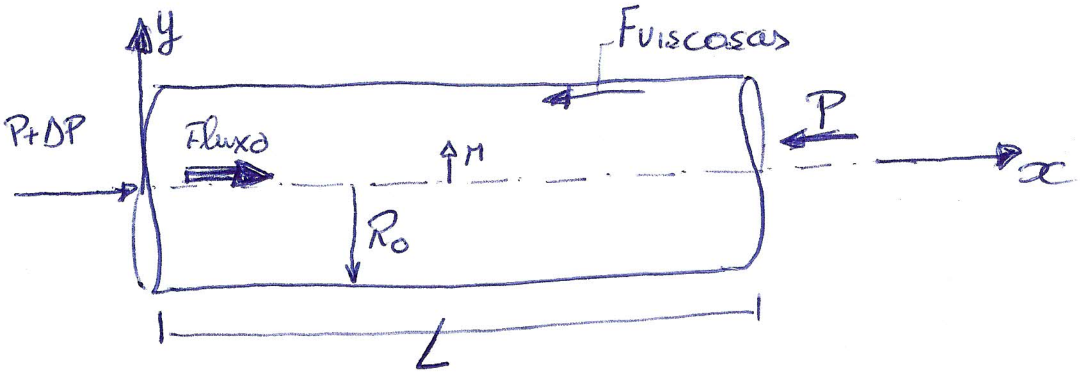
Perda de Carga no Escoamento Laminar - Hagen-Poiseuille

Hipóteses
- Regime Permanente
- Escoamento Plenamente desenvolvido (Perfil de velocidade não varia)
- Fluido Newtoniano $\left(\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}\right)$

Tomemos um duto circular e façamos um balanço de forças:



Balanço de forças na direção x:

Forças de Pressão = Forças Viscosas

$$\text{Força Viscosa} = \tau \cdot \text{área} = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \cdot 2\pi \cdot r \cdot L$$

$$\text{Força de pressão} = \Delta P \cdot \pi r^2$$

$$\therefore \Delta P \pi r^2 = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \cdot 2\pi r L \qquad \text{I}$$

Como $v = v(r)$ apenas (regime permanente; plenamente desenvolvido) $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{dv}{dr}$

e a equação I ficaria:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\Delta P}{L} \cdot \frac{\pi r^2}{2\mu r} = \frac{\Delta P \cdot r}{2\mu L}$$

que, integrando:

$$\int_0^v dv = \frac{\Delta P}{2\mu L}\int_r^0 r\,dr \Rightarrow v(r) = -\frac{\Delta P}{4\mu L} r^2 + C_1$$

Como $v = 0$ p/ $r = R_o \Rightarrow C_1 = \frac{\Delta P}{4\mu L} R_o^2$ e $\therefore$

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4\mu L} r^2 + \frac{\Delta P . R_o^2}{4\mu L} \Rightarrow \underbrace{v(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L}\left(R_o^2 - r^2\right)}_{\text{Perfil Parabólico}}$$

A Vazão Volumétrica $Q = \int v\,dA$, neste caso:

$$Q = \int_0^{R_o} \frac{\Delta P}{4\mu L}\left[R_o^2 - r^2\right] 2\pi r\,dr = \frac{\pi . \Delta P}{2\mu L}\int_0^{R_o}\left(R_o^2 r - r^3\right) dr =$$

$$= \frac{\pi \Delta P}{2\mu L}\left[\frac{R_o^4}{2} - \frac{R_o^4}{4}\right) = \frac{\pi . \Delta P . R^4}{8\mu L} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\pi . D^4 . \Delta P}{128\mu . L}}$$ eq. de Poiseuille

p/ duto circular, $Q = V.A = \frac{V.\pi D^2}{4} = \frac{\pi . D^4 \Delta P}{128\mu L}$

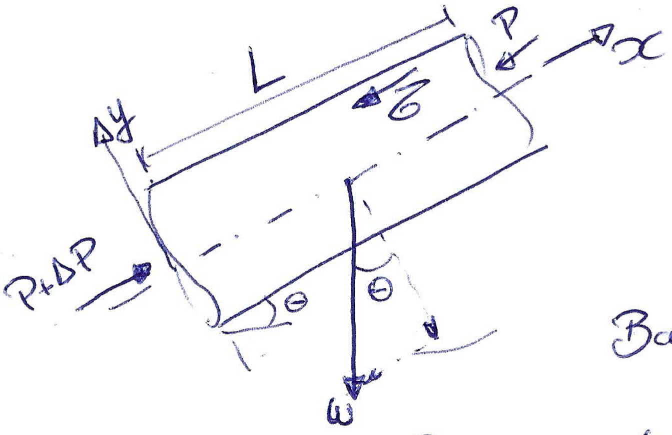
$$\Rightarrow \Delta P = 32\frac{\mu V L}{D^2}$$ eq. perda de carga p/ duto cilíndrico horizontal, escoamento laminar em Regime permanente

Obs. Se usar duto c/ trecho L, com a eq. de Darcy-Weisbach (em seguida) $h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$ e como $h_f = \frac{\Delta P}{\gamma} \Rightarrow$

$$h_f = \frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{32\mu V L}{\gamma D^2} = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow f = \frac{64}{Re}.$$

dutos inclinados $\Rightarrow$

P/ estudar dutos inclinados, ou verticais, o que muda é o balanço de forças, devido ao aparecimento da componente da força peso na direção do escoamento:



Balanço de forças na direção x:

Forças de Pressão = forças viscosas + Componente$_x$ força peso.

$$\Delta P \pi r^2 = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \cdot 2\pi \cdot r L + \gamma \pi r^2 L \operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore \frac{\Delta P - \gamma L \operatorname{sen}\theta}{L} = \mu \frac{dv}{dr} \cdot \frac{2}{r}$$, que, integrado como feito p/ a equação (I) na pg anterior, resulta:

$$V = \frac{(\Delta P - \gamma L \operatorname{sen}\theta) D^2}{32 \mu L}$$

$$Q = \frac{\pi (\Delta P - \gamma L \operatorname{sen}\theta) D^4}{128 \mu L}$$

$$\Delta P = \frac{32 \mu V L}{D^2} + \gamma L \operatorname{sen}\theta$$

(Perceba que onde havia ΔP nas eq. de dutos horizontais, agora há $(\Delta P - \gamma L \operatorname{sen}\theta)$ p/ dutos inclinados. Na Vertical $\operatorname{sen}\theta = 1$)