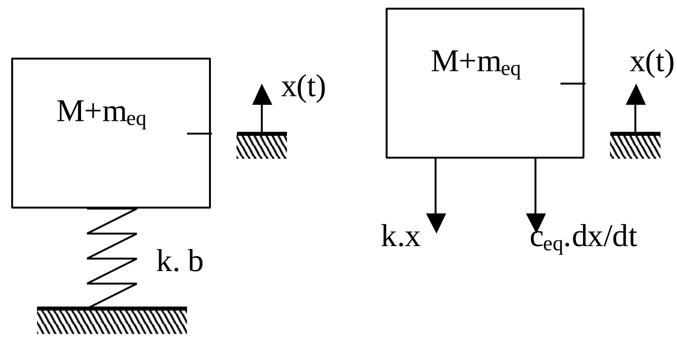
SOLUÇÃO PROVA PME - 2352 04/10/05

Prof. Francisco E. B. Nigro

1ª Questão:

a) O sistema de parâmetros concentrados que representa o movimento vertical do ponto **O** é representado ao lado.

Supondo-se que **x(t)** seja medido a partir da posição de equilíbrio, isolando-se a massa e aplicando-se o TMB, obtém-se a equação diferencial em **x(t)**.



$$(M + m_{eq}) \cdot \ddot{x} + c_{eq} \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

com $c_{eq} = \dfrac{b \cdot k}{\omega}$ e $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M + m_{eq}}}$

b) A solução da equação diferencial fica:

$$x(t) = X \cdot e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} \cdot sen(\omega_d \cdot t + \phi) \qquad \omega_d = \omega \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \qquad \zeta = \frac{b}{2}$$

c) Observando os gráficos de decaimento das vibrações, identificam-se os dois períodos de oscilação **T_1= (4/11)** s e **T_2= 0,5** s, sendo o menor período referente à menor massa. Portanto, as freqüências dos sistemas amortecidos **$\omega_{d1} = 2.\pi/T_1$= =5,5.π** rad/s e **ω_{d2} =2.π/T_2 = 4.π** rad/s.

Para calcularmos o coeficiente de histerese utilizamos a expressão do decremento logarítmico

$$\delta = \pi \cdot b = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{X_i}{X_{i+n}}\right) = \frac{1}{7} \cdot \ln\left(\frac{1}{0{,}8}\right)$$

Portanto, **b= 0,01**

Para esse valor reduzido de **b**, $\omega = \omega_d$ e portanto

$$\omega_1^2 = \frac{k}{M_1 + m_{eq}} = \frac{k}{3 \cdot m + m_{eq}} \qquad \omega_2^2 = \frac{k}{6 \cdot m + m_{eq}}$$

$$(4 \cdot \pi)^2 \cdot (6 \cdot m + m_{eq}) = (5{,}5 \cdot \pi)^2 \cdot (3 \cdot m + m_{eq})$$

resolvendo, vem:

$$m_{eq} = 0{,}368 \cdot m \quad \text{e} \quad k[N/m] = (4 \cdot \pi)^2 \cdot (6 \cdot m + 0{,}368 \cdot m) = 1006 \cdot m[kg]$$

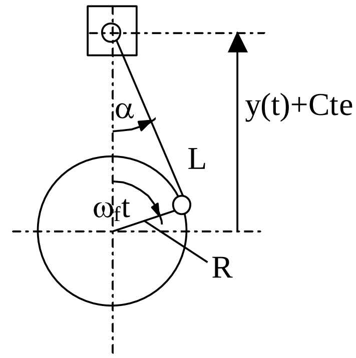
2ª Questão:

a) Chamando de **y(t)** o deslocamento vertical do ponto **B**, medido a partir da configuração de equilíbrio, podemos escrever:

$$y(t) + Cte = R \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + L \cdot \cos(\alpha)$$

mas $sen(\alpha) = R/L \cdot sen(\omega_f \cdot t)$

Portanto:



$$y(t) + Cte = R \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + L \cdot \sqrt{1 - (R/L)^2 \cdot sen^2(\omega_f \cdot t)}$$

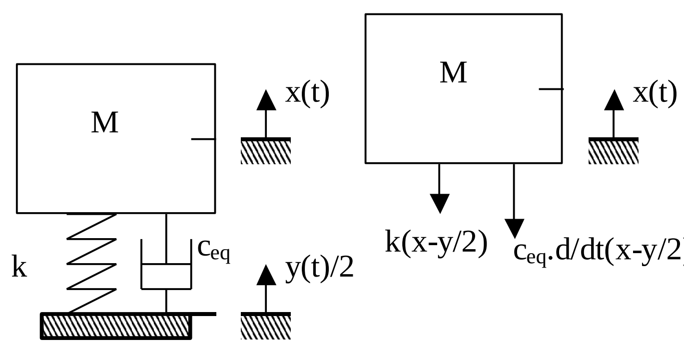
Sendo o segundo termo dentro da raiz << 1, podemos escrever:

$$y(t) + Cte \cong R \cdot \cos(\omega_f \cdot t) + L \cdot \left[1 - (R/L)^2 \cdot 1/2 \cdot sen^2(\omega_f \cdot t)\right]$$

Lembrando que: $\cos(2 \cdot \omega_f \cdot t) = 1 - 2 \cdot sen^2(\omega_f \cdot t)$ vem:

$$y(t) = R \cdot \left[\cos(\omega_f \cdot t) + 1/4 \cdot R/L \cdot \cos(2 \cdot \omega_f \cdot t)\right]$$

b) Sendo **x(t)** o movimento vertical para cima da massa **M**, tomado como zero na posição de equilíbrio (quando **y(t)=0**) e observando que a deformação da viga no centro do vão é **x(t)-y(t)/2**, podemos representar o sistema com parâmetros concentrados conforme a figura ao lado. Isolando a massa e aplicando o TMB, obtemos a seguinte equação diferencial em **x(t)**



$$M \cdot \ddot{x} + c_{eq} \cdot \dot{x} + k \cdot x = c_{eq} \cdot (\dot{y}/2) + k \cdot (y/2)$$

Lembrando que $c_{eq} = \dfrac{b \cdot k}{\omega_i}$, onde ω_i é freqüência de vibração correspondente, e que a rigidez de uma viga de comprimento **a** para uma força aplicada no centro do vão é $k = 48 \cdot \dfrac{E \cdot J}{a^3}$

$$M \cdot \ddot{x} + c_{eq} \cdot \dot{x} + k \cdot x = (k/2) \cdot \sqrt{1 + b^2} \cdot R \cdot \left[\cos(\omega_f \cdot t + \alpha_1) + 1/4 \cdot R/L \cdot \cos(2 \cdot \omega_f \cdot t + \alpha_2)\right]$$

c) A freqüência angular natural do sistema é $\omega = \sqrt{\dfrac{48 \cdot E \cdot J}{M \cdot a^3}}$

d) As amplitudes da vibração em regime permanente para a freqüência fundamental e para a segunda harmônica, ficam:

$$X_{p1} = \frac{(R/2)\cdot\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{\left[1-(\frac{\omega_f}{\omega})^2\right]^2 + b^2}} \qquad X_{p2} = \frac{(R/8)\cdot(R/L)\cdot\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{\left[1-(\frac{2\cdot\omega_f}{\omega})^2\right]^2 + b^2}}$$

e) Portanto, as ressonâncias ocorrem para:

$$\omega_f = \omega = \sqrt{\frac{48\cdot E\cdot J}{M\cdot a^3}} \quad \text{e} \quad \omega_f = \omega/2 = \sqrt{\frac{12\cdot E\cdot J}{M\cdot a^3}}$$

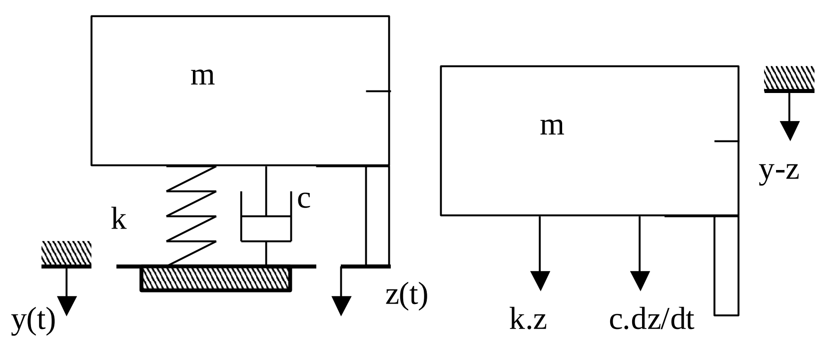
Com as amplitudes

$$X_{p1} = \frac{R\cdot\sqrt{1+b^2}}{2\cdot b} \quad \text{e} \quad X_{p2} = \frac{R^2\cdot\sqrt{1+b^2}}{8\cdot L\cdot b}$$

respectivamente.

3ª Questão:

a) Sendo **z(t)** a distensão da suspensão, medida da posição de equilíbrio antes do veículo atingir a rampa, e **y(t)** o deslocamento absoluto vertical para baixo da roda do veículo, também medido da posição de equilíbrio antes do veículo atingir a rampa, obtemos o modelo físico de parâmetros concentrados representado na figura. Isolando a massa e aplicando o TMB, obtemos:



$$m\cdot(\ddot{y}-\ddot{z}) = c\cdot\dot{z} + k\cdot z$$

ou então

$$m\cdot\ddot{z} + c\cdot\dot{z} + k\cdot z = m\cdot\ddot{y}(t)$$

com

$\dot{y}(t) = 0$ para ($t < 0$) ou ($t > L/v$) e $\dot{y}(t) = v\cdot(h/L)$ para ($0 < t < L/v$)

Em $t = 0$, $m\cdot\ddot{y} \to \infty$ e temos um impulso igual a $m\cdot v\cdot(h/L)$. Da mesma maneira, para $t = L/v$, $m\cdot\ddot{y} \to -\infty$ e temos um impulso igual a $-m\cdot v\cdot(h/L)$. Para quaisquer outros valores de t, $\ddot{y}(t) = 0$.

b) A resposta do sistema $z(t)$ a um impulso em ($t = 0$) é:

$$z(t) = \frac{m\cdot v\cdot(h/L)}{m\cdot\omega_d}\cdot e^{-\zeta\cdot\omega\cdot t} sen(\omega_d\cdot t) \quad \text{para } (0 \le t \le L/v).$$

Após o impulso negativo em ($t = L/v$) obtemos:

$$z(t) = \frac{v \cdot (h/L)}{\omega_d} \cdot \left[e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} sen(\omega_d \cdot t) - e^{-\zeta \cdot \omega \cdot (t - L/v)} sen(\omega_d \cdot (t - L/v))\right] \text{ para } (t \geq L/v)$$

com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_d = \omega \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$ e $\zeta = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$

A força de contato com o solo para $t < 0$ (correspondente a $y = 0$ e $z = 0$), é igual a $m.g$. Portanto, a força dinâmica devida a distensão da suspensão deverá ser menor ou igual a essa força para que o contato com o solo seja mantido. Isto deverá acontecer durante a descida da rampa, portanto:

$c \cdot \dot{z} + k \cdot z \leq m \cdot g$ ou $\zeta \cdot 2 \cdot \sqrt{k \cdot m} \cdot \dot{z} + k \cdot z \leq m \cdot g$ ou ainda:

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot \dot{z} + \omega^2 \cdot z \leq g$$

$$z(t) = \frac{v \cdot (h/L)}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} sen(\omega_d \cdot t)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{v \cdot (h/L)}{\omega \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \left[-\zeta \cdot \omega \cdot e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} sen(\omega_d \cdot t) + \omega_d \cdot e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)\right]$$

Portanto:

$$\frac{v \cdot (h/L)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \omega \cdot e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} \cdot \left\{2 \cdot \zeta \cdot \left[-\zeta \cdot sen(\omega_d \cdot t) + \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)\right] + \left[sen(\omega_d \cdot t)\right]\right\} \leq g$$

Sendo $\zeta = \sqrt{2}/2$, vem:

$$\sqrt{2} \cdot v \cdot (h/L) \cdot \omega \cdot e^{-(\sqrt{2}/2) \cdot \omega \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t) \leq g$$

O máximo da função do lado esquerdo ocorre em $t = 0$; substituindo o valor de **t**, vem:

$\sqrt{2} \cdot v \cdot (h/L) \cdot \omega \leq g$ ou seja: $v \leq \frac{\sqrt{2} \cdot L \cdot g}{2 \cdot h \cdot \omega}$

assegura força posistiva de contato com o solo.