SOLUÇÃO 2ª PROVA PME - 2341 31/05/06

Prof. Francisco E. B. Nigro Prof. Walter ponge-Ferreira

1ª Questão:

a) Chamando de **x(t)** o deslocamento absoluto da coluna direita para baixo, medido da configuração de equilíbrio, considerando o fluido separado do recipiente e submetido a forças gravitacionais e de contato normais às superfícies, exceto pelo elemento de fluxo laminar o qual demanda uma diferença de pressão Δp para equilibrar as tensões de cizalhamento no seu interior, e observando ainda que toda partícula fluida experimenta o mesmo deslocamento **x(t)**, com a mesma velocidade **dx/dt** e mesma aceleração **d²x/dt²** , podemos escrever:

$$(\rho \cdot A \cdot L) \cdot \ddot{x} = (p(t) - P_{atm}) \cdot A - 2 \cdot \rho \cdot g \cdot x \cdot A - \Delta p \cdot A$$

Mas, $\Delta p = 12 \dfrac{\cdot \mu \cdot l_c}{h^2} \cdot \dot{x}$ portanto:

$$\rho \cdot L \cdot \ddot{x} + 12 \cdot \frac{\mu \cdot l_c}{h^2} \cdot \dot{x} + 2 \cdot \rho \cdot g \cdot x = p(t) - P_{atm}$$

b) Sabemos que a equação diferencial linear ordinária de segunda ordem escrita acima apresenta uma frequência natural ω e um fator de amortecimento ζ dados por:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{L}} \quad \text{e} \quad \zeta = \frac{12 \cdot \mu \cdot l_c}{h^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \rho \cdot g \cdot \rho \cdot L}} = \frac{6 \cdot \mu \cdot l_c}{\sqrt{2 \cdot g \cdot L} \cdot \rho \cdot h^2}$$

Para que a resposta seja rápida e pouco oscilatória, devemos impor ζ próximo de 1, digamos $\sqrt{2}/2 < \zeta \leq 1$

Para ζ=**1**, $h = \sqrt{\dfrac{6 \cdot \mu \cdot l_c}{\sqrt{2 \cdot g \cdot L} \cdot \rho}}$

c) Se $p(t) - P_{atm} = \begin{cases} 0 \leftarrow (t \leq 0) \\ P_0 \leftarrow (t > 0) \end{cases}$ e ζ=**1**, obtemos:

$$x(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega \cdot t} + \frac{P_0}{2 \cdot \rho \cdot g} \quad \text{e} \quad \dot{x}(t) = B \cdot e^{-\omega \cdot t} - (A + B \cdot t) \cdot \omega \cdot e^{-\omega \cdot t}$$

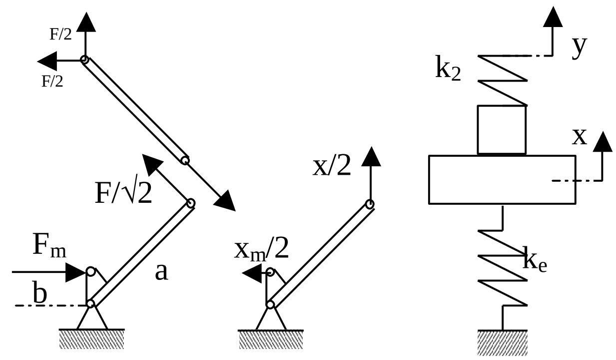
com as condições iniciais em **t=0: x(0)=0; dx/dt(0)=0.** Portanto:

$$A = -\frac{P_0}{2 \cdot \rho \cdot g} \qquad B = A \cdot \omega$$

$$x(t) = \frac{P_0}{2 \cdot \rho \cdot g} \cdot [1 - (1 + \omega \cdot t) \cdot e^{-\omega \cdot t}]$$

2ª Questão:

a) Para calcular a rigidez equivalente indicada na figura, podemos determinar a relação entre uma força **F** aplicada na sapata e a força $\mathbf{F_m}$ decorrente na mola, assim como a relação entre um deslocamento **x** na sapata e o deslocamento decorrente $\mathbf{x_m}$ na mola.



$$F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = F_m \cdot b$$

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{x_m}{2}}{b}$$

$$k_1 = \frac{F_m}{x_m} \qquad k_e = \frac{F}{x}$$

Portanto $\quad k_e = k_1 \cdot 2 \cdot \frac{b^2}{a^2}$

b) Para o sistema equivalente representado na figura, supondo **x(t)** e **y(t)** genéricos, e aplicando o TMB à massa $\mathbf{(m_1+m_2)}$, obtemos:

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} = k_2 \cdot (y - x) - k_e \cdot x$$ ou ainda, lembrando que $s(t) = v \cdot t$

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + (k_2 + k_e) \cdot x = k_2 \cdot Y_0 \cdot sen(\omega_f \cdot t)$$ onde $\omega_f = 2 \cdot \pi \cdot \frac{v}{\lambda}$

c) A freqüência natural do sistema fica:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_2 + k_e}{m_1 + m_2}}$$

d) Supondo o movimento em regime permanente, vem:

$$x(t) = \frac{k_2 \cdot Y_0}{k_2 + k_e} \cdot \frac{sen(\omega_f \cdot t)}{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}$$

e) A velocidade do carro que provoca a ressonância do sistema é dada por:

$$\omega_f = 2 \cdot \pi \cdot \frac{v}{\lambda} = \omega_n = \sqrt{\frac{k_2 + k_e}{m_1 + m_2}}$$

Portanto, $\quad v_{res} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k_2 + k_e}{m_1 + m_2}}$

f) Fazendo o diagrama de corpo livre da massa $\mathbf{m_1}$ e lembrando que na posição de equilíbrio a força de contato entre $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ é $\mathbf{Q_0}$, podemos escrever:

$$F_{cont} = Q_0 - [m_1 \cdot \ddot{x}(t) + k_e \cdot x(t)]$$

Substituindo a função **x(t)**, vem:

$$F_{cont} = Q_0 - [k_e - m_1 \cdot \omega_f^2] \cdot \frac{k_2 \cdot Y_0 \cdot sen(\omega_f \cdot t)}{[k_2 + k_e - (m_1 + m_2) \cdot \omega_f^2]}$$

Impondo força de contato nula, lembrando que $k_2 > k_e$ e $m_1 > m_2$, vem:

$$\frac{Q_0}{k_2 \cdot Y_0} = \frac{m_1 \cdot \omega_f^2 - k_e}{k_2 + k_e - (m_1 + m_2) \cdot \omega_f^2}$$ ou ainda:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{\frac{Q_0}{k_2 \cdot Y_0} \cdot (k_2 + k_e) + k_e}{m_1 + (m_1 + m_2) \cdot \frac{Q_0}{k_2 \cdot Y_0}}}$$ e, portanto $$v_{\max} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{\frac{Q_0}{k_2 \cdot Y_0} \cdot (k_2 + k_e) + k_e}{m_1 + (m_1 + m_2) \cdot \frac{Q_0}{k_2 \cdot Y_0}}}$$

3ª Questão:

a) Chamando de **θ(t)** o ângulo de inclinação da carcaça no sentido horário da figura, medido à partir da posição de equilíbrio, e aplicando o TMA em relação ao eixo central de inércia para o motor completo, obtemos:

$$I_m \cdot \ddot{\theta} + I_r \cdot (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = -4 \cdot k \cdot a^2 \cdot \theta - 4 \cdot c_{eq} \cdot a^2 \cdot \dot{\theta}$$ ou ainda

$$(I_m + I_r) \cdot \ddot{\theta} + 4 \cdot c_{eq} \cdot a^2 \cdot \dot{\theta} + 4 \cdot k \cdot a^2 \cdot \theta = -I_r \cdot \sum_i c_i \cdot sen(i \cdot \Omega \cdot t + \phi_i)$$

onde $$c_{eq} = \frac{b \cdot k}{\omega_f}$$ sendo ω_f a freqüência na qual o sistema está vibrando.

b) A solução particular para cada componente da excitação fica:

$$\theta_i(t) = -\frac{\frac{I_r \cdot c_i}{4 \cdot k \cdot a^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{i \cdot \Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + b^2}} \cdot sen(i \cdot \Omega \cdot t + \phi_i - \psi_i)$$ com

$$\omega = \sqrt{\frac{4 \cdot k \cdot a^2}{I_m + I_r}} \qquad \tan(\psi_i) = \frac{b}{1 - \left(\frac{i \cdot \Omega}{\omega}\right)^2}$$

Para cada componente do momento de força transmitido ao solo, podemos escrever:

$$M_i(t) = \frac{4 \cdot b \cdot k \cdot a^2}{i \cdot \Omega} \cdot \dot{\theta}_i(t) + 4 \cdot k \cdot a^2 \cdot \theta_i(t)$$ que após a substituição de $\theta_i(t)$ e $\dot{\theta}_i(t)$ fica:

$$M_i(t) = -\frac{I_r \cdot c_i}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{i \cdot \Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + b^2}} \cdot [sen(i \cdot \Omega \cdot t + \phi_i - \psi_i) + b \cdot \cos(i \cdot \Omega \cdot t + \phi_i - \psi_i)]$$

ou ainda:

$$M_i(t) = -\frac{I_r \cdot c_i \cdot \sqrt{1 + b^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{i \cdot \Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + b^2}} \cdot sen(i \cdot \Omega \cdot t + \phi_i - \psi_i + \beta) \quad \text{com} \quad \tan(\beta) = b$$

Portanto, a amplitude de cada componente do momento transmitido ao solo fica:

$$\overline{M}_i = \frac{I_r \cdot c_i \cdot \sqrt{1 + b^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{i \cdot \Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + b^2}}$$

c) Calculemos agora o valor de $r = \Omega/\omega$ para que o momento transmitido seja menor que **5 N.m** em qualquer freqüência específica. Uma vez que existe maior dificuldade de filtrar baixas freqüências, estaremos verificando os valores menores de **i** e de **Ω**.

Para $i = 1$ e $\Omega = \frac{800}{60} \cdot 2 \cdot \pi$ vem:

$$\frac{0{,}2 \cdot 25 \cdot \sqrt{1 + 0{,}1^2}}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + 0{,}1^2}} < 5 \quad \text{sendo} \quad r = \frac{\Omega}{\omega} \qquad r > 1{,}42$$

Para $i = 2$ e $\Omega = \frac{800}{60} \cdot 2 \cdot \pi$ vem:

$$\frac{0{,}2 \cdot 600 \cdot \sqrt{1 + 0{,}1^2}}{\sqrt{\left[(2 \cdot r)^2 - 1\right]^2 + 0{,}1^2}} < 5 \quad \text{portanto} \quad r > 2{,}52$$

Para valores maiores de **i**, como os valores de $\mathbf{c_i}$ são menores, obteremos menores valores de **r**. Portanto, o caso mais crítico ocorre na freqüência de explosão.

$$\omega \le \frac{800 \cdot 2 \cdot \pi}{60 \cdot 2{,}52} = 33{,}4 rad/s$$ Portanto: $$4 \cdot k \cdot a^2 \le (I_m + I_r) \cdot \omega^2$$

$$k \le 33{,}4^2 \cdot \frac{31 \cdot 0{,}2}{4 \cdot 0{,}25^2} = 27700 N/m$$