SOLUÇÃO 1ª PROVA PME - 2352   01/09/06

Prof. Francisco E. B. Nigro

1ª Questão:

a) Pela leitura do gráfico apresentado, as forças rotativas agindo nos mancais **A** e **B**, medidas em um sistema de referência preso no rotor cuja posição **0º** corresponde à direção de medida da força no mancal quando ocorre o pulso da foto-célula, ficam:

$$\vec{F}_{Aorig} = 100N\angle 0° = 100N \cdot \vec{i} \qquad \vec{F}_{Borig} = 100N\angle 120° = -50N \cdot \vec{i} + 86{,}6N \cdot \vec{j}$$

A velocidade angular do rotor nessa condição é:

$$\omega_{bal1} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}036 \cdot s} = 174{,}5 rad/s = 1667 r.p.m.$$

Após a adição da massa de **20g** no plano **C** a um raio de **150 mm**, o rotor foi colocado a girar com uma velocidade angular:

$$\omega_{bal2} = \frac{3000}{60} \cdot 2 \cdot \pi = 314{,}2 rad/s$$

Nessas condições, a força de inércia na massa adicionada fica:

$$\vec{F}_C = m_C \cdot R_C \cdot \omega_{bal}^2 \cdot \vec{e}_C = 0{,}02 \cdot 0{,}15 \cdot 314{,}2^2 \cdot \vec{i} = 296{,}1N \cdot \vec{i}$$

Decompondo essa força em duas forças radiais nos planos **A** e **B** (mesma resultante e momento em relação a qualquer ponto do rotor), obtemos:

$$\vec{F}_{CA} = \vec{F}_C \cdot (\frac{500}{600}) = 246{,}7N \cdot \vec{i} \qquad \vec{F}_{CB} = \vec{F}_C \cdot (\frac{100}{600}) = 49{,}4N \cdot \vec{i}$$

As forças nos mancais decorrentes do desbalanceamento original do rotor, na nova rotação, ficam

$$\vec{F}_{A2} = \left(\frac{3000}{1667}\right)^2 \cdot 100N \cdot \vec{i} = 324N \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_{B2} = \left(\frac{3000}{1667}\right)^2 \cdot (-50 \cdot \vec{i} + 86{,}6 \cdot \vec{j}) = -162N \cdot \vec{i} + 280{,}6N \cdot \vec{j}$$

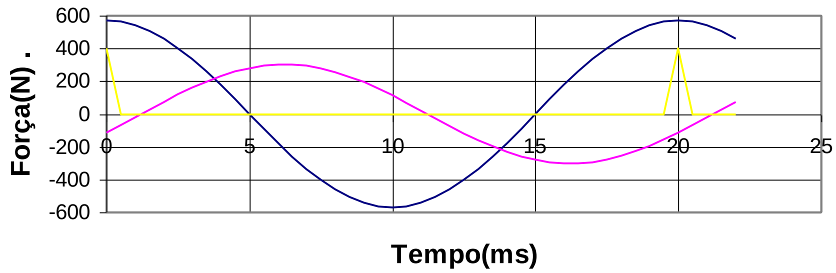
Portanto, as forças resultantes nos mancais ficam:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{A2} = 570{,}7N \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{CB} + \vec{F}_{B2} = -112{,}6N \cdot \vec{i} + 280{,}6N \cdot \vec{j} = 302{,}3N\angle 111{,}9°$$

O tempo para uma volta completa a **3000 rpm** é : $T=60/3000=0{,}02s$

Os registros das forças nos mancais se apresentarão como segue:

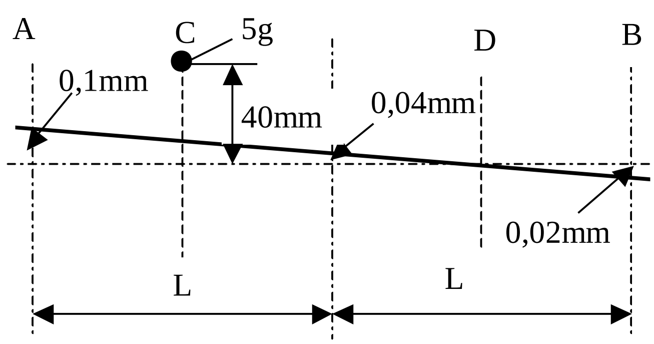


2ª Questão:

a) Uma vez que o rotor é simétrico, o plano do centro de massa está eqüidistante dos planos dos mancais. Além disso, o deslocamento radial do centro de massa pela adição de **5g** a um raio de **40mm**, sendo a massa do rotor **5kg**, pode ser calculado:

$$\Delta_{CM} = \frac{m \cdot r}{M} = \frac{5 \cdot 40}{5000} = 0{,}04mm$$

Se a massa de **5g** provocou um deslocamento do eixo de inércia em relação ao eixo geométrico de **0,1mm** no plano do mancal **A**, o deslocamento no plano do mancal **B** pode ser obtido geométricamente como indicado na figura.



Portanto, os coeficientes de influência ficam:

$$\alpha_{CA} = \frac{-0{,}1mm}{5g} = -0{,}02mm/g \qquad \alpha_{CB} = \frac{0{,}02mm}{5g} = 0{,}004mm/g$$

Vale observar que o sinal negativo aplicado no deslocamento no plano A é devido ao fato que o eixo de inércia se desloca no direção angular da massa, levando a leitura na máquina de balancear para a direção oposta, uma vez que a projeção horizontal do eixo de inércia é que fica parada, enquanto a projeção do eixo geométrico fica oscilando em torno dela. Pelo mesmo motivo, o sinal do deslocamento no plano B foi mantido positivo.
Por simetria, obtemos os outros coeficientes.

$$\alpha_{DA} = \alpha_{CB} = 0{,}004mm/g \qquad \alpha_{DB} = \alpha_{CA} = -0{,}02mm/g$$

b) Para balancear o rotor devemos adicionar massas nos planos **C** e **D**, no mesmo raio em que foi colocada a massa de teste, de modo que:

$$\begin{cases} \vec{\delta}_{A,orig} + \alpha_{CA} \cdot m_C \cdot \vec{e}_C + \alpha_{DA} \cdot m_D \cdot \vec{e}_D = \vec{0} \\ \vec{\delta}_{B,orig} + \alpha_{CB} \cdot m_C \cdot \vec{e}_C + \alpha_{DB} \cdot m_D \cdot \vec{e}_D = \vec{0} \end{cases}$$

ou $\begin{bmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} m_C \cdot \vec{e}_C \\ m_D \cdot \vec{e}_D \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \vec{\delta}_{A,orig} \\ \vec{\delta}_{B,orig} \end{bmatrix}$ Portanto, sendo os deslocamentos do rotor original lidos no gráfico, podemos calcular as massas, como segue:

$$\vec{\delta}_{A,orig} = 0{,}1mm\angle 90° = 0{,}1mm \cdot \vec{j}$$

$$\vec{\delta}_{B,orig} = 0{,}2mm\angle 240° = -0{,}1mm \cdot \vec{i} - 0{,}173mm \cdot \vec{j}$$

$$m_C \cdot \vec{e}_C = -\frac{\begin{vmatrix} \vec{\delta}_{A,orig} & \alpha_{DA} \\ \vec{\delta}_{B,orig} & \alpha_{DB} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0{,}1\vec{j} & 0{,}004 \\ -0{,}1\vec{i} - 0{,}173\vec{j} & -0{,}02 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}02 & 0{,}004 \\ 0{,}004 & -0{,}02 \end{vmatrix}} = -\frac{0{,}0004\vec{i} - 0{,}00131\vec{j}}{0{,}000384} = 3{,}6g\angle 107°$$

$$m_D \cdot \vec{e}_D = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{CA} & \vec{\delta}_{A,orig} \\ \alpha_{CB} & \vec{\delta}_{B,orig} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{CA} & \alpha_{DA} \\ \alpha_{CB} & \alpha_{DB} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -0{,}02 & 0{,}1\vec{j} \\ 0{,}004 & -0{,}1\vec{i} - 0{,}173\vec{j} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0{,}02 & 0{,}004 \\ 0{,}004 & -0{,}02 \end{vmatrix}} = -\frac{0{,}002\vec{i} + 0{,}00306\vec{j}}{0{,}000384} = 9{,}5g\angle 237°$$

c) Para calcularmos o desbalanceamento residual admissível, usamos a definição de classe de balanceamento ISO

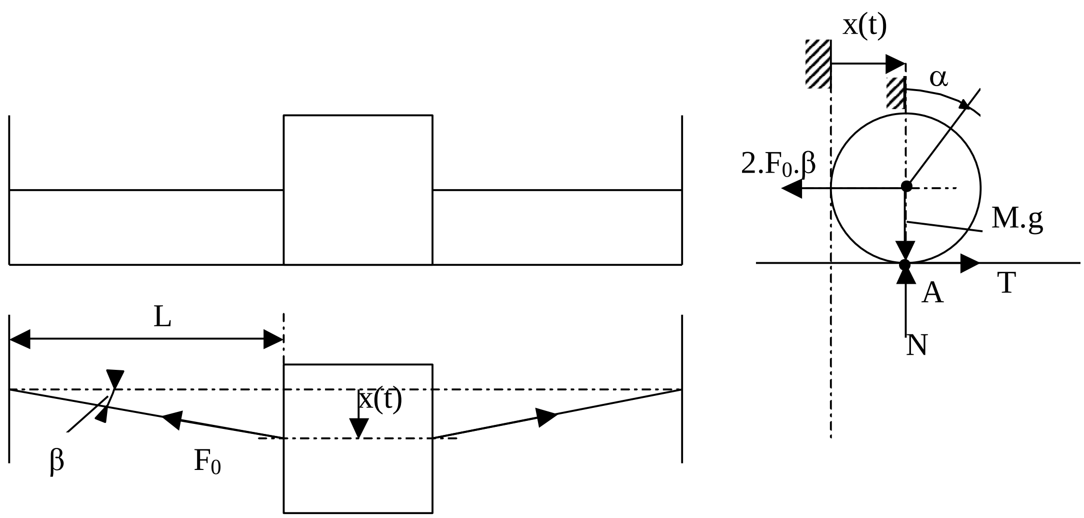
$e_{ad} \cdot \omega_{oper} = 6{,}3mm/s$ sendo $\omega_{oper} = 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{5000rpm}{60s} = 523{,}6 \cdot rad/s$

$$e_{ad} = 0{,}012mm \therefore M \cdot e_{ad} = 60g \cdot mm$$

Portanto $\begin{cases} \Delta m_A = \dfrac{60}{2 \cdot r} = 0{,}75g \\ \Delta m_B = \dfrac{60}{2 \cdot r} = 0{,}75g \end{cases}$

3ª Questão:

a) Sendo **x(t)** o deslocamento horizontal do eixo do cilindro, medido da posição de equilíbrio representada, e **α(t)** o ângulo de rolagem do cilindro no sentido horário, também medido da posição de equilíbrio, temos: **x(t)=R.α(t)**. Supondo pequenos movimentos em torno da posição de equilíbrio, o ângulo **β** de inclinação dos fios é pequeno e a força nos fios se mantem aproximadamente igual a **F_0**. Podemos resolver o problema, tanto equacionando as forças (dinâmica newtoniana), como a energia (dinâmica lagrangeana). No que segue, iremos usar as duas maneiras a título de ilustração. Isolando o corpo e aplicando o **TMA** em torno do ponto de contato **A**, e considerando **β<<1** , vem:



A projeção da força em cada fio na direção do movimento do eixo do cilindro fica:

$$F_0 \cdot sen(\beta) \cong F_0 \cdot \tan(\beta) = F_0 \cdot \frac{x}{L}$$

$$J_A \cdot \ddot{\alpha} = \frac{3}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \left(\frac{\ddot{x}}{R}\right) = -2 \cdot F_0 \cdot \frac{x}{L} \cdot R$$

Portanto, a equação diferencial do movimento fica:

$$M \cdot \ddot{x} + \frac{4}{3} \cdot \frac{F_0}{L} \cdot x = 0$$

Poderíamos, também, obter a equação diferencial via energia. Equacionando as energias cinética e potencial total do sistema, para movimento não necessariamente pequeno, obtemos:

$$E_C = \frac{1}{2}\cdot M\cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{M\cdot R^2}{2}\cdot\dot{\alpha}^2 = \frac{3}{4}\cdot M\cdot\dot{x}^2$$

$$E_P = 2\cdot\int_L^{\sqrt{L^2+x^2}}(F_0 + k\cdot y)\cdot dy = 2\cdot F_0\cdot(\sqrt{L^2+x^2} - L) + k\cdot(L^2 + x^2 - L^2)$$

Sendo $x \ll L$ e $k \ll F_0/L$ vem:

$$E_P = 2\cdot F_0\cdot L\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{x}{L}\right)^2} - 1\right] + k\cdot x^2 \cong 2\cdot F_0\cdot L\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 = \frac{F_0}{L}\cdot x^2$$

Derivando a energia total do sistema no tempo e igualando a zero (sistema conservativo), vem:

$$\frac{d}{dt}\left(E_C + E_P\right) = \left(\frac{3}{2}\cdot M\cdot\ddot{x} + 2\cdot\frac{F_0}{L}\cdot x\right)\cdot\dot{x} = 0$$

Como $\dot{x}$ nào é permanentemente zero, o termo entre parenteses é zero, o que fornece a mesma equação anterior.

b) A freqüência natural de oscilação do sistema para pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio fica:

$$\omega = \sqrt{\frac{4\cdot F_0}{3\cdot M\cdot L}}$$

c) A solução da equação diferencial é do tipo

$x(t) = A\cdot sen(\omega\cdot t) + B\cdot\cos(\omega\cdot t)$ com $\omega = \sqrt{\frac{4\cdot F_0}{3\cdot M\cdot L}}$ e portanto

$$\dot{x}(t) = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) - B\cdot\omega\cdot sen(\omega\cdot t)$$

Aplicando as condições iniciais, obtemos:

$p/t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} A = 0 \\ B = x_0 \end{cases}$ Portanto, $x(t) = x_0\cdot\cos(\omega\cdot t)$