PTC3440 - Modelos Probabilísticos
Trabalho - Entrega: 16/06/2020

1a. QUESTÃO

Considere um sistema de comunicações com quatro canais iguais. Para o sistema estar operacional, pelo menos dois canais devem estar operantes (sistema 2 em 4). A probabilidade de um canal qualquer funcionar é igual a p e eles funcionam de forma independente um do outro. Determine o menor valor de p de modo que a confiabilidade do sistema seja pelo menos de 0,98.

2a. QUESTÃO

Um prisioneiro está preso em uma cela com 4 portas. A primeira porta leva a um túnel que, após 1 dia, retorna ao ponto inicial, a segunda a um túnel que, após 2 dias, leva à liberdade, a terceira a um túnel que, após 3 dias, retorna ao ponto inicial. A quarta porta leva à liberdade imediatamente. Seja N o número de dias até o prisioneiro alcançar a liberdade.

a) Suponha que o prisioneiro sempre escolhe as portas 1, 2, 3 e 4 com probabilidades $\frac{1}{4}$ (isto é, o prisioneiro não tem memória). Determine $E(N)$ e $Var(N)$ (isto é, o valor esperado e a variância de N).

b) Suponha agora que o prisioneiro é igualmente provável de escolher uma das portas que ele não tenha escolhido anteriormente (isto é, o prisioneiro tem memória). Determine $E(N)$ e $Var(N)$.

3a. QUESTÃO

Seja a função densidade de probabilidade conjunta de X, Y dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}e^{-2y} & \text{para } 0 < x < 2y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Determine: a) $E(X|Y=y)$; b) $E(X)$.

4a. QUESTÃO

Considere 2 ativos com retornos R_1 e R_2 e fator de correlação, médias, e desvios padrão dados por ρ, $r_1 = 15\%$, $r_2 = 20\%$, $\sigma_1 = 20\%$, $\sigma_2 = 40\%$. Considere uma carteira com retorno $P = \omega_1 R_1 + (1-\omega_1)R_2$.

a) Supondo o caso extremo $\rho = -1$ determine o valor do peso ω_1 de forma a levar para zero o risco da carteira. Qual é o retorno garantido nesse caso?

Nos próximos itens assuma $\rho = 0,1$.

b) Trace o gráfico do risco (σ) X retorno μ) quando se varia ω_1 de 0 a 1.

c) Determine o peso ω_1 de modo a minimizar a variância. Qual é o valor da variância mínima σ^2_{min} e o retorno esperado μ_{min}?

d) Suponha que você esteja disposto a correr um risco de $\sigma = 20\%$. Qual seria a sua escolha de carteira nesse caso, e o seu valor esperado μ?

e) Supondo que os ativos tenham distribuição normal, qual seria o pior retorno possível com 95% de chances para a carteira do item c)?

5a. QUESTÃO

Considere uma opção call européia com os seguintes dados: $S_0 = 10$, $T = 8$, $K = 10$, $u = 1,1$, $d = 0,9$, $r = 0,05$. Determine pelo modelo binomial o valor da opção call em $t = 0$ e a estratégia de investimento em cada nó da árvore binomial.

6a. QUESTÃO

Considere um jogo em que o jogador, a cada partida, perde 1 real com probabilidade $\frac{2}{3}$, e ganha 2 reais com probabilidade $\frac{1}{3}$. Suponha que o jogador comece com 5 reais, e que ele para de jogar se quebrar ou atingir pelo menos 10 reais.

a) Qual é a probabilidade de que se tenha pelo menos 8 rodadas do jogo?

b) Qual é a probabilidade do jogador sair vencedor (ou seja, a fortuna do jogador atingir 10 reais ou mais)?

c) Qual é o número esperado de jogadas até o jogo acabar?

7a. QUESTÃO

Suponha que ofertas de compra de uma casa ocorram de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 2$ por mês. Suponha que o valor de cada oferta seja uma variável aleatória com distribuição uniforme entre R$ 200.000,00 e R$ 300.000,00. Uma vez que a oferta é apresentada, deve-se aceitá-la ou rejeitá-la e esperar pela próxima oferta. Incorre-se em um custo a uma taxa $c =$ R$ $5.000,00$ por mês, até que a casa seja vendida. Suponha que se vai aceitar a primeira oferta maior que y.

a) Qual deve ser o valor de y de modo a maximizar o lucro esperado (isto é, o valor da oferta menos o custo total incorrido)?

b) Qual é o valor do lucro esperado para y obtido no item a)?

8a. QUESTÃO

Uma fábrica possui 2 máquinas e 2 oficinas de reparo. O tempo que cada máquina fica funcionando antes de quebrar possui distribuição exponencial com média 480 horas. Suponha que o tempo para fazer um reparo em qualquer uma das oficinas possui distribuição exponencial com média de 48 horas.

a) Escreva o diagrama de Markov deste problema, e as equações de balanço.

b) Determine as probabilidades limites P_n.

c) Escreva e resolva as equações de avanço de Kolmogorov. Trace o gráfico de $P_{00}(t)$, $P_{01}(t)$ e $P_{02}(t)$. O que acontece quando fazemos $t \to \infty$?

d) Determine o número médio de máquinas fora de uso.

e) Determine a proporção do tempo que cada máquina fica em uso.

9a. QUESTÃO

Considere uma fila única com um servidor onde chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$, e o tempo de serviço tem distribuição exponencial com taxa $\mu > 0$. Entretanto cada chegada pode corresponder a 1 cliente com probabilidade p ou 2 clientes com probabilidade $1 - p$.

a) Escreva o diagrama de Markov deste problema, e as equações de balanço (não precisa resolvê-las). Qual é a condição de equilíbrio ?

Nos próximos itens considere $\lambda = 3$/hora, $\frac{1}{\mu} = 6$ minutos, $p = \frac{1}{3}$.

b) Determine o tempo de espera médio de um cliente no sistema (isto é, W) e o número médio de clientes no sistema (isto é, L).

c) Determine o tempo de espera médio de um cliente na fila (isto é, W_Q) e o número médio de clientes na fila (isto é, L_Q).

10a. QUESTÃO

Uma rede de agências bancárias sofre com frequentes reclamações de seus clientes sobre as longas filas de espera que eles enfrentam quando vão ao banco. Você foi contratado para resolver esse problema e lhe foi informado que no horário de pico uma agência recebe em média $118,8$ clientes/hora, um funcionário atende em média $79,2$ pessoas/hora e que a fila é única. Considere que a distribuição de chegadas ocorre de acordo com um processo de Poisson e que o tempos de serviço dos atendentes são variáveis aleatórias independentes e igualmente exponencialmente distribuídas.

i) Qual é a quantidade de atendentes no horário de pico para que a fila do caixa permaneça em média menor do que 1 cliente?

ii) Considerando o número de atendentes do item i), determine analiticamente e por simulação numérica:

  ii.a) O tempo médio W_Q gasto por um cliente na fila.

  ii.b) A proporção do tempo que todos os atendentes estão ocupados.

iii) Considere que apenas 2 funcionários atendam no caixa. Qual seria o tempo médio de atendimento de cada caixa para que os clientes permanecessem em média $W_Q = 2$ min na fila? Para essa situação, calcule a quantidade média L de clientes na agência e o tempo médio W de permanência deles na agência. Verifique o seu resultado utilizando também o simulador.

Observação: Pode usar o simulador que está em https://www.supositorio.com/rcalc/rcalclite.htm.