Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Disciplina 4300255

Mecânica dos Corpos Rígidos e dos Fluidos

Energia Cinética de Rotação

Corpos que rolam - Rolamento sem escorregamento

Energia Cinética de Rotação

Pequena revisão: a energia cinética de um corpo de massa m_i com velocidade de translação v_i , já vista anteriormente é: $K_t = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Estendendo para todos os elementos e usando $v_T = \omega_i r_i$, temos:

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i r_i^2 \right) \omega_i^2$$

onde o termo entre parênteses é o momento de inércia I em relação ao eixo de rotação. A energia cinética é então:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

expressão análoga à conhecida para o movimento de translação.

A energia cinética de um sistema de partículas pode ser decomposta na soma de duas parcelas:

1) a energia cinética associada ao movimento do centro de massa, $\frac{1}{2} m v_{CM}^2$, e
2) a energia cinética associada ao movimento das partículas em relação ao centro de massa, $\sum m_i u_i^2 /2$.

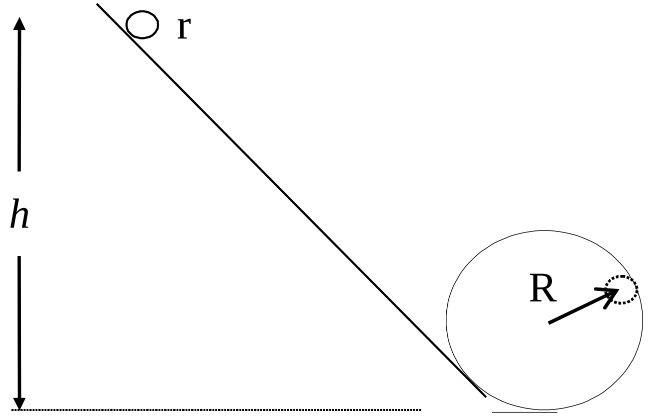
Esta análise nos fornece a expressão: $K_{tot} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + K_{rot}$

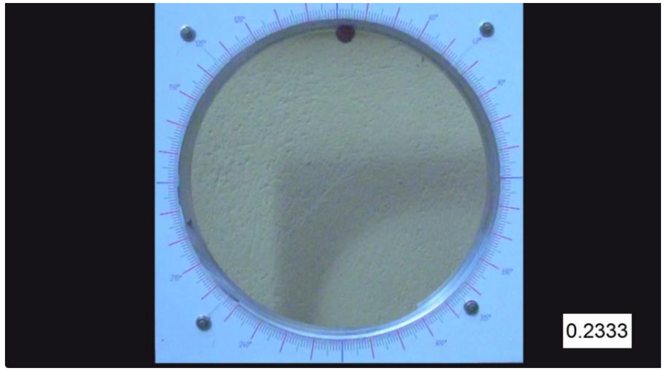
Quando um corpo se translada e gira, podemos entender que possui uma energia cinética que é a soma da energia de translação do centro de massa mais a energia de rotação em torno do centro de massa.

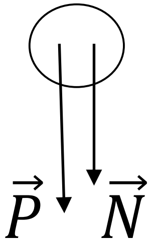
$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M {v_{CM}}^2$$

Problema 9 lista 3

(Tipler Cap 9, E 92) Um esfera maciça homogênea, de raio r, parte do repouso, à altura *h*, e rola pelos trilhos de uma montanha-russa que têm uma volta completa de raio R, como mostra a figura. a) Qual o menor valor de *h* para a qual a esfera faz a volta sem cair no topo? b) Qual valor teria *h* se a bola, em lugar de rolar, deslizasse pelos trilhos, sem atrito?





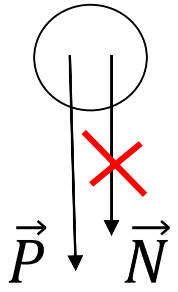


Video
http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/rotacao/loop/index.php

Considerando que não há perdas de energia por atrito, $E_{T,i} = E_{T,f}$ (1).

Como a bolinha é solta da altura h, a energia inicial é só energia potencial $\quad E_{T,i} = mgh \quad$ (2)

Como interpretamos as forças no ponto mais elevado do loop? no limite de descolar?



Então: $\quad \vec{P} = m\vec{a}_{cp}$

$$-mg = -m\frac{v^2}{R-r} \Rightarrow v^2 = g(R-r) \qquad (3)$$

A energia cinética nesse ponto é a soma da energia cinética de translação mais aquela de rotação, então, para uma esfera maciça:

$$E_{cinética} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)mv^2 = \frac{7}{10}mv^2 \qquad (4)$$

A energia total naquele ponto mais lato dentro do loop, é:

$E_{T,f} = E_{cinética} + E_{potencial} = \frac{7}{10}mv^2 + mg(2\mathrm{R}-\mathrm{r})$. Substituindo a velocidade obtida em (3),

$$E_{T,f} = \frac{7}{10}mg(R-r) + mg(2R-r) = \frac{27}{10}mgR - \frac{17}{10}mgr.$$

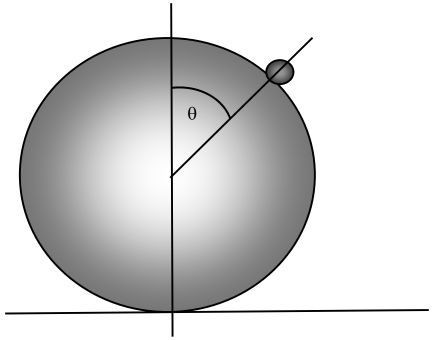
igualando a (2), $mgh = \frac{27}{10}mgR - \frac{17}{10}mgr \Rightarrow h = \frac{27}{10}R - \frac{17}{10}r = 2{,}7R - 1{,}7r.$

b) Se a bola desliza em vez de rolar, o segundo somando da expressão(4 - $E_{cinética} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$)

não apareceria, a energia cinética seria *1/2m*v^2 e o resultado de *h* seria:

$h = \frac{5}{2}R = 2{,}5R$, que é um pouco inferior ao obtido quando a bola rola em torno de um diâmetro.

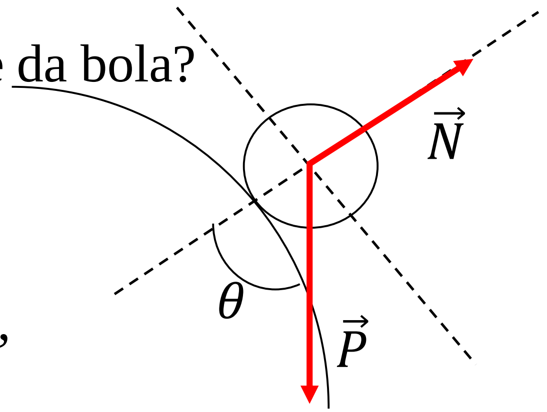
10. (Tipler Cap 9, E 99, ligeiramente modificado) Uma bola de gude, com 1 cm de raio, rola, a partir do repouso e sem escorregar, do topo de uma grande esfera de 80 cm de raio, que é fixa, como mostra a figura ao lado. Determinar o ângulo, entre a vertical que passa pelo topo da esfera, e o raio que passa pelo ponto onde a bola de gude perde contato com a superfície da esfera.



Considerando que não há perdas de energia por atrito, $E_i = E_f$ (1)

A bolinha é solta da altura *2R.* Se a origem do sistema de referencia for colocado na base da bola, a energia inicial é só energia potencial $E_i = mg(2R + r)$ (2)

Qual é o diagrama de corpo livre da bolinha no ponto em que descola da superfície da bola?



Escolhendo um sistema de referencia tangente à esfera no ponto em que a bolinha descola da superfície, e analisando as forças que atuam nela, $\vec{P} + \vec{N} = m\,\vec{a}$.
Na projeção ***y*** dessa soma, no limite de perda de contato com a superfície da esfera, N = 0, portanto:

$$-mg\cos\theta = -ma_{cp} \therefore g\cos\theta = a_{cp} = \frac{v^2}{(R+r)}, \text{entao: } v^2 = (R+r)g\cos\theta$$

A energia, no ponto de perda de contato com a superfície da esfera, é a soma da energia cinética mais a energia potencial, assim:

$$E_\theta = mg(R + (R+r)\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{bolinha}\omega^2 = mg(R + (R+r)\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2}.$$

Não há perdas de energia por atrito, então $E_{T,i} = E_{T,f}$

Comparando a energia total inicial e final:

$$mg(2R + r) = mg(R + (R + r)\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$g(2R + r) = gR + g(R + r)\cos\theta + \frac{1}{2}g(R + r)\cos\theta + \frac{1}{5}g(R + r)\cos\theta \quad (*)$$

$$(2R + r) - R = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)(R + r)\cos\theta$$

$$\therefore 1 = \frac{17}{10}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{10}{17} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{10}{17} = 54°.$$

Se o efeito de rotação da esfera pequena não for levado em conta, o último somando da equação (*) não seria colocado e o ângulo seria:

$$(2R + r) - R = \left(1 + \frac{1}{2}\right)(R + r)\cos\theta$$

$$\therefore 1 = \frac{3}{2}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\theta = \arccos\frac{2}{3} = 48°$$