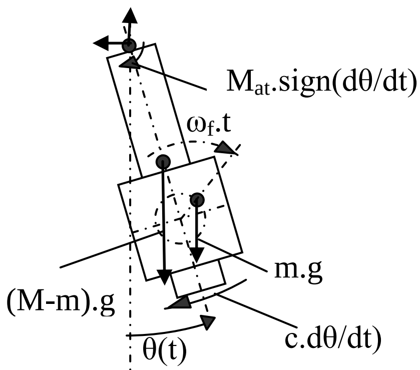
SOLUÇÃO 2ª PROVA PME - 2352 27/10/06

Prof. Francisco E. B. Nigro

1ª Questão:

a) O sistema tem um grau de liberdade. Sendo **θ(t)** o ângulo de inclinação do pêndulo, tomado como zero na posição de equilíbrio, podemos obter a equação diferencial do movimento de oscilação aplicando o **TMA** em relação ao pólo **A**. Fazendo o diagrama de corpo livre para o pêndulo completo (incluindo motor desbalanceado), vem:



Se o centro de massa do conjunto gira em torno do ponto **C**, que dista **L** de **A**, e a massa **m** dista em média **a** de **A**, a distância do centro de massa do pêndulo sem o rotor dista **d** de **A** , tal que: $d = \dfrac{M \cdot L - m \cdot a}{M - m}$. Sendo J'_A o momento de inércia do pêndulo sem o rotor em relação ao eixo da articulação e supondo pequenas amplitudes de oscilação, o **TMA)_A** fornece:

$$\frac{d}{dt}\left[J'_A\dot{\theta} + m(a \cdot \dot{\theta} + e \cdot \omega_f \cdot \cos(\omega_f \cdot t))a\right] = -c \cdot \dot{\theta} - M_{at}\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} - (M-m)g \cdot d \cdot \theta - m \cdot g(a \cdot \theta + e \cdot sen(\omega_f \cdot t))$$

Ou ainda:

$$\left(J'_A + m \cdot a^2\right) \cdot \ddot{\theta} + \left(c + \frac{M_{at}}{|\dot{\theta}|}\right) \cdot \dot{\theta} + M \cdot g \cdot L \cdot \theta = m \cdot e \cdot (a \cdot \omega_f^2 - g) \cdot sen(\omega_f \cdot t)$$

O primeiro termo entre parênteses representa o momento de inércia do pêndulo completo em relação ao eixo da articulação, que chamaremos J_A

Vale observar que existem dois termos de excitação harmônica com sinais opostos, sendo um deles com amplitude constante e o outro com amplitude variável com a freqüência ao quadrado. Isto significa que, na ausência de atrito seco, em baixíssimas freqüências, o deslocamento de m em um sentido provoca o deslocamento do pêndulo no sentido oposto. Em freqüências mais altas, o termo de inércia passa a ser dominante, invertendo a fase do deslocamento em relação à posição da massa rotativa.

b) A freqüência natural de oscilação do pêndulo fica: $\omega = \sqrt{\dfrac{M \cdot g \cdot L}{J_A}}$

Apesar de a equação diferencial ser não linear, em virtude do momento de atrito seco, admitiremos um amortecimento viscoso equivalente, que dissipe a mesma energia por ciclo com o pêndulo oscilando em regime permanente. A resposta fica:

$$\theta_p(t) = \Theta_p \cdot sen(\omega_f \cdot t - \psi)$$

A energia dissipada por atrito seco em um ciclo de oscilação de amplitude Θ_p fica:

$E_d = 4 \cdot M_{at} \cdot \Theta_p$ que deve ser igualada à energia dissipada por um amortecedor viscoso equivalente $E_d = \pi \cdot c_{eq} \cdot \Theta_p^2 \cdot \omega_f$. Portanto, $c_{eq} = \dfrac{4 \cdot M_{at}}{\pi \cdot \Theta_p \omega_f}$

O fator de amortecimento equivalente, correspondente ao atrito seco, fica:

$\zeta_{eq} = \dfrac{c_{eq}}{2 \cdot \sqrt{M \cdot g \cdot L \cdot J_A}}$ e sendo $r = \omega_f / \omega$, o termo

$$2 \cdot \zeta_{eq} \cdot r = \frac{4 \cdot M_{at}}{\pi \cdot \Theta_p \cdot \omega_f \cdot \sqrt{M \cdot g \cdot L \cdot J_A}} \cdot \frac{\omega_f}{\sqrt{M \cdot g \cdot L / J_A}} = \frac{4 \cdot M_{at}}{\pi \cdot \Theta_p \cdot M \cdot g \cdot L}$$

Portanto, a amplitude da resposta em regime permanente fica:

$$\Theta_p = \frac{\dfrac{m \cdot e \cdot (a \cdot \omega^2 \cdot r^2 - g)}{M \cdot g \cdot L}}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2 \cdot (\zeta + \zeta_{eq}) \cdot r\right)^2}} = \frac{\dfrac{m \cdot e \cdot a}{J_A} \cdot \left(r^2 - \dfrac{J_A}{M \cdot L \cdot a}\right)}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2 \cdot \zeta \cdot r + \dfrac{4 \cdot M_{at}}{\pi \cdot M \cdot g \cdot L \cdot \Theta_p}\right)^2}}$$

Elevando ao quadrado e multiplicando ambos os membros pelo denominador, vem:

$$\left[\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2 \cdot \zeta \cdot r\right)^2\right] \cdot \Theta_p^2 + \frac{16 \cdot \zeta \cdot r \cdot M_{at}}{\pi \cdot M \cdot g \cdot L} \Theta_p + \left(\frac{4 \cdot M_{at}}{\pi \cdot M \cdot g \cdot L}\right)^2 - \left(\frac{u \cdot a}{J_A}\right)^2 \left(r^2 - \frac{J_A}{M \cdot L \cdot a}\right)^2 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau, e escolhendo o valor positivo, obtemos:

$$\Theta_p = -\frac{2 \cdot \zeta \cdot r \cdot \dfrac{4 \cdot M_{at}}{\pi \cdot M \cdot g \cdot L}}{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2} + \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \zeta \cdot r \cdot \dfrac{4 \cdot M_{at}}{\pi \cdot M \cdot g \cdot L}}{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2}\right)^2 + \frac{\left(\dfrac{u \cdot a}{J_A}\right)^2 \left(r^2 - \dfrac{J_A}{M \cdot L \cdot a}\right)^2 - \left(\dfrac{4 \cdot M_{at}}{\pi \cdot M \cdot g \cdot L}\right)^2}{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2}}$$

O ângulo de fase da resposta pode ser calculado por:

$$\tan(\psi) = \frac{2 \cdot (\zeta + \zeta_{eq}) \cdot r}{1 - r^2}$$

c) A curva de resposta apresentada indica que a freqüência de ressonância é

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}7 = 4{,}5 rad / s$. Portanto, $J_A = \dfrac{M \cdot g \cdot L}{\omega^2} = \dfrac{40}{20} = 2 \cdot kg \cdot m^2$

Vale observar que quando $\omega_f \to \infty$ o valor de $\Theta_p \to \dfrac{u \cdot a}{J_A}$

Em baixas freqüências, o trecho da curva de resposta que se mantém no zero corresponde à situação na qual o momento de atrito seco é maior que o momento de excitação. Portanto, para um movimento quase-estático, $M_{at} > m.g.e$ para que não ocorra oscilação. Como o efeito da força de inércia é no sentido oposto ao da excitação pela gravidade, o pêndulo só começará a se deslocar quando a freqüência de excitação for tal que $m\cdot e\cdot(a\cdot\omega_f^2 - g) > M_{at}$.

Como houve engano na geração da curva de resposta, tendo sido utilizado um valor de a=5m, embora mantido o produto $u.a = 0{,}005kg.m^2$, pode-se estimar o valor do momento de atrito como: $M_{at} = u\cdot(a\cdot\omega_f^2 - g) = 0{,}001\cdot[5\cdot(2\cdot\pi\cdot 0{,}35)^2 - 10] = 0{,}014\,Nm$

Para calcular o fator de amortecimento, usamos a expressão da amplitude para $r=1$

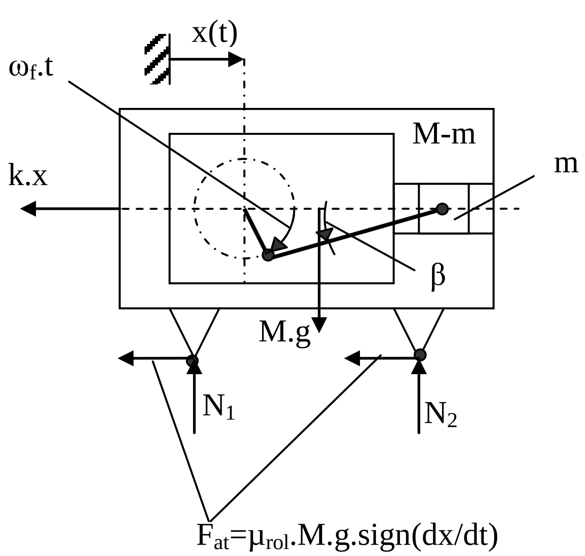
$$\Theta_p = \frac{\dfrac{u\cdot a}{J_A}\cdot\left(1 - \dfrac{J_A}{M\cdot L\cdot a}\right)}{2\cdot\zeta + \dfrac{4\cdot M_{at}}{\pi\cdot M\cdot g\cdot L\cdot\Theta_p}} \quad \text{ou} \quad 2\cdot\zeta = \frac{\dfrac{u\cdot a}{J_A}\cdot\left(1 - \dfrac{J_A}{M\cdot L\cdot a}\right) - \dfrac{4\cdot M_{at}}{\pi\cdot M\cdot g\cdot L}}{\Theta_p}$$

$$2\cdot\zeta = \frac{0{,}0025\cdot(1-0{,}1) - \dfrac{4\cdot 0{,}014}{\pi\cdot 40}}{1{,}05\cdot\pi/180} = 0{,}1 \text{ e portanto,}$$

$$c = 2\cdot\zeta\cdot\sqrt{M\cdot g\cdot L\cdot J_A} = 0{,}1\cdot\sqrt{80} = 0{,}89\,N\cdot m\cdot s/rad$$

2ª Questão:

a) O sistema tem um grau de liberdade, pois o movimento da massa **m** em relação à carcaça do brinquedo é conhecido. Sendo **x(t)** o deslocamento absoluto da carcaça para a direita, medido da posição em que a mola está descarregada, e chamando de **y(t)** a distância do eixo do pino do pistão ao eixo da manivela, vamos fazer o diagrama de forças externas no sistema completo.



Aplicando o TMB na direção horizontal, obtemos:

$$(M-m)\cdot\ddot{x} + m\cdot(\ddot{x}+\ddot{y}) = -k\cdot x - F_{at}$$

A equação diferencial reordenada fica:

$$M\cdot\ddot{x} + \mu_{rol}\cdot M\cdot g\cdot\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + k\cdot x = -m\cdot\ddot{y}$$

com freqüência natural $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$

b) O movimento do pistão em relação à carcaça é dado por:

$y(t) = R\cdot\cos(\omega_f\cdot t) + L\cdot\cos(\beta)$. Mas $\dfrac{sen(\beta)}{R} = \dfrac{sen(\omega_f\cdot t)}{L}$

Portanto, $y(t) = R\cdot\cos(\omega_f\cdot t) + L\cdot\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\cdot sen(\omega_f\cdot t)\right)^2}$

Mas $sen^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\cdot\alpha)}{2}$ e $\sqrt{1+\varepsilon} \cong 1+\frac{\varepsilon}{2}$ para $\varepsilon << 1$, portanto

$$y(t) = R\cdot\cos(\omega_f\cdot t) + 4\cdot R\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{[1-\cos(2\cdot\omega_f\cdot t)]}{2}}$$

$y(t) \cong R\cdot\cos(\omega_f\cdot t) + 4\cdot R\cdot\left(1-\frac{1}{64}\cdot[1-\cos(2\cdot\omega_f\cdot t]\right)$. Portanto, a aceleração

$\ddot{y}(t) \cong -R\cdot\omega_f^2\left[\cos(\omega_f\cdot t) + \frac{1}{4}\cdot\cos(2\cdot\omega_f\cdot t)\right]$ com os dois primeiros componentes harmônicos.

c) Para obtermos uma solução de regime permanente da equação diferencial com atrito seco, vamos supor um amortecimento viscoso equivalente que dissipe a mesma energia por ciclo que o atrito seco.

$$M\cdot\ddot{x} + c_{eq}\cdot\dot{x} + k\cdot x = m\cdot R\cdot\omega_f^2\cdot\left[\cos(\omega_f\cdot t) + \frac{1}{4}\cdot\cos(2\cdot\omega_f\cdot t)\right]$$

Se a solução particular for do tipo: $x_{p,i}(t) = X_{p,i}\cdot\cos(i\cdot\omega_f\cdot t - \psi_i) \quad p/\ i = 1,2$

a energia dissipada por ciclo fica: $E_{d,i} = 4\cdot\mu_{rol}\cdot M\cdot g\cdot X_{p,i} = \pi\cdot c_{eq,i}\cdot X_{p,i}^2\cdot i\cdot\omega_f$

Portanto, o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente fica:

$c_{eq,i} = \frac{4\cdot\mu_{rol}\cdot M\cdot g}{\pi\cdot X_{p,i}\cdot i\cdot\omega_f}$ ou ainda, $2\cdot\zeta_{eq,i}\cdot r_i = \frac{4\cdot\mu_{rol}\cdot M\cdot g}{\pi\cdot X_{p,i}\cdot k}$

A amplitude da vibração da solução particular correspondente a cada harmônico puro, fica: $X_{p,i} = \dfrac{\dfrac{m\cdot R\cdot\omega_f^2}{k\cdot i^2}}{\sqrt{(1-r_i^2)^2 + \left(\dfrac{4\cdot\mu_{rol}\cdot M\cdot g}{\pi\cdot k\cdot X_{p,i}}\right)^2}}$ Elevando ao quadrado e explicitando $X_{p,i}$

$$X_{p,i} = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{m\cdot R\cdot\omega_f^2}{k\cdot i^2}\right)^2 - \left(\dfrac{4\cdot\mu_{rol}\cdot M\cdot g}{\pi\cdot k}\right)^2}}{\left|1-\left(\dfrac{i\cdot\omega_f}{\omega}\right)^2\right|},\quad \tan(\psi_i) = \frac{\dfrac{4\cdot\mu_{rol}\cdot M\cdot g}{\pi\cdot k\cdot X_{p,i}}}{1-\left(\dfrac{i\cdot\omega_f}{\omega}\right)^2}$$, para $i = 1, 2$

Deve-se observar que:

1. Quando $\omega_f = \omega/i$, a amplitude da resposta correspondente ao componente i-ésimo vai para infinito, ficando portanto muito maior que as outras componentes.

2. Sendo a equação diferencial não linear, a soma das soluções particulares correspondentes a cada harmônico não é a solução particular. Tal fato decorre dos coeficientes de amortecimento equivalentes serem diferentes para cada harmônico. Assim, para obtermos uma solução aproximada que leve em conta a dissipação por atrito seco (valores pequenos) podemos determinar inicialmente a solução não amortecida e, dependendo da freqüência de excitação, escolhermos como coeficiente de amortecimento aquele correspondente à componente de maior amplitude de velocidade, que é quem dita o número de mudanças de direção da força de atrito.

d) Considerando os dois primeiros componentes harmônicos, quando $\omega_f = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad ou \quad \omega_f = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{k}{M}}$ ocorrem ressonâncias.

3ª Questão:

a) O sistema possui um único grau de liberdade, uma vez que o movimento do pinhão da caixa de direção é conhecido. Sendo **β(t)** o deslocamento angular absoluto do rotor do transdutor, medido da posição de equilíbrio com **α(t)** na posição zero e positivo no mesmo sentido de **α(t)** positivo, podemos fazer o diagrama de corpo livre do rotor do transdutor e, aplicando o TMA em relação ao eixo, obter a seguinte equação:

$J\cdot\ddot{\beta} = k_t\cdot(\alpha-\beta)$ ou ainda $J\cdot\ddot{\beta} + k_t\cdot\beta = k_t\cdot\alpha(t)$

com $\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_0\cdot\left(1-\cos(\omega_f\cdot t)\right) & para\ 0\le t<T \\ 0 & para\ T\le t\end{cases}$ onde $\omega_f = \frac{2\cdot\pi}{T}$

Outra possibilidade é definirmos o deslocamento absoluto do rotor como a soma do deslocamento angular do eixo com o erro angular ***ε(t)***, escrevendo a equação diferencial em ***ε(t)***. Neste caso, obtemos:

$J\cdot\left(\ddot{\varepsilon}+\ddot{\alpha}\right) = -k_t\cdot\varepsilon$ ou $J\cdot\ddot{\varepsilon} + k_t\cdot\varepsilon = -J\cdot\ddot{\alpha}(t)$ com

$$\ddot{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha_0\cdot\omega_f^2\cdot\cos(\omega_f\cdot t) & para\ 0\le t<T \\ 0 & para\ T\le t\end{cases}$$

b) Para calcular a resposta do sistema à excitação dada, podemos achar a solução geral de uma das equações diferenciais e impor as condições iniciais, ou usar a integral da convolução, definindo **α** como **α(τ)**. Vamos resolver a equação diferencial em ***β(t)***, embora a solução via ***ε(t)*** seja algebricamente mais simples.

A solução da homogênea é: $\beta_h(t) = A\cdot sen(\omega\cdot t) + B\cdot\cos(\omega\cdot t)$ com $\omega = \sqrt{\frac{k_t}{J}}$

Para $0\le t<T$ a solução particular é formada de duas componentes, como segue:

$\beta_p(t) = \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{1-r^2}\cdot\cos(\omega_f\cdot t)$ com $r = \frac{\omega_f}{\omega}$. Portanto, a solução geral fica;

$\beta(t) = A\cdot sen(\omega\cdot t) + B\cdot\cos(\omega\cdot t) + \alpha_0\cdot\left(1-\frac{\cos(\omega_f\cdot t)}{1-r^2}\right)$ e:

$$\dot{\beta}(t) = A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) - B\cdot\omega\cdot sen(\omega\cdot t) + \alpha_0\cdot\omega_f\cdot\frac{sen(\omega_f\cdot t)}{1-r^2}$$

Impondo as condições iniciais

Para $t = 0$ $\begin{cases} \beta(0) = 0 = B - \dfrac{\alpha_0 \cdot r^2}{1 - r^2} \\ \dot{\beta}(0) = 0 = A \cdot \omega \end{cases}$ Portanto $\begin{cases} B = \dfrac{\alpha_0 \cdot r^2}{1 - r^2} \\ A = 0 \end{cases}$

Portanto, a solução fica: $\beta(t) = \alpha_0 \cdot \left[1 + \dfrac{r^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_f \cdot t)}{1 - r^2} \right]$ e

$\dot{\beta}(t) = \alpha_0 \cdot \dfrac{\omega_f \cdot sen(\omega_f \cdot t) - r^2 \cdot \omega \cdot sen(\omega \cdot t)}{1 - r^2}$, que são válidas para $0 \le t < T$.

Para $t \ge T$, a solução é só a da homogênea. Portanto:

$\beta(t) = A' \cdot sen[\omega \cdot (t - T)] + B' \cdot \cos[\omega \cdot (t - T)]$ com as seguintes condições iniciais:

Para $t = T$ $\begin{cases} \beta(T) = \alpha_0 \cdot \dfrac{r^2 \cdot [\cos(\omega \cdot T) - 1]}{1 - r^2} = B' \\ \dot{\beta}(T) = -\alpha_0 \cdot \dfrac{r^2 \cdot \omega \cdot sen(\omega \cdot T)}{1 - r^2} = A' \cdot \omega \end{cases}$

Portanto, a solução fica:

$$\beta(t) = -\alpha_0 \cdot \frac{r^2 \cdot sen(\omega \cdot T)}{1 - r^2} \cdot sen[\omega \cdot (t - T)] + \alpha_0 \cdot \frac{r^2 \cdot [\cos(\omega \cdot T) - 1]}{1 - r^2} \cdot \cos[\omega \cdot (t - T)]$$

Ou ainda,

$$\beta(t) = \alpha_0 \cdot \frac{r^2}{1 - r^2} \cdot \left[\cos(\omega \cdot t) - \cos[\omega \cdot (t - T)] \right]$$

c) O erro de indicação pode ser calculado pela diferença entre os valores de **α(t)** e **β(t)**. A diferença máxima, em princípio, poderia ocorrer tanto para valores de **t** maiores ou menores que **T**. Para os valores dados,

$$\omega = \sqrt{\frac{k_t}{J}} = \sqrt{\frac{0{,}5}{2 \cdot 10^{-7}}} \cong 1580 rad / s \qquad \omega_f = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}008} \cong 790 rad / s$$

ou seja, neste caso, $\omega \cong 2 \cdot \omega_f$ e $r \cong \dfrac{1}{2}$

Portanto, para $t > T$, $\beta(t) = 0$ pois $\omega . T = 4 . \pi$ e $\cos[\omega .(t-T)] = \cos(\omega . t)$. Sendo $\alpha(t) = 0$, o erro é nulo para $t > T$

Para valores de $t < T$ o erro fica;

$$\varepsilon(t) = \alpha(t) - \beta(t) = \alpha_0 \cdot [1 - \cos(\omega_f \cdot t)] - \alpha_0 \cdot \left[1 + \frac{r^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_f \cdot t)}{1 - r^2} \right]$$

$$\varepsilon(t) = -\alpha_0 \cdot \frac{(1 - r^2) \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + r^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_f \cdot t)}{1 - r^2} = \alpha_0 \cdot \frac{r^2}{1 - r^2} \cdot [\cos(\omega_f \cdot t) - \cos(\omega \cdot t)]$$

Para os dados, o valor absoluto de $\varepsilon(t) = \dfrac{\alpha_0}{3} \cdot \left| \cos(\omega_f \cdot t) - \cos(2 \cdot \omega_f \cdot t) \right|$

O máximo (ou mínimo) de $\cos(\phi)-\cos(2\cdot\phi)$ ocorre quando $\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\cos(\phi)-\cos(2\cdot\phi)\right]=0$

Portanto, $-sen(\phi)+2\cdot sen(2\cdot\phi)=sen(\phi)\cdot[4\cdot\cos(\phi)-1]=0$. No intervalo $0\le\phi\le 2\cdot\pi$

vem: mínimo $\Rightarrow\begin{cases}\phi=0\\ \phi=2\cdot\pi\end{cases}$ máximo $\Rightarrow ar\cos(1/4)=\begin{cases}\phi=75{,}5°\\ \phi=284{,}5°\end{cases}$

Portanto $\varepsilon_{\max}=\frac{3}{8}\cdot\alpha_0$

Para resolvermos o problema utilizando a equação diferencial em ***ε(t)***, escrevemos.

Solução da homogênea: $\varepsilon_h(t)=A''\cdot sen(\omega\cdot t)+B''\cdot\cos(\omega\cdot t)$

Solução particular: $\varepsilon_p(t)=\frac{\frac{-J\cdot\alpha_0\cdot\omega_f^2}{k_t}}{1-r^2}\cdot\cos(\omega_f\cdot t)=-\alpha_0\cdot\frac{r^2}{1-r^2}\cdot\cos(\omega_f\cdot t)$

que é válida para $0\le t<T$. Portanto, a solução geral fica:

$$\varepsilon(t)=A''\cdot sen(\omega\cdot t)+B''\cdot\cos(\omega\cdot t)-\alpha_0\cdot\frac{r^2}{1-r^2}\cdot\cos(\omega_f\cdot t)$$

$$\dot{\varepsilon}(t)=A''\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)-B''\cdot\omega\cdot sen(\omega\cdot t)+\alpha_0\cdot\omega_f\cdot\frac{r^2}{1-r^2}\cdot sen(\omega_f\cdot t)$$

Impondo as condições iniciais

Para $t=0$ $\begin{cases}\varepsilon(0)=0=B''-\frac{\alpha_0\cdot r^2}{1-r^2}\\ \dot{\varepsilon}(0)=0=A''\cdot\omega\end{cases}$ Portanto $\begin{cases}B''=\frac{\alpha_0\cdot r^2}{1-r^2}\\ A''=0\end{cases}$

Portanto, a solução fica: $\varepsilon(t)=\alpha_0\cdot\frac{r^2}{1-r^2}\cdot\left[\cos(\omega\cdot t)-\cos(\omega_f\cdot t)\right]$ e

$\dot{\varepsilon}(t)=\alpha_0\cdot\frac{r^2}{1-r^2}\cdot\left[\omega_f\cdot sen(\omega_f\cdot t)-\omega\cdot sen(\omega\cdot t)\right]$, expressões válidas para $0\le t<T$.

Para $t\ge T$, a solução é só a da homogênea. Portanto:

$\varepsilon(t)=A'''\cdot sen[\omega\cdot(t-T)]+B'''\cdot\cos[\omega\cdot(t-T)]$ com as seguintes condições iniciais:

Para $t=T$ $\begin{cases}\varepsilon(T)=\alpha_0\cdot\frac{r^2\cdot[\cos(\omega\cdot T)-1]}{1-r^2}=B'''\\ \dot{\varepsilon}(T)=-\alpha_0\cdot\frac{r^2\cdot\omega\cdot sen(\omega\cdot T)}{1-r^2}=A'''\cdot\omega\end{cases}$

Portanto, a solução fica:

$$\varepsilon(t)=-\alpha_0\cdot\frac{r^2\cdot sen(\omega\cdot T)}{1-r^2}\cdot sen[\omega\cdot(t-T)]+\alpha_0\cdot\frac{r^2\cdot[\cos(\omega\cdot T)-1]}{1-r^2}\cdot\cos[\omega\cdot(t-T)]$$

Ou ainda,

$\varepsilon(t)=\alpha_0\cdot\frac{r^2}{1-r^2}\cdot\left[\cos(\omega\cdot t)-\cos[\omega\cdot(t-T)]\right]$ para $t\ge T$

A análise do valor máximo do erro, para os parâmetros dados, é idêntica à já realizada.