SOLUÇÃO 1ª PROVA PME - 2341 28/03/07

Prof. Francisco E. B. Nigro Prof. Walter Ponge-Ferreira

1ª Questão:

a) Pela leitura do gráfico apresentado, as forças rotativas agindo nos mancais **A** e **B**, medidas em um sistema de referência preso no rotor cuja posição **0º** corresponde à direção de medida da força no mancal quando ocorre o pulso da foto-célula, ficam:

$$\vec{F}_A = 100N\angle(2/24\cdot 360)° = 100N\angle 30° \qquad \vec{F}_B = 80N\angle(16/24\cdot 360)° = 80N\angle 240°$$

Escolhendo um sistema ortogonal de versores $\vec{i}$ e $\vec{j}$, fixo no rotor, de modo que no instante do pulso do foto-detector o versor $\vec{i}$ está no sentido e direção da célula de carga e que, após **90º** de giro do rotor, o versor $\vec{j}$ está apontado para a célula de carga, podemos representar as forças nos mancais por:

$$\vec{F}_A = 100N\cdot(\cos 30°\cdot\vec{i} + sen 30°\cdot\vec{j}) = 86{,}6\cdot\vec{i} + 50\cdot\vec{j}$$

$$\vec{F}_B = 80N\cdot(\cos 240°\cdot\vec{i} + sen 240°\cdot\vec{j}) = -40\cdot\vec{i} - 69{,}3\cdot\vec{j}$$

Vale mencionar que, como as massas de balanceamento foram dispostas equi-espaçadas ao redor do eixo, as forças rotativas medidas nos mancais correspondem ao desbalanceamento do rotor original.

Para balancear o rotor, suponhamos duas forças radiais $\vec{F}_C$ e $\vec{F}_D$ agindo sobre o rotor, causadas por duas massas pontuais m_C e m_D a serem adicionadas ao rotor, nos planos de balanceamento **C** e **D**, para balanceá-lo. Certamente, como o rotor está girando com velocidade angular constante em torno de seu eixo geométrico, coincidente com o eixo dos mancais, essas forças têm as mesmas direções radiais e sentidos das massas adicionadas, e valem: $\vec{F}_C = m_C\cdot R_C\cdot\omega_{bal}^2\cdot\vec{e}_C$ e $\vec{F}_D = m_D\cdot R_D\cdot\omega_{bal}^2\cdot\vec{e}_D$

A velocidade angular do rotor nessa condição vale: $\omega_{bal} = \dfrac{2\cdot\pi}{0{,}024\cdot s} = 261{,}8\,rad/s$

Se decompusermos a força $\vec{F}_C$ em um sistema equivalente de duas forças paralelas contidas nos planos dos mancais **A** e **B** (mesma resultante e mesmo momento em relação a qualquer pólo), obtemos: $\vec{F}_{CA} = \dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot\vec{F}_C$ e $\vec{F}_{CB} = \dfrac{a}{a+b+c}\cdot\vec{F}_C$.

Analogamente para a força $\vec{F}_D$, obtemos: $\vec{F}_{DA} = \dfrac{b}{a+b+c}\cdot\vec{F}_D$ e $\vec{F}_{DB} = \dfrac{a+c}{a+b+c}\cdot\vec{F}_D$

Substituindo os dados do problema, obtemos:

$$\vec{F}_{CA} = 0{,}8\cdot\vec{F}_C \qquad \vec{F}_{CB} = 0{,}2\cdot\vec{F}_C \qquad \vec{F}_{DA} = 0{,}1\cdot\vec{F}_D \qquad \vec{F}_{DB} = 0{,}9\cdot\vec{F}_D$$

Em cada plano de mancal temos, além da força de desbalanceamento do rotor original, as parcelas das decomposições das forças de balanceamento adicionadas nos planos **C** e **D**. Para balancear o rotor, a resultante das forças rotativas em cada mancal deve ser nula, portanto: $\vec{F}_{CA} + \vec{F}_{DA} + \vec{F}_A = \vec{0}$ e $\vec{F}_{CB} + \vec{F}_{DB} + \vec{F}_B = \vec{0}$

Podemos determinar os valores de $\vec{F}_C\, e\, \vec{F}_D$ resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{F}_C \\ \vec{F}_D \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{F}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -86{,}6 \cdot \vec{i} - 50 \cdot \vec{j} \\ 40 \cdot \vec{i} + 69{,}3 \cdot \vec{j} \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_C = \frac{\begin{vmatrix} -86{,}6 \cdot \vec{i} - 50 \cdot \vec{j} & 0{,}1 \\ 40 \cdot \vec{i} + 69{,}3 \cdot \vec{j} & 0{,}9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{vmatrix}} = \frac{-81{,}94 \cdot \vec{i} - 51{,}93 \cdot \vec{j}}{0{,}7} = 138{,}6 N \angle 212{,}4°$$

$$\vec{F}_D = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}8 & -86{,}6 \cdot \vec{i} - 50 \cdot \vec{j} \\ 0{,}2 & 40 \cdot \vec{i} + 69{,}3 \cdot \vec{j} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{vmatrix}} = \frac{49{,}32 \cdot \vec{i} + 65{,}43 \cdot \vec{j}}{0{,}7} = 117{,}1 N \angle 53°$$

Mas $m_C = \dfrac{|\vec{F}_C|}{R_C \cdot \omega_{bal}^2} = \dfrac{138{,}6}{0{,}1 \cdot 261{,}8^2} = 20{,}2 \cdot 10^{-3} kg = 20{,}2 g$ e

$$m_D = \frac{|\vec{F}_D|}{R_D \cdot \omega_{bal}^2} = \frac{117{,}1}{0{,}1 \cdot 261{,}8^2} = 17{,}1 \cdot 10^{-3} kg = 17{,}1 g$$

Para distribuir as três massas no plano **C** de modo a dar a resultante desejada, colocaremos a primeira massa (**10g**) na posição **212,4º** e as outras duas dispostas simetricamente em relação à primeira, de modo que suas componentes na direção **212,4º** somem $20{,}2 - 10 = 10{,}2 = 2 \cdot 5{,}1 g$. Portanto, cada massa deve dar uma contribuição de **5,1g** na direção **212,4º**, apesar de terem **10g** cada. O ângulo **α** com a direção **212,4 º** fica:

$\cos(\alpha) = \dfrac{5{,}1}{10} \quad \therefore \quad \alpha = 59{,}3°$ Portanto, uma das massas a **271,7º** e a outra a **153,1 º**.

Para o plano **D**, colocamos a primeira massa na direção **53º** e as outras duas dispostas simetricamente de modo que cada uma contribua com **3,55g**. O ângulo **β** com a direção **53º** fica:

$\cos(\beta) = \dfrac{3{,}55}{10} \quad \therefore \quad \beta = 69{,}2°$ Portanto, uma das massas a **-16,2 º** e a outra a **122,2 º**.

b) Para calcularmos o desbalanceamento residual admissível, usamos a definição de classe de balanceamento ISO

$e_{ad} \cdot \omega_{oper} = 2{,}5 mm/s$ sendo $\omega_{oper} = 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{3000 rpm}{60 s} = 314 \cdot rad/s$ $\quad e_{ad} = 0{,}008 mm$

Portanto, o desbalanceamento total admissível fica:

$$u_{ad} = M \cdot e_{ad} = 50000 \cdot 0{,}008 = 400 g \cdot mm$$

Tendo o rotor uma distribuição de massas razoavelmente simétrica, o desbalanceamento admissível em cada plano é $200 g \cdot mm$

c) Se colocássemos as três massas de balanceamento de cada plano juntas, obteríamos o máximo desbalanceamento que poderia ser corrigido em cada plano. A soma dos dois desbalanceamentos passíveis de correção daria:

$$u_{cor} = 3 \cdot m \cdot R \cdot 2 = 6 \cdot 10 \cdot 100 = 6000 g \cdot mm$$ Portanto,

$$e_{cor} = \frac{u_{cor}}{M} = \frac{6000}{50000} = 0{,}12mm \qquad e_{cor} \cdot \omega_{oper} = 0{,}12 \cdot 314 = 38mm/s$$

Poderíamos corrigir um desbalanceamento inicial quase de uma classe **ISO G40**

2ª Questão:

a) O deslocamento medido do rotor original corresponde à deflexão total eixo-mancais quando submetidos à força de inércia devida ao desbalanceamento original.

$$\vec{x}_{orig} = 0{,}05mm\angle 240° = 0{,}05 \cdot (\cos 240° \cdot \vec{i} + sen240° \cdot \vec{j}) = 0{,}05 \cdot (-0{,}5 \cdot \vec{i} - \sqrt{3}/2 \cdot \vec{j})$$

medido em um sistema de eixos ortogonais que gira com o rotor, de modo que o versor $\vec{i}$ aponta para a direção de medida no instante do pulso do foto-detector e o versor $\vec{j}$ aponta para a direção de medida após **90º** de rotação do rotor.

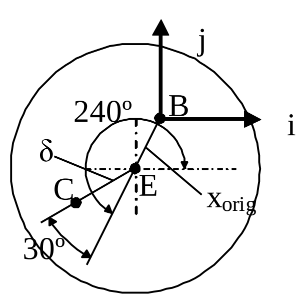
Após a adição de uma massa de teste ***m=100g*** na direção da marca de referência do foto-detector (portanto, na direção $\vec{j}$, conforme representado na figura), obteve-se a seguinte deflexão total eixo-mancais: $\vec{x}_{orig+t} = 0{,}05mm\angle 180° = -0{,}05 \cdot \vec{i}$

Portanto, o efeito da massa de teste colocada na posição **90º** fica:

$$\vec{x}_{orig+t} - \vec{x}_{orig} = 0{,}05 \cdot (-\vec{i} + 0{,}5 \cdot \vec{i} + \sqrt{3}/2 \cdot \vec{j}) = 0{,}05mm\angle 120°$$

Conclui-se, portanto, que o efeito de uma massa de ***m=100g***, adicionada ao rotor no raio ***R=0,5m*** em uma determinada direção, foi o de provocar uma deflexão do sistema eixo-mancais de ***0,05mm*** em uma direção atrasada de ***30º***. Portanto, para neutralizar a deflexão original de ***0,05mm*** a ***240º***, devemos adicionar uma massa de ***100g*** a ***30º***. Observe-se que esta massa de correção provocaria uma deflexão de ***0,05mm*** a ***60º***, que neutralizaria completamente a deflexão original.

b) Na rotação de operação do rotor, $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}036 \cdot s} = 174{,}5 rad/s$, as posições relativas de ***B***, ***E*** e ***C***, para o rotor na condição original, ficam:



$(C - E) = \delta\angle 210°$. Sendo

$$\delta = \frac{m \cdot R}{M} = \frac{0{,}1kg \cdot 500mm}{1000kg} = 0{,}05mm$$

$$(E - B) = \vec{x}_{orig} = 0{,}05mm\angle 240°$$

c) A força de inércia devida ao movimento circular uniforme de ***C*** ao redor de ***B***, com velocidade angular ***ω***, fica: $\vec{F}_{in} = M \cdot (C - B) \cdot \omega^2$

A força de restituição elástica do conjunto eixo-mancais pode ser representada por: $\vec{F}_{el} = k \cdot (B - E)$

Na ausência de forças dissipativas, essa duas forças teriam a mesma direção e sentidos opostos. Existindo uma força de arraste que se opõe ao movimento de orbitação de ***E***, poderíamos escrever: $\vec{F}_{in} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_{arr} = \vec{0}$.

Projetando na direção de ***(B-E)***, podemos escrever:

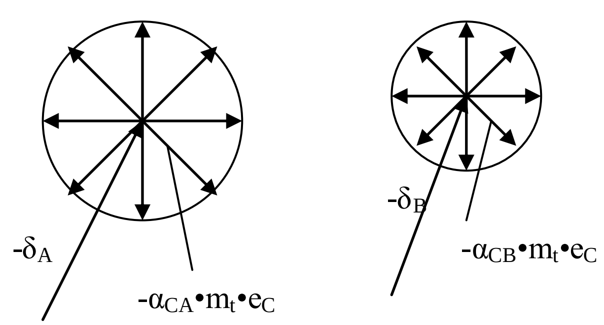
$k \cdot x_{orig} = M \cdot \omega^2 \cdot (\vec{x}_{orig} + \vec{\delta}) \cdot \dfrac{\vec{x}_{orig}}{\left|\vec{x}_{orig}\right|}$ ou, substituindo os valores,

$k \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-3} = 1000 \cdot 174{,}5^2 \cdot (0{,}05 \cdot 10^{-3} + 0{,}05 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 30°)$, que permite estimar o valor de $k = 5{,}68 \cdot 10^7\ N/m$

d) A velocidade crítica do conjunto rotor-mancais fica: $\omega_{cr} = \sqrt{\dfrac{k}{M}} = 238\,rad/s$

3ª Questão:

a) Uma vez que massas de teste são muito menores que a massa do rotor e que elas são adicionadas em raios muito maiores que a distância entre o eixo geométrico e o central de inércia, o efeito da adição de uma massa de teste, em determinada direção radial, só provoca o deslocamento do eixo central de inércia no plano radial definido pela mencionada direção. Além disso, tendo o rotor simetria radial, o valor absoluto do deslocamento radial do eixo de inércia, por exemplo no plano ***A***, é sempre o mesmo, independentemente da direção de adição da massa. Assim, se adicionarmos uma massa de teste m_t no plano ***C***, na direção radial de um versor $\vec{e}_C$, provocaremos um deslocamento do traço do eixo central de inércia no plano ***A*** de $-\alpha_{CA} \cdot m_t \cdot \vec{e}_C$. Da mesma maneira, no plano ***B***, obteríamos um deslocamento do traço do eixo de inércia de; $-\alpha_{CB} \cdot m_t \cdot \vec{e}_C$. Denominando $\vec{\delta}_A$ e $\vec{\delta}_B$ as posições dos traços do eixo geométrico em relação às posições dos traços do eixo central de inércia do rotor original nos planos ***A*** e ***B***, representamos na figura as posições resultantes dos traços do eixo de inércia em relação aos do geométrico nos planos ***A*** e ***B.*** Vale observar que a figura refere-se a uma massa de teste adicionada ao plano ***C*** em oito direções igualmente espaçadas.



Os gráficos apresentados mostram, por exemplo para o plano ***A***, o valor absoluto da soma dos dois vetores $\left|\vec{\delta}_A + \alpha_{CA} \cdot m_t \cdot \vec{e}_C\right|$ em função da posição angular de $\vec{e}_C$. Assim, a variação total de amplitude do vetor, corresponde a $2 \cdot \alpha_{CA} \cdot m_t$. Lembrando que α_{CA} é negativo, podemos escrever:

$$\alpha_{CA} = -0{,}02 mm/g \qquad \alpha_{DB} = -0{,}01 mm/g$$
$$\alpha_{CB} = 0{,}01 mm/g \qquad \alpha_{DA} = 0{,}005 mm/g$$

b) Lembrando que α_{CA} é negativo, observamos que o valor absoluto do vetor $\left|\vec{\delta}_A + \alpha_{CA} \cdot m_t \cdot \vec{e}_C\right|$ é mínimo quando $\vec{e}_C$ tem a mesma direção e sentido de $\vec{\delta}_A$. O módulo de $\vec{\delta}_A$ é a média dos valores máximo e mínimo dos gráficos correspondentes ao mancal ***A***. Analogamente, determinamos o valor de $\vec{\delta}_B$.

$$\vec{\delta}_A = 0{,}4 mm \angle 180° \qquad \vec{\delta}_B = 0{,}2 mm \angle 270°$$

c) Para determinar as massas a serem adicionadas nos planos ***C*** e ***D***, basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} m_C \cdot \vec{e}_C \\ m_D \cdot \vec{e}_D \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \vec{\delta}_A \\ \vec{\delta}_B \end{bmatrix}$$

ou ainda, substituindo os valores:

$$\begin{bmatrix} -0{,}02 & 0{,}005 \\ 0{,}01 & -0{,}01 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} m_C \cdot \vec{e}_C \\ m_D \cdot \vec{e}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \cdot \vec{i} \\ 0{,}2 \cdot \vec{j} \end{bmatrix}$$

$$m_C \cdot \vec{e}_C = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}4 \cdot \vec{i} & 0{,}005 \\ 0{,}2 \cdot \vec{j} & -0{,}01 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}02 & 0{,}005 \\ 0{,}01 & -0{,}01 \end{vmatrix}} = \frac{-0{,}004 \cdot \vec{i} - 0{,}001 \cdot \vec{j}}{0{,}0002 - 0{,}00005} = -26{,}67 \cdot \vec{i} - 6{,}67 \cdot \vec{j} = 27{,}5 g \angle 194°$$

$$m_D \cdot \vec{e}_D = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}02 & 0{,}4 \cdot \vec{i} \\ 0{,}01 & 0{,}2 \cdot \vec{j} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}02 & 0{,}005 \\ 0{,}01 & -0{,}01 \end{vmatrix}} = \frac{-0{,}004 \cdot \vec{i} - 0{,}004 \cdot \vec{j}}{0{,}00015} = -26{,}67 \cdot \vec{i} - 26{,}67 \cdot \vec{j} = 37{,}7 g \angle 225°$$