SOLUÇÃO PROVA PME - 2352 14/09/05

Prof. Francisco E. B. Nigro

1ª Questão:

a) Pela leitura do gráfico apresentado, as forças rotativas agindo nos mancais **A** e **B**, medidas em um sistema de referência preso no rotor cuja posição **0º** corresponde à direção de medida do deslocamento no mancal quando ocorre o pulso da foto-célula, ficam:

$$\vec{F}_A = 50N\angle 30° \qquad \vec{F}_B = 100N\angle 210° = -100N\angle 30°$$

Lembrando que essas forças são as resultantes das forças de inércia rotativas de cada elemento de massa do rotor, e que bastam duas forças radiais, nos planos **C** e **D**, para equilibrá-las, podemos supor a existência dessas forças e escrever:

$$\vec{F}_C = m_C \cdot R_C \cdot \omega_{bal}^2 \cdot \vec{e}_C \qquad \vec{F}_D = m_D \cdot R_D \cdot \omega_{bal}^2 \cdot \vec{e}_D$$

Decompondo cada uma dessas forças em duas forças radiais nos planos **A** e **B** (mesma resultante e momento em relação a qualquer ponto do rotor), obtemos:

$$\vec{F}_{CA} = \vec{F}_C \cdot \left(\frac{b+c}{a+b+c}\right) \qquad \vec{F}_{DA} = \vec{F}_D \cdot \left(\frac{b}{a+b+c}\right)$$

$$\vec{F}_{CB} = \vec{F}_C \cdot \left(\frac{a}{a+b+c}\right) \qquad \vec{F}_{DB} = \vec{F}_C \cdot \left(\frac{a+c}{a+b+c}\right)$$

Para balancear o rotor, basta fazermos com que a resultante em cada plano de mancal seja nula, portanto:

$$\vec{F}_{CA} + \vec{F}_{DA} + \vec{F}_A = \vec{0} \qquad \vec{F}_{CB} + \vec{F}_{DB} + \vec{F}_B = \vec{0}$$

No caso geral, podemos escrever portanto:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{b+c}{a+b+c} & \dfrac{b}{a+b+c} \\ \dfrac{a}{a+b+c} & \dfrac{a+c}{a+b+c} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vec{F}_C \\ \vec{F}_D \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{F}_B \end{bmatrix}$$

No nosso caso, em que todos os vetores estão na direção **30º**, basta resolvermos as equações escalares:

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_C \\ F_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 100 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_C = -13N \\ F_D = 180N \end{cases} \therefore \begin{cases} \vec{F}_C = 13N\angle 210° \\ \vec{F}_D = 180N\angle 30° \end{cases}$$

Portanto, calculamos as massas a serem adicionadas nos planos **C** e **D**

$$\omega_{bal} = \frac{2 \cdot \pi}{60ms} = 104{,}7rad/s$$

$$\begin{cases} m_C = \dfrac{\left|\vec{F}_C\right|}{R_C \cdot \omega_{bal}^2} = 0{,}015kg \\ m_D = \dfrac{\left|\vec{F}_D\right|}{R_D \cdot \omega_{bal}^2} = 0{,}164kg \end{cases}$$ a serem adicionadas a $\begin{cases} \angle 210° \\ \angle 30° \end{cases}$

b) Para calcularmos o desbalanceamento residual admissível, usamos a definição de classe de balanceamento ISO

$e_{ad} \cdot \omega_{oper} = 6{,}3mm/s$ sendo $\omega_{oper} = 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{3600rpm}{60s} = 377rad/s$

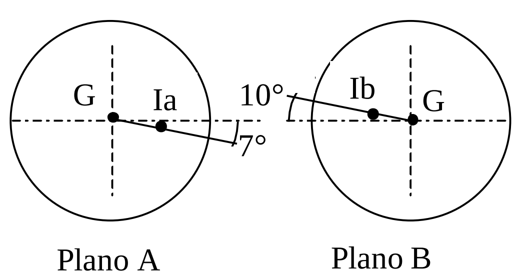
$e_{ad} = 0{,}017mm \therefore \dfrac{M \cdot e_{ad}}{2} = 418g \cdot mm$ em cada plano de balanceamento. Portanto

$$\begin{cases} \Delta m_C = \dfrac{418}{R_C} = 5g \\ \Delta m_D = \dfrac{418}{R_D} = 4g \end{cases}$$

2ª Questão:

a) Da leitura do gráfico, obtemos a amplitude do movimento do centro geométrico de cada mancal em relação ao eixo central de inércia. Assim:

$\vec{\delta}_A = 0{,}37mm\angle 173°$ $\vec{\delta}_B = 0{,}18mm\angle 350°$ Portanto, os traços ficam:



b) Sendo ***M=25kg***, vem:

$$J_p = \frac{25 \cdot 0{,}1^2}{2} = 0{,}125 kg \cdot m^2 \qquad J_t = 25 \cdot \left(\frac{0{,}1^2}{4} + \frac{0{,}3^2}{12} \right) = 0{,}25 kg \cdot m^2$$

Portanto, o deslocamento do centro de massa do rotor provocado pela adição de **25g** em um plano distando ***l=70mm*** do plano do **CM**, em um raio de **100mm**, fica:

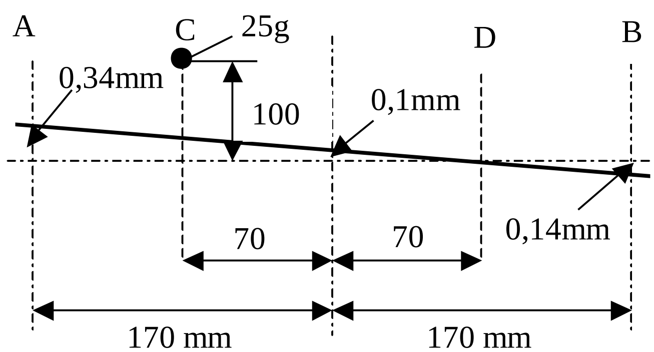
$$\Delta r_{CM} = \frac{m \cdot r}{M} = \frac{0{,}025 kg \cdot 100}{25 kg} = 0{,}1 mm$$

A inclinação do eixo de inércia, fica:

$$\gamma = \frac{m \cdot r \cdot l}{J_t - J_p} = \frac{0{,}025 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}07}{0{,}125} = 0{,}0014 rad$$

Podemos calcular a distância entre os traços dos eixos geométricos e de inércia nos planos **A** e **B**.

$$\delta_{A,teor} = 0{,}1 + 170 \cdot 0{,}014 = 0{,}34 mm \qquad \delta_{B,teor} = -0{,}1 + 170 \cdot 0{,}014 = 0{,}14 mm$$



Ou seja: $\vec{\delta}_{A,teor} = 0{,}34 mm \angle 180°$ $\qquad \vec{\delta}_{B,teor} = 0{,}14 mm \angle 0°$

c) Portanto, a incerteza na indicação de amplitude e de ângulo é:

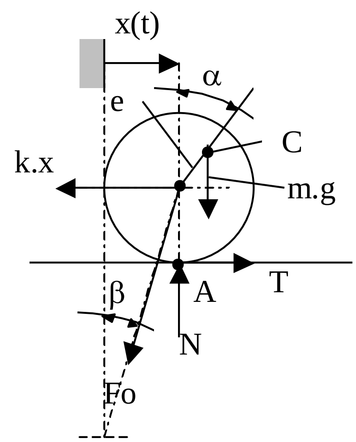
$$\Delta\delta_A = 0{,}03 mm \qquad \Delta\angle A = 7°$$

$$\Delta\delta_B = 0{,}04 mm \qquad \Delta\angle B = 10°$$

3ª Questão:

a) Sendo **x(t)** o deslocamento de **O** para a direita, medido da posição de equilíbrio representada, e **α(t)** o ângulo de rolagem do cilindro no sentido horário, também medido da posição de equilíbrio, temos: **x(t)=R.α(t)**. Supondo pequenos movimentos em torno da posição de equilíbrio, a velocidade do centro de massa é praticamente paralela ao plano, tornando desprezível a aceleração vertical do centro de massa. Como uma das perguntas do problema envolve a determinação da componente horizontal da reação de contato, isolaremos o cilindro e aplicaremos o **TMB** e o **TMA**. Podemos, alternativamente, utilizar o teorema da conservação de energia para obter a equação diferencial do movimento, mas teremos que isolar o corpo para calcularmos a reação de contato. No que segue, iremos usar as duas maneiras a título de ilustração. Isolando o corpo e aplicando o **TMB**, para **α<<1** e **β<<1** , vem:

$$N = m \cdot g + F_0 \qquad T - k \cdot x - \frac{F_0}{L} \cdot x = m \cdot \ddot{x}_C$$



Mas **x(t)=R.α (t)** e **x_C(t) ≅(R+e) .α(t)**, portanto:

$$T = (k + \frac{F_0}{L}) \cdot R \cdot \alpha + m \cdot (R + e) \cdot \ddot{\alpha}$$

Aplicando o **TMA** em relação a **C**, vem:

$$J_C \cdot \ddot{\alpha} = (k + \frac{F_0}{L}) \cdot e + (N - F_0) \cdot e \cdot \alpha - T \cdot (R + e)$$

Substituindo **N** e **T**, vem:

$$[J_C + m \cdot (R + e)^2] \cdot \ddot{\alpha} + (k \cdot R^2 + \frac{F_0}{L} \cdot R^2) \cdot \alpha - m \cdot g \cdot e \cdot \alpha = 0$$

que é a equação diferencial linearizada pedida. Se equacionarmos as energias cinética e potencial total do sistema, para movimento não necessariamente pequeno, obtemos:

$$E_C = \frac{m}{2} \cdot (R^2 + e^2 + 2 \cdot R \cdot e \cdot \cos\alpha) \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{J_C}{2} \cdot \dot{\alpha}^2$$

$$E_P = mg \cdot e \cdot \cos\alpha + \frac{k}{2} \cdot (R \cdot \alpha)^2 + \int_L^{\sqrt{L^2 + (R \cdot \alpha)^2}} F_0 \cdot dy = mg \cdot e \cdot \cos\alpha + \frac{k}{2} \cdot (R \cdot \alpha)^2 + F_0 \cdot (\sqrt{L^2 + R^2 \cdot \alpha^2} - L)$$

Derivando cada termo de energia do sistema no tempo e igualando a soma a zero (sistema conservativo), vem:

$$\frac{d}{dt} E_C = [m \cdot (R^2 + e^2 + 2 \cdot R \cdot e \cdot \cos\alpha) + J_C] \cdot \dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} - m \cdot R \cdot e \cdot sen\alpha \cdot \dot{\alpha}^3$$

$$\frac{d}{dt} E_P = -m \cdot g \cdot e \cdot sen\alpha \cdot \dot{\alpha} + k \cdot R^2 \cdot \alpha \cdot \dot{\alpha} + \frac{F_0 \cdot R^2 \cdot \alpha \cdot \dot{\alpha}}{\sqrt{L^2 + R^2 \cdot \alpha^2}}$$

Somando as duas expressões, colocando $\dot{\alpha}$ em evidência, e lembrando que $\dot{\alpha}$ não é permanentemente zero, anulamos a expressão que multiplica $\dot{\alpha}$, e obtemos a equação diferencial completa do movimento. Se admitirmos pequena amplitude de movimento, fazendo **senα≅ α**, **cosα≅1**, **R.α << L**, e desprezando o termo em que aparece produto das variáveis, obtemos:

$$[J_C + m \cdot (R + e)^2] \cdot \ddot{\alpha} + (k \cdot R^2 + \frac{F_0}{L} \cdot R^2) \cdot \alpha - m \cdot g \cdot e \cdot \alpha = 0$$

que é a mesma equação anterior.

b) Para estudarmos a estabilidade do ponto de equilíbrio, basta verificarmos o sinal do termo em **α**. Assim, se:

$k \cdot R^2 + \frac{F_0}{L} \cdot R^2 > m \cdot g \cdot e$ o equilíbrio é estável. Se o termo da esquerda for menor que o da direita, oequilíbrio é instável, e se os dois termos forem iguais o equilíbrio é indiferente.

c) A freqüência natural de oscilação do sistema para pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio fica:

$$\omega = \sqrt{\frac{(k + \frac{F_0}{L}) \cdot R^2 - m \cdot g \cdot e}{J_C + m \cdot (R+e)^2}}$$, sendo a solução **α(t)=Λ.sen(ω.t+ϕ),** ou ainda,

x(t)=R. Λ.sen(ω.t+ϕ).

d) Sendo $\mathbf{J_C=m.R^2/2}$; **e=R/2**; **L=4.R**; $\mathbf{F_0=2.m.g}$, obtemos a seguinte solução para **x(t)**

$x(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)$ com $\omega = \sqrt{\frac{k \cdot R^2}{11/4 \cdot m \cdot R^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot k}{11 \cdot m}}$

Aplicando as condições iniciais, obtemos:

$p/t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} A = 0 \\ B = x_0 \end{cases}$ Portanto, $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

Para calcularmos a variação no tempo da força tangencial de contato, basta usar a equação já obtida pela aplicação do **TMB** na horizontal, e substituir **α(t)**=**x(t)/R** na equação, para obtermos:

$$T(t) = (k + \frac{2 \cdot m \cdot g}{L}) \cdot x(t) + \frac{3}{2} \cdot m \cdot \ddot{x}(t) = (k + \frac{2 \cdot m \cdot g}{L} - \frac{3}{2} \cdot m \cdot \omega^2) \cdot x(t)$$ ou ainda:

$$T(t) = (\frac{5}{11} \cdot k + \frac{2 \cdot m \cdot g}{L}) \cdot x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Vale observar ainda que, sendo $N = m \cdot g + F_0 = 3 \cdot m \cdot g$, toda vez que

$\frac{T_{\max}}{N} = [\frac{5}{33} \cdot k \cdot L + \frac{2}{3}] \cdot \frac{x_0}{L} > \mu$ (coeficiente de atrito entre o cilindro e o plano), ocorre

deslizamento do cilindro sobre o plano.