Análise modal com Elementos Finitos

Larissa Driemeier
Rafael Traldi Moura
Marcílio Alves

Algumas questões

- Frequências naturais e modos de vibrar
  - para projeto estrutural
  - para análise forçada
  - resposta estrutural a cargas harmônicas (resposta transiente ignorada)
- Resposta da estrutura ao longo do tempo devido a carregamentos repentinos ou não periódicos (integração da equação do movimento)
  - Se apenas baixos modos de vibração são excitados ou tempo de resposta requerido for longo: usar integração implícita ou superposição modal
  - Se carregamento excita várias frequências e tempo de resposta for curto: usar integração explícita
- Análise espectral: máxima resposta a cargas não periódicas

ESTÁTICO:

- Monta-se a matriz de rigidez
- Monta-se o vetor de carregamento
- Obtém-se o deslocamento $u=k^{-1}f$

DINÂMICO I:

- Monta-se a matriz de rigidez
- Monta-se a matriz de massa
- Obtém-se as freqüências naturais e modos de vibrar

DINÂMICO II:

- Monta-se a matriz de rigidez
- Monta-se a matriz de massa
- Monta-se o vetor carregamento
- Obtém-se o deslocamento, velocidades e acelerações de $mx''+cx'+kx=f$

Algumas estratégias de solução não montam a matriz de rigidez ou de massa

Análise modal

- Objetiva determinar as freqüências naturais de uma estrutura e os modos de vibrar associados

$$\{\mathbf{D}\} = \{\bar{\mathbf{D}}\}\sin\omega t \qquad \{\ddot{\mathbf{D}}\} = -\omega^2\{\bar{\mathbf{D}}\}\sin\omega t$$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Sem amortecimento

$$-[\mathbf{M}]\omega^2\{\mathbf{D}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$-[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{M}]\omega^2\{\mathbf{D}\} + [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \omega^2\{\mathbf{D}\}$$

Problema de auto vetor – auto valor

Procura-se (auto) valores não triviais ω associados ao (auto) vetor {D}

Exemplo

```
>> M=[3 0;0 7]
M =
     3     0
     0     7
>> K=[5 -3;-3 2]
K =
     5    -3
    -3     2
>> [V,W] = eig(K\M)
V =
   -0.9676   -0.5202
    0.2526   -0.8541
W =
    0.5188         0
         0   40.4812
```

```
>> K\M*V1
   -0.5010
    0.1326
>> W*V1
   -0.5010
    0.1326
```

Importância da Análise Modal: método de solução

In the examples above, loading was imposed to the bar via an initial condition. It was not necessary to have in the wave equation the force term, $f(x,t)$. For a forced vibration however, $f(x,t)$ comes into play and we need to solve the partial differential equation

$$\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho A} f(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

To solve it generically, let us assume, as we did before, that the solution is of the type $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) T_n(t)$. Substituting it in the above equation, multiplying by $U_m(x)$ and integrating along the bar length, it follows that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{E}{\rho} T_n(t)\int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 U_n(x)}{\mathrm{d}x^2} U_m(x) + \frac{\mathrm{d}^2 T_n(t)}{\mathrm{d}t^2}\int_0^L U_n(x) U_m(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\rho A}\int_0^L U_n(x) f(x,t)\mathrm{d}x.$$

We will see in Chapter 4 that $\int U_n(x)U_m(x) = 0$ for $n \neq m$ and $\int U_n(x)U_m(x) = 1$ for $n = m$, *ie* the natural modes of vibration form a orthonormal basis, with this orthogonality conditions being also valid for the derivatives of the eigenfunctions. These properties render the above equation as

$$\frac{\mathrm{d}^2 T_n(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_n^2\, T_n(t) = \frac{1}{\rho A}\int_0^L U_n(x) f(x,t)\mathrm{d}x.$$

whose solution is

$$T_n(t) = \frac{1}{\rho A \omega_n}\int_0^L U(x)_n \int_0^t f(x,\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x.$$

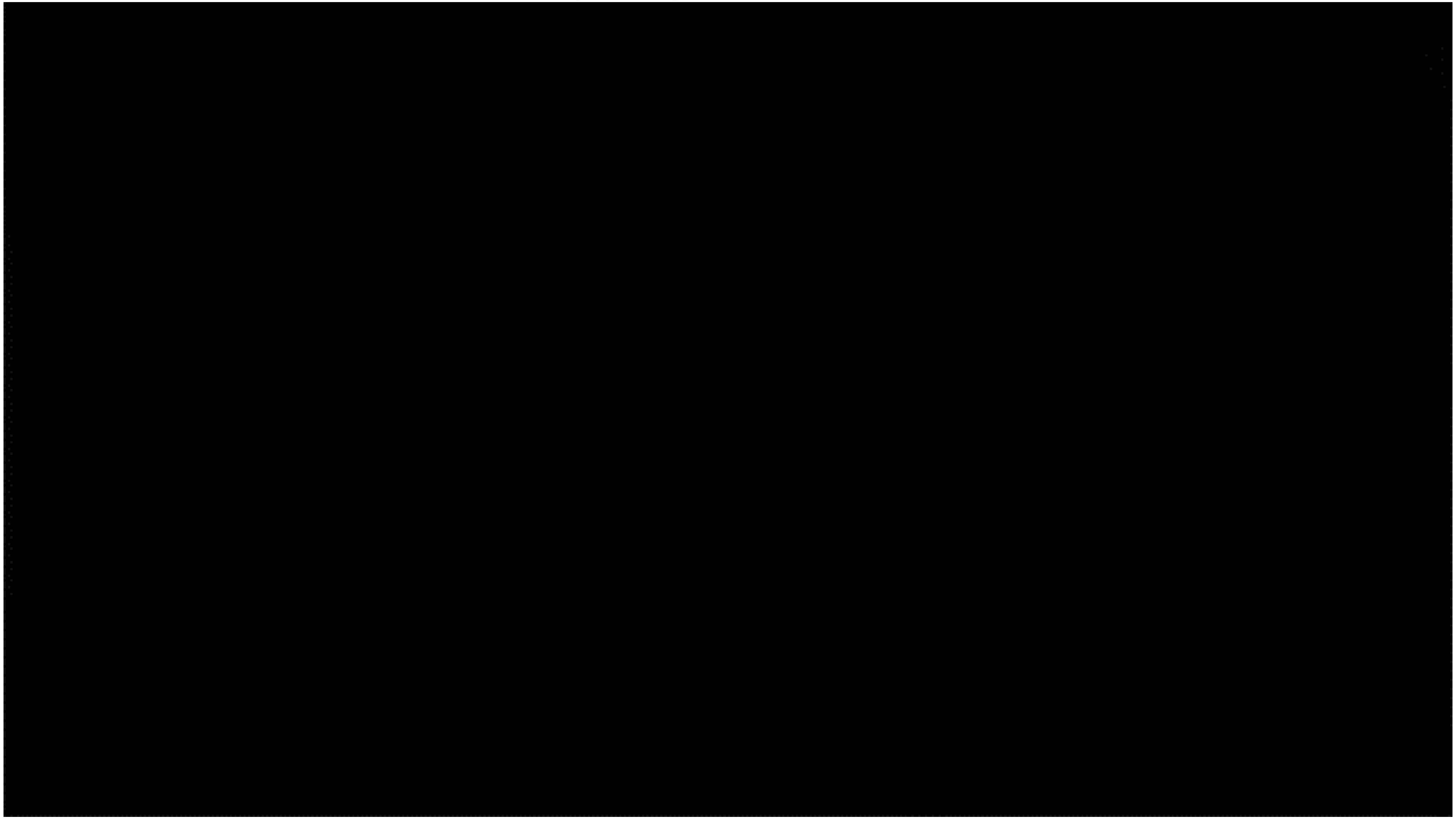
The final sought forced solution becomes then

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n(x)}{\rho A \omega_n}\int_0^L U_n(x)\int_0^t f(x,\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x.$$

Impact Engineering, M Alves

Modes and frequencies

Importância da Análise Modal: aplicações



Trabalho das forças concentradas externas

=

Trabalho absorvido por forças de inércia,

de amortecimento e internas

$$\sum_{i=1}^{n} \{\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}_{i} \{\mathbf{p}\}_i = \int \left(\{\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}} \rho \{\ddot{\mathbf{u}}\} + \{\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}} c \{\dot{\mathbf{u}}\} + \{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{\sigma}\} \right) dV$$

Forças de corpo e de tração
na superfície são desprezadas aqui

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{d}\} \qquad \{\dot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}]\{\dot{\mathbf{d}}\} \qquad \{\ddot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}]\{\ddot{\mathbf{d}}\} \qquad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{d}\}$$

$$\{\delta\mathbf{d}\}^T\left[\int \rho[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]dV\left\{\ddot{\mathbf{d}}\right\} + \int c[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]dV\left\{\dot{\mathbf{d}}\right\} + \int [\mathbf{B}]^T\left\{\boldsymbol{\sigma}\right\}dV - \{\mathbf{p}\}_i\right] = 0$$

nos nós

$$[\mathbf{m}] = \int \rho[\mathbf{N}]^{\mathbf{T}}[\mathbf{N}]dV \qquad [\mathbf{c}] = \int c[\mathbf{N}]^{\mathbf{T}}[\mathbf{N}]dV \qquad \underbrace{\{\mathbf{r}\}_{\text{int}} = \int [\mathbf{B}]^T\left\{\boldsymbol{\sigma}\right\}dV}_{\text{Se material linear}}$$

Pode-se optar por não montar K

$$[\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{c}]\{\dot{\mathbf{d}}\} + \{\mathbf{r}\}_{\text{int}} = \{\mathbf{r}\}_{ext} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{c}]\{\dot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{r}\}_{ext}$$

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}_{ext}$$

Se R_{ext}=0 então a análise é modal.
Se $R_{ext}\neq$0 então a análise é transiente.

Exercício em classe: deduza estas equações

Matriz de massa

Consistente:
Porque é obtida a partir das funções de forma

$$[\mathbf{m}] = \int \rho [\mathbf{N}]^{\mathbf{T}} [\mathbf{N}] dV$$

Não diagonal

***Distribuida nos nós**:*
Ad hoc

$$[\mathbf{m}] = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal (treliça)

Elemento de viga:
Sem inércia de rotação

$$[\mathbf{m}] = \frac{m}{2} \lceil 1/2 \quad \alpha L^2 \quad 1/2 \quad \alpha L^2 \rfloor \rightarrow \alpha = 1/24$$

Com inércia de rotação

$$[\mathbf{m}] = \frac{m}{2} \lceil 1/2 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0 \rfloor$$

Matriz de massa consistente para viga (sem inércia axial)

$$[\mathbf{m}] = \int_0^L \rho A [\mathbf{N}]^{\mathbf{T}} [\mathbf{N}] dx$$

$$[m] = \rho A \int_0^L [1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}] \begin{Bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{Bmatrix} dx$$

$$[m] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

M=ρ A L

Matriz de massa consistente para elemento de barra

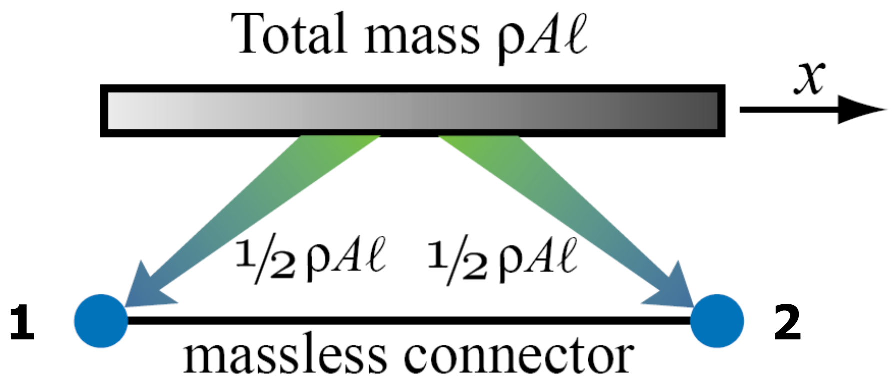
- Quando as integrações são feitas utilizando as funções de forma para elemento de barra a matriz de massa obtida é,

$$\mathbf{m} = \rho A \left(\int_0^L \mathbf{N}^T(\xi)\mathbf{N}(\xi)\,d\xi \right) = \frac{\rho A L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Portanto, a equação de equilíbrio para o elemento de barra é dada por,

$$\frac{\rho A L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} + \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$



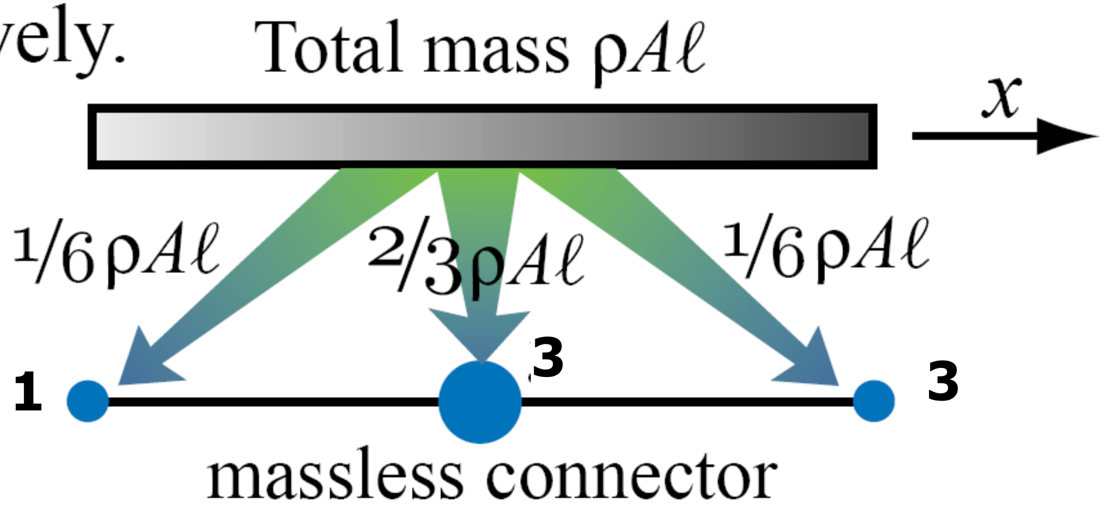
m_1 e m_2 são obtidos "distribuindo" a massa total da barra igualmente nos dois nós.

$$m_1 = \frac{\rho AL}{2}$$

$$m_2 = \frac{\rho AL}{2}$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{m}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ively.



$$\boldsymbol{m}_l = \frac{1}{6}\rho A\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{m}_C = \frac{\rho A\ell}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Matriz de massa para elementos de treliça

- Usando considerações sobre energia, pode-se provar que matrizes de massa se transformam da mesma maneira que matrizes de rigidez.

$$\mathbf{m} = \mathbf{T}^T \mathbf{m}' \mathbf{T}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} C &= \cos\theta \\ S &= \sin\theta \end{aligned} \qquad \mathbf{m}' = \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

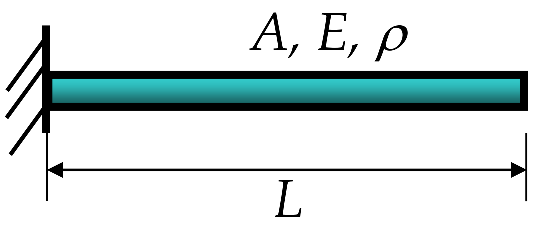
Note que a segunda e quarta linhas da matriz de massa não são nulas porque elementos de treliça têm resistência inercial a forças perpendiculares a seu eixo (em contraste à sua rigidez)

- Equação de equilíbrio dinâmico para treliça

$$\frac{\rho AL}{6}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_i\\ \ddot{v}_i\\ \ddot{u}_j\\ \ddot{v}_j\end{Bmatrix}+\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}C^2 & CS & -C^2 & -CS\\ CS & S^2 & -CS & -S^2\\ -C^2 & -CS & C^2 & CS\\ -CS & -S^2 & CS & S^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_i\\ q_i\\ p_j\\ q_j\end{Bmatrix}$$

Exemplo 1: Análise modal de uma barra

- Considere um barra de seção transversal *A*, comprimento *L*, módulo de Elasticidade E, densidade ρ e com um dos lados fixos.
- Determine a freqüência natural da barra usando matriz de massa consistente e diagonal com
  a) um elemento de barra
  b) dois elementos de barra
- Compare seus cálculos em EF com resultado exato



Item a: Modelo com 1 elemento (MM Consistente)

- Usando um elemento e matriz de massa consistente, a estrutura tem dois nós (um fixo), resultando em um sistema de 1 GL.

$$\frac{\rho AL}{6}\begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \cancel{\ddot{u}_1} \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \cancel{u_1} \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cancel{0} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{u}_2 + \frac{3E}{\rho L^2}u_2 = 0 \qquad \omega_1^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Item a: Modelo com 1 elemento (MM Diagonal)

- Se a matriz de massa diagonal é utilizada,

$$\frac{\rho AL}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\ddot{u}_2+\frac{2E}{\rho L^2}u_2=0 \qquad \bar{\omega}_1^{(1)}=\frac{\sqrt{2}}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Obviamente o uso de matrizes de massa diferentes produzem resultados diferentes.

Comparação com resultado exato

	Exato	1 elemento (consistente)	1 elemento (diagonal)	2 elementos (consistente)	2 elementos (diagonal)
ω_1	$\pi / 2 = 1.571$	1.732	1.414	1.611	1.531
ω_2	$3\pi / 2 = 4.712$	--	--	5.629	3.696

$$\times \frac{1}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Discussão de resultados

- As comparações na tabela demonstram que,

a) Maior número de elementos e GL aproximam melhor a aproximação do resultado exato

b) O uso da matriz de massa consistente produz resultados um pouco melhores para as freqüências fundamentais

c) Aproximações para freqüências maiores são muito piores em todos os casos.

d) Necessita-se de um número substancialmente maior de GL que o número de freqüências e modos de vibrar desejados para ter uma aproximação razoável para todas as freqüências calculadas (tente fazer essa análise com vários GL em um programa comercial de EF).

Métodos híbridos

Combina os métodos consistente e diagonal para aproveitar os benefícios de cada um.

Matriz diagonal HRZ (**H**inton, **R**ock, and **Z**ienkiewicz) (*HRZ Lumping*)

Para elemento de barra:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\rho AL}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m = \rho AL$$

$$s = 4 \times \frac{\rho AL}{6}$$

$$\frac{m}{s} = \frac{3}{2}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{\rho AL}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

HRZ – Elemento de viga

$$\boldsymbol{m} = \frac{m}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$m = \rho A L$$

$$s = 312 \times \frac{\rho A L}{420}$$

$$\frac{m}{s} = \frac{420}{312}$$

>use matriz consistente
>massa total do elemento é preservada
>use somente termos da diagonal
>s=some só termos de translação m_ii
>multiplique todos os coeficientes da diagonal por m/s

$$\mathbf{m} = \frac{m}{420}\begin{bmatrix} \frac{420}{312}\times 156 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{420}{312}\times 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{420}{312}\times 156 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{420}{312}\times 4L^2 \end{bmatrix} = \frac{m}{78}\begin{bmatrix} 39 & & & \\ & L^2 & & \\ & & 39 & \\ & & & L^2 \end{bmatrix}$$

Usar esta

TABLE 11.3-2. PERCENTAGE ERRORS OF COMPUTED NATURAL FREQUENCIES FOR LATERAL VIBRATION OF A SIMPLY SUPPORTED THICK SQUARE PLATE, USING DIFFERENT MASS MATRICES [11.8]. REDUCED INTEGRATION WAS USED TO OBTAIN ELEMENT STIFFNESS MATRICES.

Mode		Type of mass matrix used		
l_w	n_w	Ad hoc lumping (%)	HRZ lumping (%)	Consistent [**m**] (%)
1	1	+0.32	+0.32	−0.11
2	1	−0.45	+0.45	−0.40
2	2	−4.12	−2.75	−0.35
3	1	−5.75	+0.05	+5.18
3	2	−10.15	−2.96	+4.68
3	3	−19.42	−5.18	+13.78
4	2	+31.70	+1.53	+16.88

Matrizes de massa

- Produto ***ma*** deve resultar no valor correto das forças totais aplicadas no elemento (F = ma) quando ***a*** representa a aceleração translacional de corpo rígido.

- Matrizes de massa consistentes ***m*** e ***M*** são positivas definidas.

- Matriz diagonal de massa é positiva semi-definida quando zeros aparecem na diagonal principal.

- Matriz de massa diagonal é indefinida quando números negativos aparecem na diagonal principal.

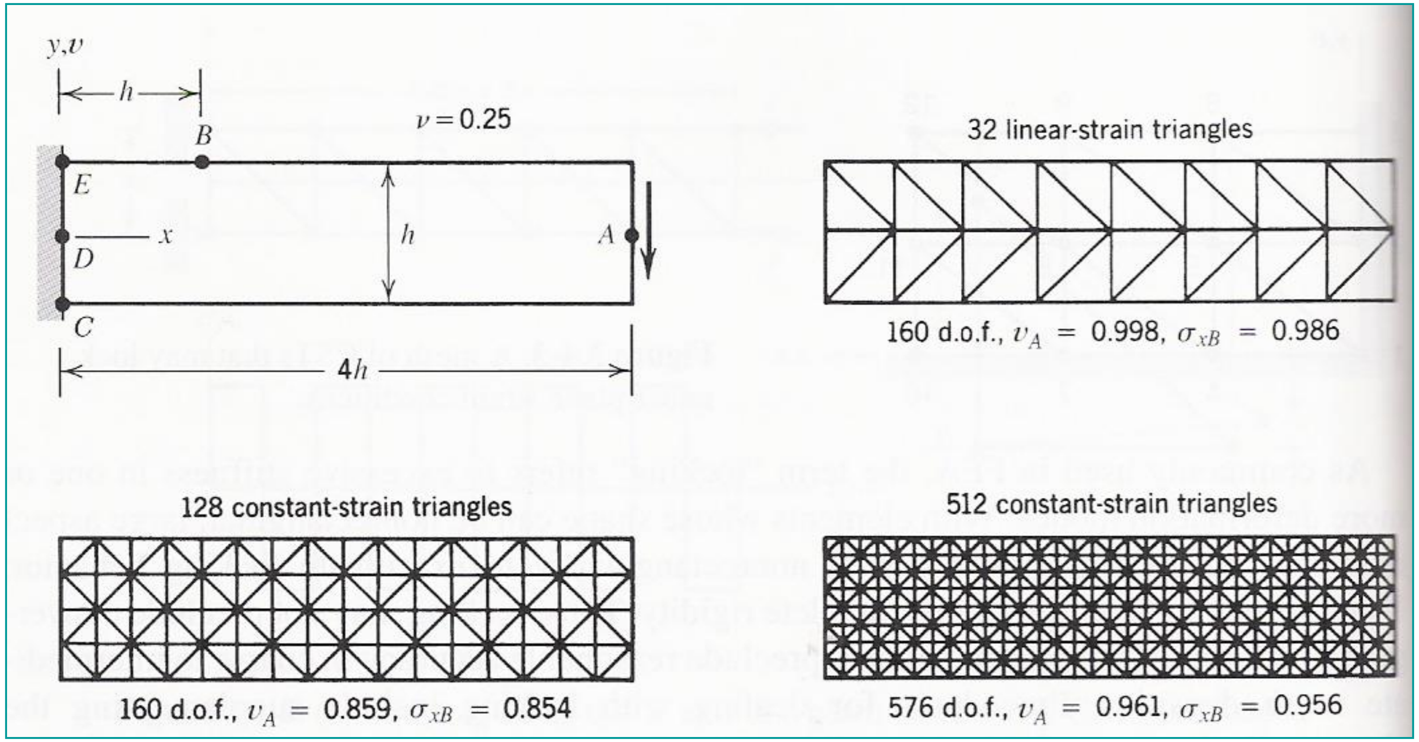
- Ambos os casos anteriores necessitam de tratamento especial…

- Matrizes consistentes são mais precisas para problemas com flexão.
- Matrizes consistentes dão limites superiores para freqüências naturais.

- Matrizes diagonais usualmente dão freqüências naturais menores que os valores exatos.
- Matrizes diagonais têm forma mais simples e ocupam menos espaço para armazenamento.
- Matrizes diagonais requerem menos esforço computacional.
- Usualmente mais importantes em problemas de variáveis dependentes do tempo que em problemas de vibração.

Aspectos computacionais

- Matriz de massa global é montada da mesma forma que a matriz de rigidez
- O problema de auto-valores é resolvido por procedimento dedicado
  - No Matlab use eig ou eigs
  - [modes,omegasquare]= eig(m_global\k_global)
- Use também tranformação de coordenadas, m_e=T'*m_e*T
- Tenha em mente a eficiência do elemento para o caso estático



Programa para análise modal de vigas

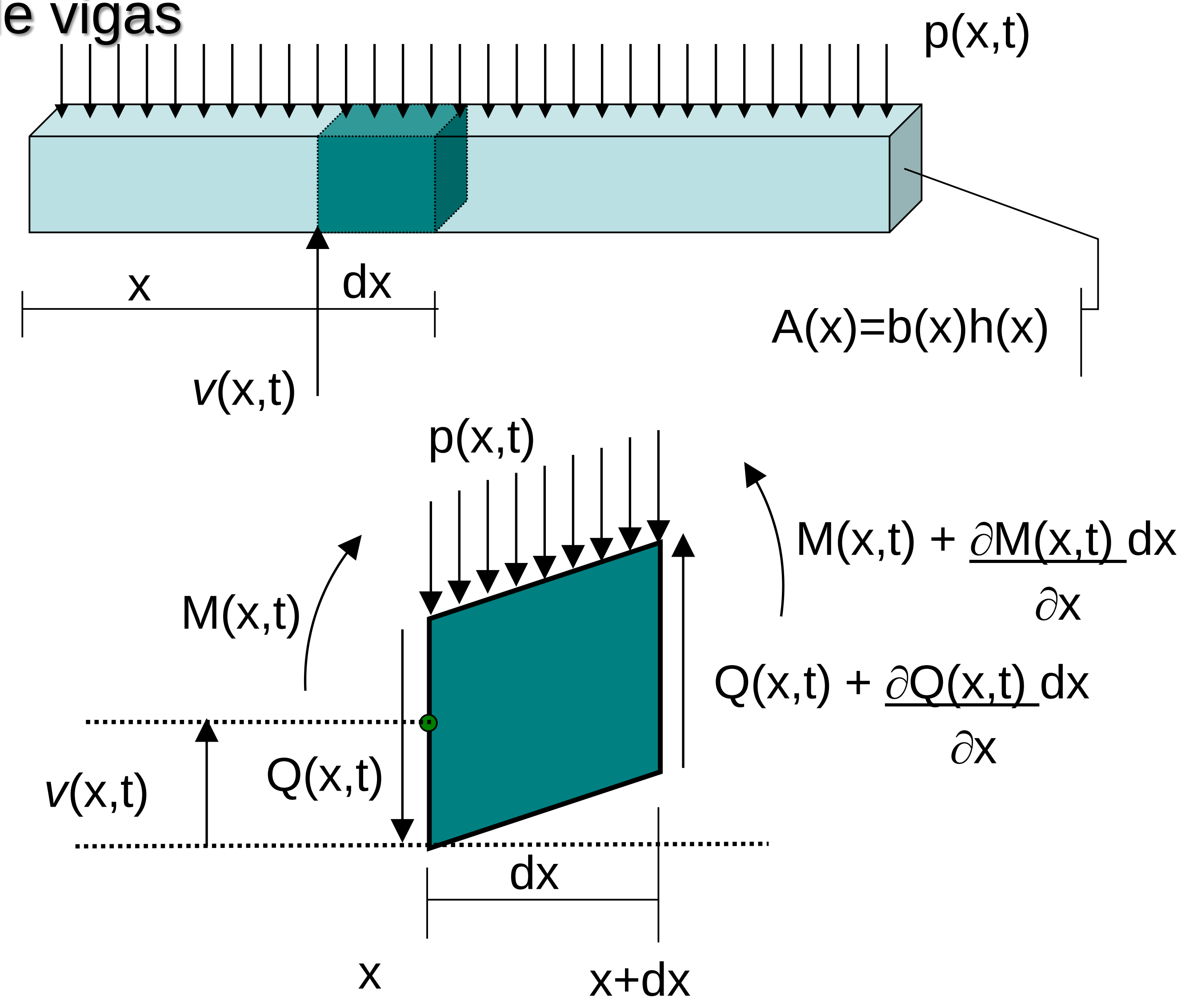
```
function beam
%% A FE programme for static, dynamic and modal analysis of
beams
% Marcílio / Trodenheim and Sao Paulo, Feb-April 2008
set(0,'DefaultFigureWindowStyle','docked');
close all;clc;clear all;format short;
%% Global variables
global analysis nel nno h b In L Em rho m dofg
global gc cm bc nrn k_global m_global f v
global fa bca freq modes mode modef f_dyn beta alpha t_max ni
nd
%% Basic data input and loads
input
%% Mesh and bc
mesh
%% Main loop for global and stiffness matrixes
global_MK
%% Assembling load/bc vector
assembly_load_bc
%% Results
if analysis==1
   displacement
elseif analysis==2
   eig_problem
elseif analysis==3
   dynamic_imp
elseif analysis==4
   dynamic_exp
end
%% Plotting
plotting
```

Escreva um programa de elementos finitos (use elementos de viga ou plano) para análise modal de vigas

Compare os resultados de seu programa com os dados experimentais e com resultados teóricos

Obs. As equações teóricas podem ser obtidas diretamente da literatura mas a dedução das mesmas valoriza o trabalho

Análise modal de vigas



$$\frac{\partial Q}{\partial x} = p(x,t) - m\ddot{v}(x,t) - c\dot{v}(x,t)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q$$

$$M = EIv''$$

$$m\ddot{v}(x,t) + c\dot{v}(x,t) + EIv^{iv}(x,t) = p(x,t)$$

amortecimento=0

p(x,t) = 0:

$$\ddot{v}(x,t) + c^2 v^{iv}(x,t) = 0$$

$$c = \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Análise modal (vibração livre)

$$v(x,t)=\phi(x)T(t)$$

separação
de variáveis

$$c^2\frac{\phi''''(x)}{\phi(x)}=-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}=\omega^2$$

constante

$$\ddot{T}(t)+\omega^2T(t)=0$$

$$T(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$$

A,B: determinados a partir das condições iniciais

Movimento é oscilatório no tempo e tem freqüência ω

$$\phi''''(x)-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\phi(x)=0$$

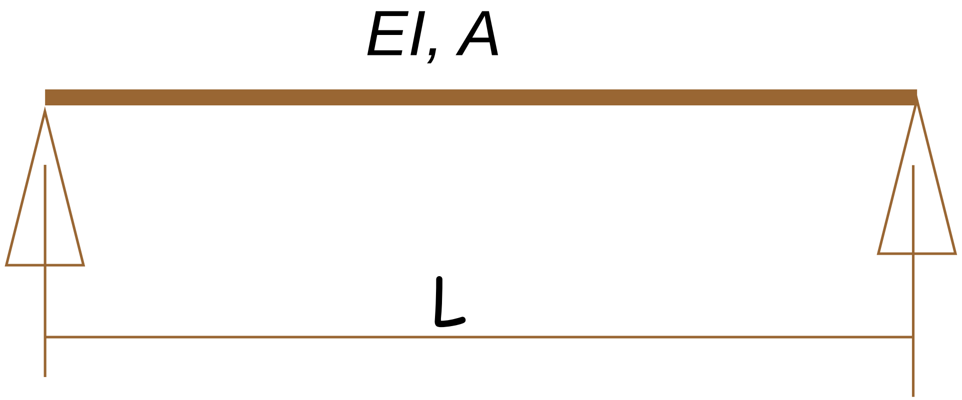
$$\phi(x)=C_1\sin(\beta x)+C_2\cos(\beta x)+$$
$$+C_3\sinh(\beta x)+C_4\cosh(\beta x)$$

C_i: determinados a partir das condições de contorno

$$\beta=(\omega/c)^{1/2}=\sqrt{\omega/c}$$

ou $\omega=\beta^2c=\beta^2\sqrt{EI/m}$

Exemplo



Viga bi-apoiada...

Viga biapoiada:

i. $v(x=0)=0$, flecha nula no apoio à esquerda.

ii. $v(x=L)=0$, flecha nula no apoio à direita.

iii. $M(x=0)=EIv''(x=0)=0$, momento nulo no apoio à esquerda.

iv. $M(x=L)=EIv''(x=L)=0$, momento nulo no apoio à direita.

Aplicando as condições de contorno:

1{ $$v(0,t)=0,\forall t \Rightarrow T(t)\phi(0)=0,\forall t \Rightarrow \phi(0)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1\sin(0)+C_2\cos(0)+C_3\sinh(0)+C_4\cosh(0)=0$$

2{ $$v(L,t)=0,\forall t \Rightarrow T(t)\phi(L)=0,\forall t \Rightarrow \phi(L)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1\sin(\lambda)+C_2\cos(\lambda)+C_3\sinh(\lambda)+C_4\cosh(\lambda)=0$$

$$\lambda=\beta L$$

3{ $$EIv''(0,t)=0,\forall t \Rightarrow T(t)\phi''(0)=0,\forall t \Rightarrow \phi''(0)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^2\left(-C_1\sin(0)-C_2\cos(0)+C_3\sinh(0)+C_4\cosh(0)\right)=0$$

4{ $$EIv''(L,t)=0,\forall t \Rightarrow T(t)\phi''(L)=0,\forall t \Rightarrow \phi''(L)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^2\left(-C_1\sin(\lambda)-C_2\cos(\lambda)+C_3\sinh(\lambda)+C_4\cosh(\lambda)\right)=0$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & \sinh\lambda & \cosh\lambda \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\sin\lambda & -\cos\lambda & \sinh\lambda & \cosh\lambda \end{bmatrix}}_{=A(\lambda)} . \underbrace{\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}}_{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

$$\boxed{\underset{4x4}{A(\lambda)} . \underset{4x1}{X} = \underset{4x1}{0}}$$

$$\det A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda & \operatorname{senh}\lambda & \cosh\lambda \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\operatorname{sen}\lambda & -\cos\lambda & \operatorname{senh}\lambda & \cosh\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\lambda \sinh\lambda = 0}$$

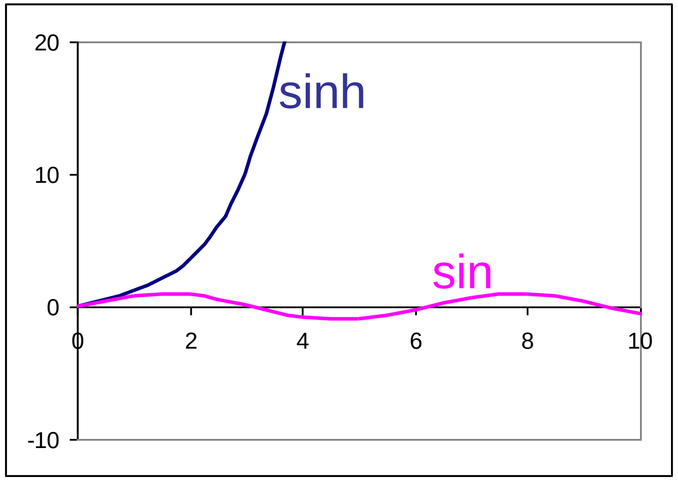
$$\sin\lambda\sinh\lambda = 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} \sin\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_i = i\pi & i = 0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots\ldots \pm\infty \\ \sinh\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 & i = 1 \end{array}$$

$$\lambda = \beta L$$

$$\omega = \beta^2 c \longrightarrow \omega = \beta^2 c = (\lambda / L)^2 c$$

em [rad/s] : $\omega_i = \left(\dfrac{i\pi}{L}\right)^2 c$

em [Hz] : $f_i = \omega_i / (2\pi) = \left(\dfrac{i}{2L}\right)^2 c$



Com λ, calcula-se $C_1,...C_4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & \sinh\lambda & \cosh\lambda \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\sin\lambda & -\cos\lambda & \sinh\lambda & \cosh\lambda \end{bmatrix}}_{=\mathrm{A}(\lambda)} . \underbrace{\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}}_{\mathrm{X}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

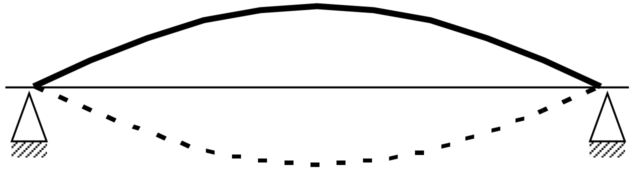
$$\boxed{\underset{4x4}{\mathrm{A}(\lambda)} . \underset{4x1}{\mathrm{X}} = \underset{4x1}{0}}$$

O sistema de equações acima é indeterminado.
É necessário arbitrar um valor, eg c_1=1.

$$\left.\begin{matrix} C_2 + C_4 = 0 \\ C_2 - C_4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_2 = C_4 = 0 \Rightarrow \phi_i(x) = C_{1i}\sin(\lambda_i x / L) + C_{3i}\sinh(\lambda_i x / L)$$

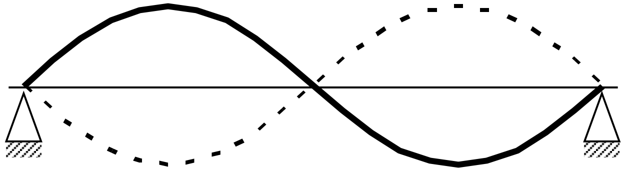
$$\left.\begin{matrix} C_1 \sin\lambda + C_3 \sinh\lambda = 0 \\ C_1 \sin\lambda - C_3 \sinh\lambda = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_3 = 0 \qquad C_1 \neq 0 \qquad i = 1,2,3,4,5,...,\infty$$

$$\boxed{\phi_i(x) = \sin(\lambda_i x / L) = \sin(i\pi x / L)}$$



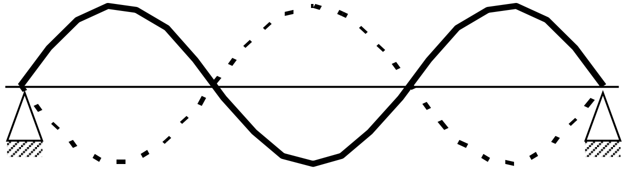
$$\phi_1(x) = \sin(\pi\, x/L)$$

$$T_1 = (2/\pi)\sqrt{mL^4/EI} \quad \text{[seg]}$$



$$\phi_2(x) = \sin(2\,\pi\, x/L)$$

$$T_2 = T_1/4$$

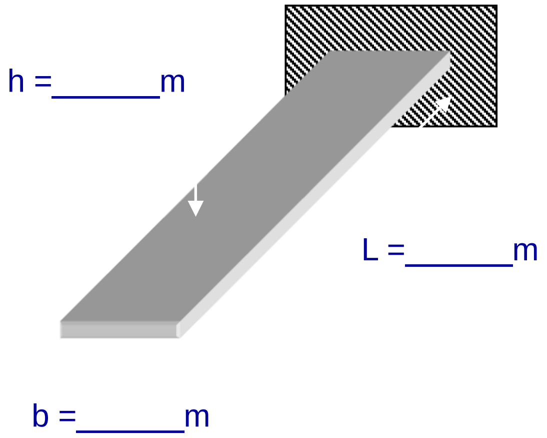


$$\phi_3(x) = \sin(3\,\pi\, x/L)$$

$$T_3 = T_1/9$$

Procedimento experimental: viga em balanço

Tabela de Comparação de Resultados			
MODO	Freqüências Naturais em *Hz*		Desvio %
	Teórico (F_t)	Experimental (F_e)	$100*(F_t-F_e)/F_e$
1			
2			
3			



AÇO: E = 210Gpa = 210E9 *N/m*^{2}

ρ = 7500 Kg/m^3

Área da secção,	A= b*h	= __________	*m*^{2}
Massa distribuída,	m= ρ*A	= __________	*Kg/m*
Momento de inércia,	I = b*h^3/12	= __________	*m*^{4}
Rigidez à flexão,	EI	= __________	*N.m*^{2}

Solução teórica: viga em balanço

$$\frac{\phi(x)}{C_2} = \cos\beta x - \cosh\beta x + \frac{\cos\beta L + \cosh\beta L}{\sin\beta L + \sinh\beta L}\left(\sinh\beta x - \sin\beta x\right)$$

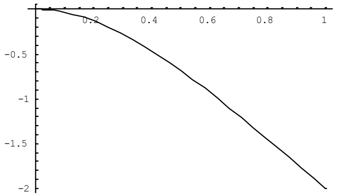
Raízes:

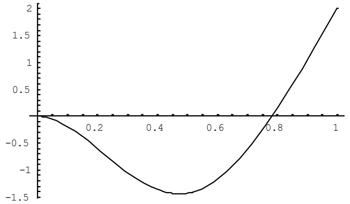
$\beta L=1.8751$

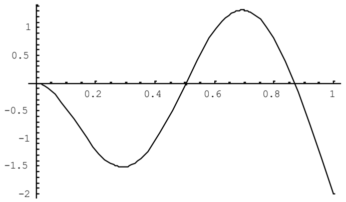
$\beta L=4.694$

$\beta L=7.854$

$\beta L=10.9955$ ...







$1+\cos(\beta L)\cosh(\beta L)$