eventos disjuntos



$$A \cap B = \varnothing$$

Probabilidade

- Medida da incerteza associada aos eventos / resultados do experimento aleatório

Vamos atribuir probabilidade aos eventos.
Como?

Várias abordagens possíveis

1. Frequências relativas de ocorrências de cada resultado
2. Suposições teóricas
3. Experiência de especialistas

Atribuição da probabilidade:

1. Através das frequências relativas de ocorrências.

• O experimento aleatório é replicado várias vezes;

• Registra-se a frequência relativa com que o evento em questão ocorre.

→ Para um número grande de replicações, a frequência relativa de ocorrências do evento aproxima a probabilidade daquele evento.

Exemplo: N lançamentos de um dado

Resultado	1	2	3	4	5	6	N
Frequências relativas	0,180	0,180	0,200	0,130	0,130	0,180	100
	0,170	0,171	0,164	0,150	0,173	0,172	1000
	0,163	0,166	0,174	0,162	0,170	0,166	10000

2. Através de suposições teóricas.

Exemplo: Lançamento de um dado

Admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado

$$P(\text{face 1}) = \cdots = P(\text{face 6}) = 1/6.$$

3. Através da experiência de um(a) especialista.

Exemplo: Após exame clínico, o médico externa a probabilidade de que o paciente esteja com sinusite viral (em vez de bacteriana).

No **caso discreto**, todo experimento aleatório tem seu ***modelo probabilístico*** especificado quando estabelecemos:

- O *espaço amostral* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
- A *probabilidade $P(\omega)$ para cada ponto amostral* de tal forma que:

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1.$$

- Neste caso, dado um evento A do experimento aleatório (lembre que $A \subset \Omega$), temos

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} P(\omega_j)$$

Em particular
$P(\emptyset)=0$ e $P(\Omega)=1$

Observação: Na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os pontos amostrais são iguais, temos:

$$P(A) = \frac{n^o.\ de\ elementos\ de\ A}{n^o.\ de\ elementos\ de\ \Omega}$$

Atenção: Sem equiprobabilidade, a expressão acima NÃO é válida.

Exemplo: A tabela a seguir apresenta a distribuição de alunos diplomados em 2002, segundo nível de ensino e tipo de instituição, no município de São Paulo.

Nível	Instituição		Total
	Pública	Privada	
Fundamental	144.548	32.299	176.847
Médio	117.945	29.422	147.367
Superior	5.159	56.124	61.283
Total	267.652	117.845	385.497

Fonte: Min. Educação/INEP-Inst.Nacion. Estudos e Pesq. Educacionais; Fundação SEADE

Um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no município de São Paulo.

Definimos os eventos

M: aluno se formou no ensino médio;
F: aluno se formou no ensino fundamental;
S: aluno se formou no ensino superior;
G: aluno se formou em instituição pública.

ir para a tabela

Temos

$$P(M) = \frac{147.367}{385.497} = 0{,}382 \qquad P(F) = \frac{176.847}{385.497} = 0{,}459$$

$$P(S) = \frac{61.283}{385.497} = 0{,}159 \qquad P(G) = \frac{267.652}{385.497} = 0{,}694$$

- *Qual é a probabilidade do aluno escolhido ter se formado no ensino médio **e** em uma instituição pública?*

$M \cap G$: aluno formado no ensino médio **e** em inst.pública

$$P(M \cap G) = \frac{117.945}{385.497} = 0,306$$

- *Qual é a probabilidade do aluno ter se formado no ensino médio **ou** em uma instituição pública?*

ir para a tabela

$M \cup G$: aluno formado no ensino médio **ou** em inst. pública

$$P(M \cup G) = (147.367 + 267.652 - 117.945) / 385.497$$

$$= \frac{297.074}{385.497} = 0,771$$

Regra da adição de probabilidades

Sejam A e B eventos de Ω. Então,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Em particular:

- Se A e B forem eventos **disjuntos**, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- Para qualquer evento A de Ω,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Probabilidade condicional e independência

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por $P(A \mid B)$ e definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a **regra do produto de probabilidades**

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B).}$$

e

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)\ .}$$

• *Qual é a probabilidade do aluno escolhido ter se formado no ensino médio sabendo-se que é de instituição pública?*

Olhando diretamente a tabela,

temos $P(M|G) = \dfrac{117.945}{267.652} = 0{,}441$

Por definição

ir para a tabela

$$P(M \mid G) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \frac{\dfrac{117.945}{385.497}}{\dfrac{267.652}{385.497}} = 0{,}441$$

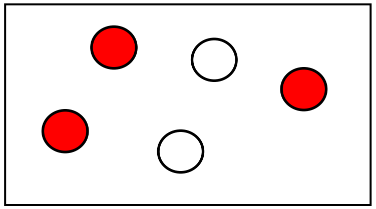
Exemplo: Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, ***sem reposição***.

B_1: a 1ª. bola sorteada é branca

B_2: a 2ª. bola sorteada é branca

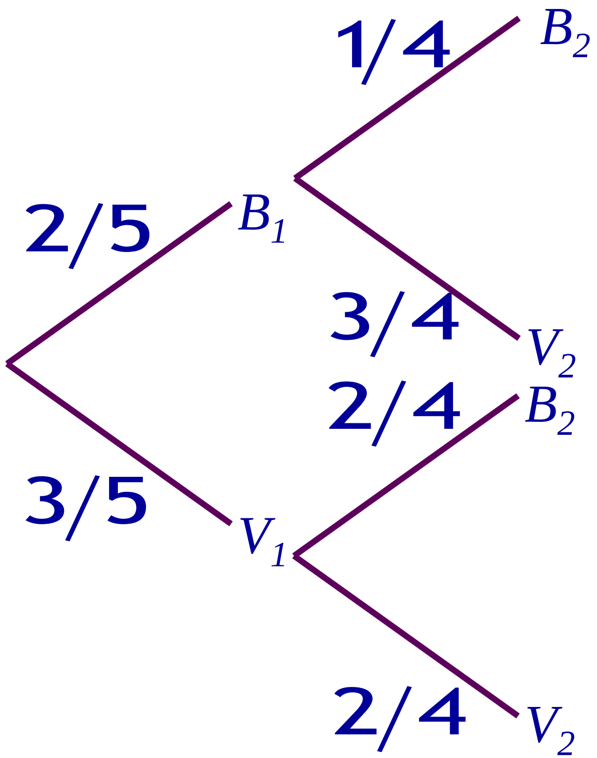
V_1: a 1ª. bola sorteada é vermelha

V_2: a 2ª. bola sorteada é vermelha



$$P(B_2) = ???$$

Para representar todas as possibilidades, utilizamos, um diagrama conhecido como *diagrama de árvores* ou *árvore de probabilidades.*



Resultados	Probabilidades
B_1B_2	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$
B_1V_2	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$
V_1B_2	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$
V_1V_2	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$
Total	1

Pela regra do produto, temo que

$$P(B_2)=P(B_1B_2)+P(V_1B_2)=P(B_1)\times P(B_2\mid B_1)+P(V_1)\times P(B_2\mid V_1)$$

Portanto,

$$P(B_2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{2}{20}+\frac{6}{20}=\frac{2}{5}$$

Note que,

$$P(B_2) = P(\text{branca na 2ª.}) = \frac{2}{5} = P(\text{branca na 1ª.}) = P(B_1).$$

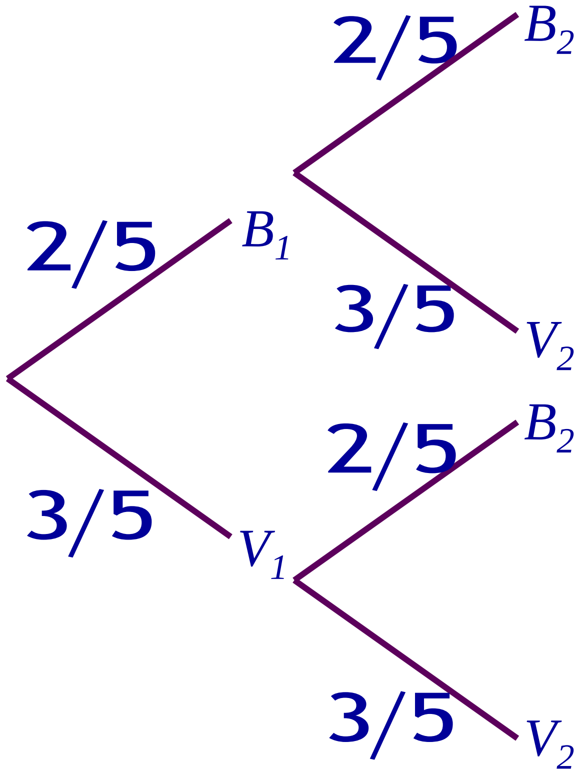
Além disso,

$$P(B_2 \mid B_1) = P(\text{ branca na 2ª.} \mid \text{branca na 1ª.}) = \frac{1}{4} \neq P(B_2)$$

$$P(B_2 \mid V_1) = P(\text{branca na 2ª.} \mid \text{vermelha na 1ª.}) = \frac{2}{4} \neq P(B_2)$$

ou seja, o resultado da 2ª. extração ***depende*** do resultado da 1ª. extração.

Considere agora que os sorteios são feitos **com reposição**, ou seja, a 1ª. bola sorteada é reposta na urna antes do 2º. sorteio. Nesta situação, temos



Resultados	Probabilidade
B_1B_2	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
B_1V_2	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$
V_1B_2	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
V_1V_2	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
Total	1

Neste caso,

$$P(B_2) = P(\text{branca na 2ª.}) = \frac{4}{25} + \frac{6}{25} = \frac{2}{5}$$

$$P(B_2 \mid B_1) = P(\text{ branca na 2ª.} \mid \text{branca na 1ª.}) = \frac{2}{5} = P(B_2)$$

$$P(B_2 \mid V_1) = P(\text{branca na 2ª.} \mid \text{vermelha na 1ª.}) = \frac{2}{5} = P(B_2)$$

ou seja, o resultado na 2ª. extração ***independe*** do que ocorre na 1ª. extração.

Independência de eventos:

Dois eventos A e B são **independentes** se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A), \quad P(B) > 0.}$$

Temos a seguinte forma equivalente A e B são independentes :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)\ .}$$

Exemplo: A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

A: Jonas é aprovado

B: Madalena é aprovada

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$\rightarrow$ Qual foi a suposição feita?

Observação

Segue da definição de independência que se dois eventos A e B são independentes, então são independentes também os pares de eventos

$$\boldsymbol{A^c} \textbf{ e } \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} \textbf{ e } \boldsymbol{B^c}, \quad \boldsymbol{A^c} \textbf{ e } \boldsymbol{B^c}.$$

(Verifique!)