

Estática dos Fluidos



PMC 3222 - 2020

Prof. Marcos Tadeu Pereira

Estática dos fluidos

Objeto: estudo dos fluidos em repouso

Objetivo: Análise das pressões e sua variação e distribuição no interior do fluido e em contato com superfícies.

Aplicações:

- Medição de pressão em tubulações
- Estudo de cargas provocadas por fluidos em superfícies
- Máquinas.

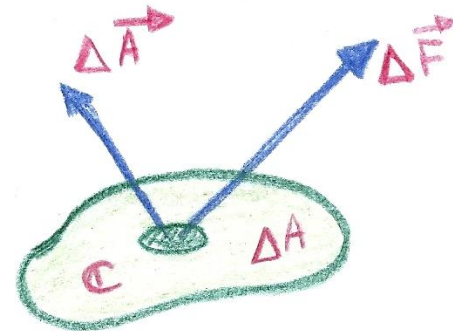
Conceituação de forças e tensões

Força de contato: arrasto, pressão

Força de campo: gravitacional, eletromagnética

Tensão

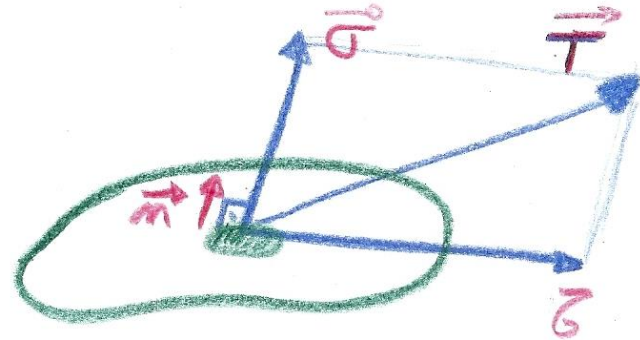
$$\text{Tensão no ponto } C = \lim_{\Delta \vec{A} \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{d\vec{A}}$$



Não sabemos resolver a divisão de um vetor por outro neste momento, e escolhemos então uma normal \vec{n} à superfície do corpo em C, definindo então uma grandeza **vetorial**:

$$\vec{\tau}(C, \vec{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dA} = \left. \frac{d\vec{F}}{dA} \right|_{\vec{n}}$$

$$T(C, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$



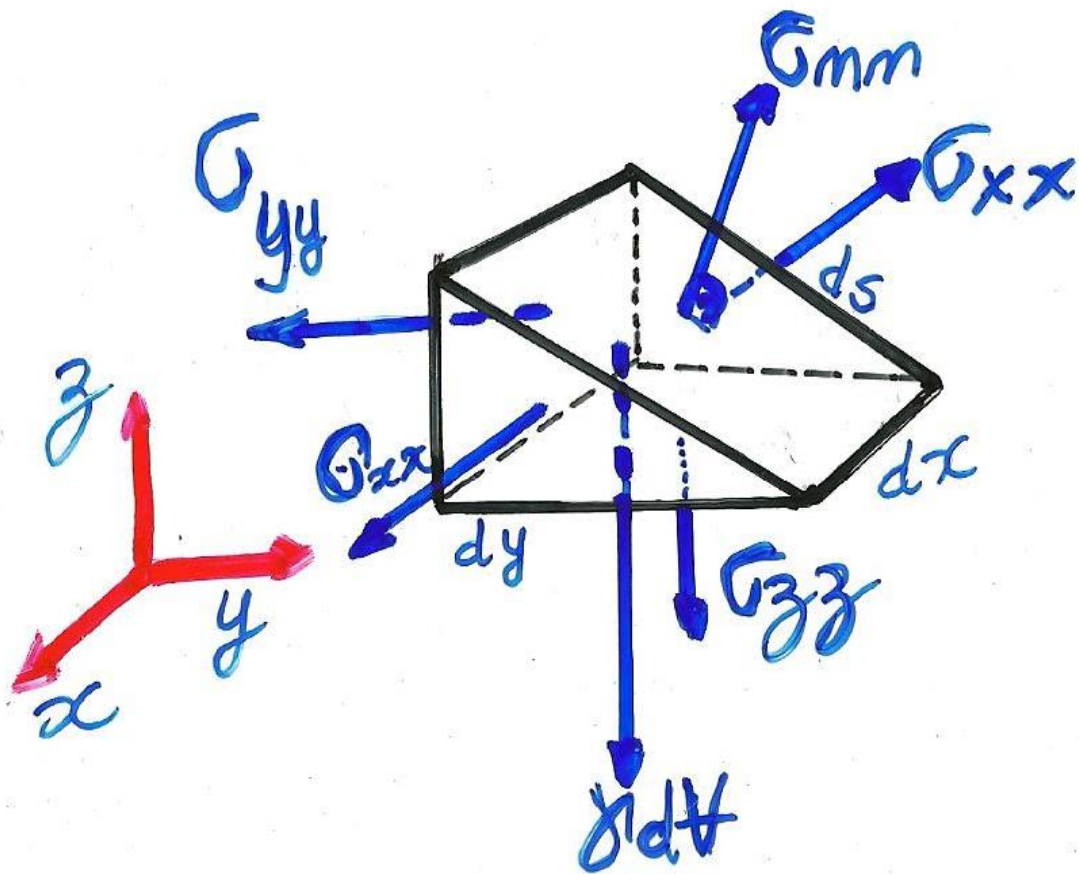
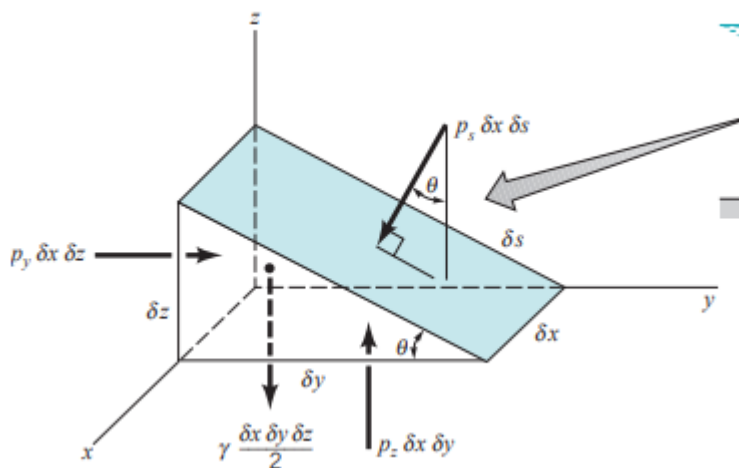
$\vec{\sigma}$ = tensão normal (tração ou compressão)

$\vec{\tau}$ = tensão de cisalhamento ou tangencial

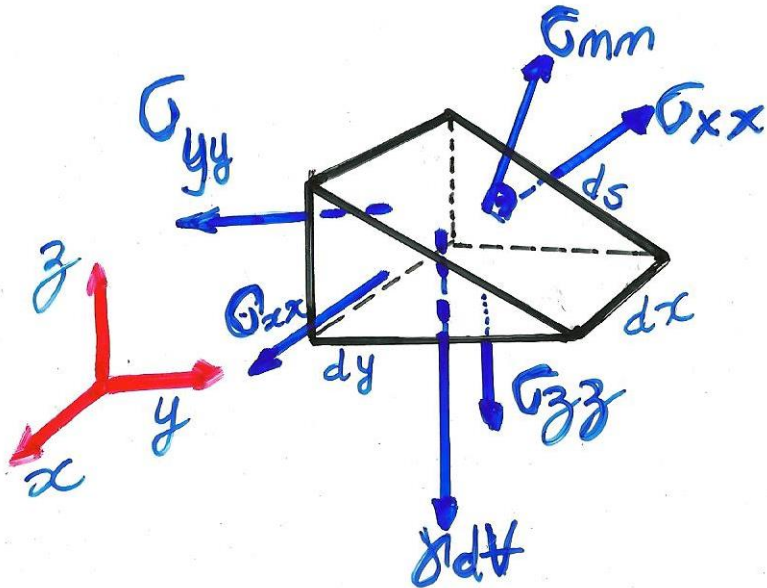
Unidade: $N/m^2 = \text{Pa}$ (Pascal)

Quanto às tensões normais, geralmente fluidos só estão submetidos a tensões de compressão

Tensão em um ponto em um fluido em repouso (não há tensões de cisalhamento):



Tensão em um ponto em um fluido em repouso (não há tensões de cisalhamento):



2a Lei de Newton em z:

$$dF_z = dm \cdot a_z$$

$$-\sigma_{zz} dx dy + \sigma_{nn} ds dx \sin\theta - \rho g dV = \rho dV a_z$$

e, como $dV = \frac{dx dy dz}{2}$ e $\sin\theta = \frac{dy}{ds}$, resulta

$$-\sigma_{zz} dx dy + \sigma_{nn} ds dx dy / ds - \rho g dx dy dz / 2 = \rho \frac{dx dy dz}{2} a_z$$

e, como $a_z = 0$ e $\div dx dy \rightarrow$

$$-\sigma_{zz} + \sigma_{nn} - \rho g dz / 2 = 0 \rightarrow \text{como } dz \sim 0 \rightarrow \sigma_{zz} = \sigma_{nn}$$

Pode-se mostrar igualmente que na direção y :

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy}$$

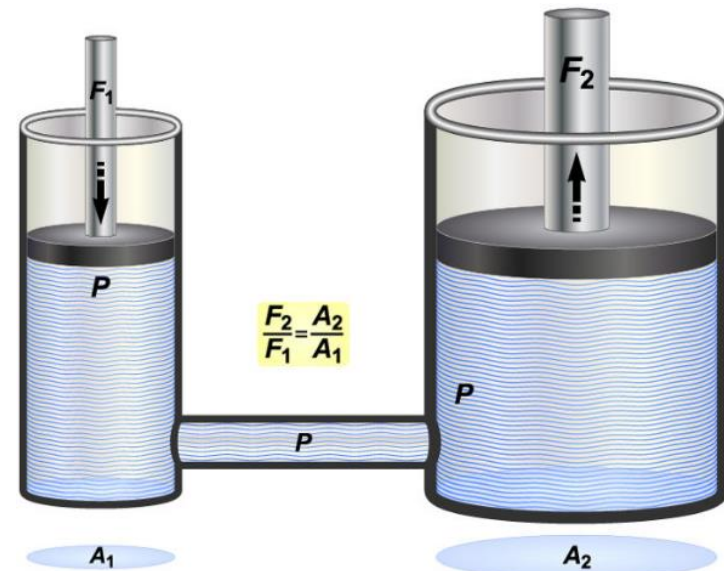
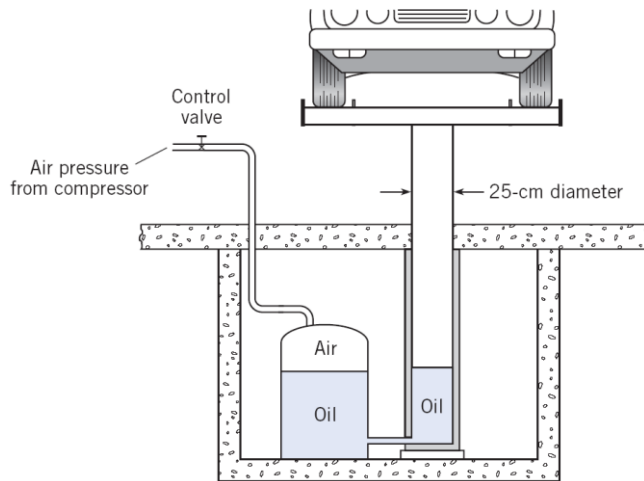
Conclusão: como o formato do elemento é arbitrário, em um fluido em repouso a tensão normal em um ponto é a mesma em todas as direções e é portanto uma **grandeza escalar**.

Denominada **Pressão**.

Como o matemático da anedota, acabamos de provar que pressão existe.

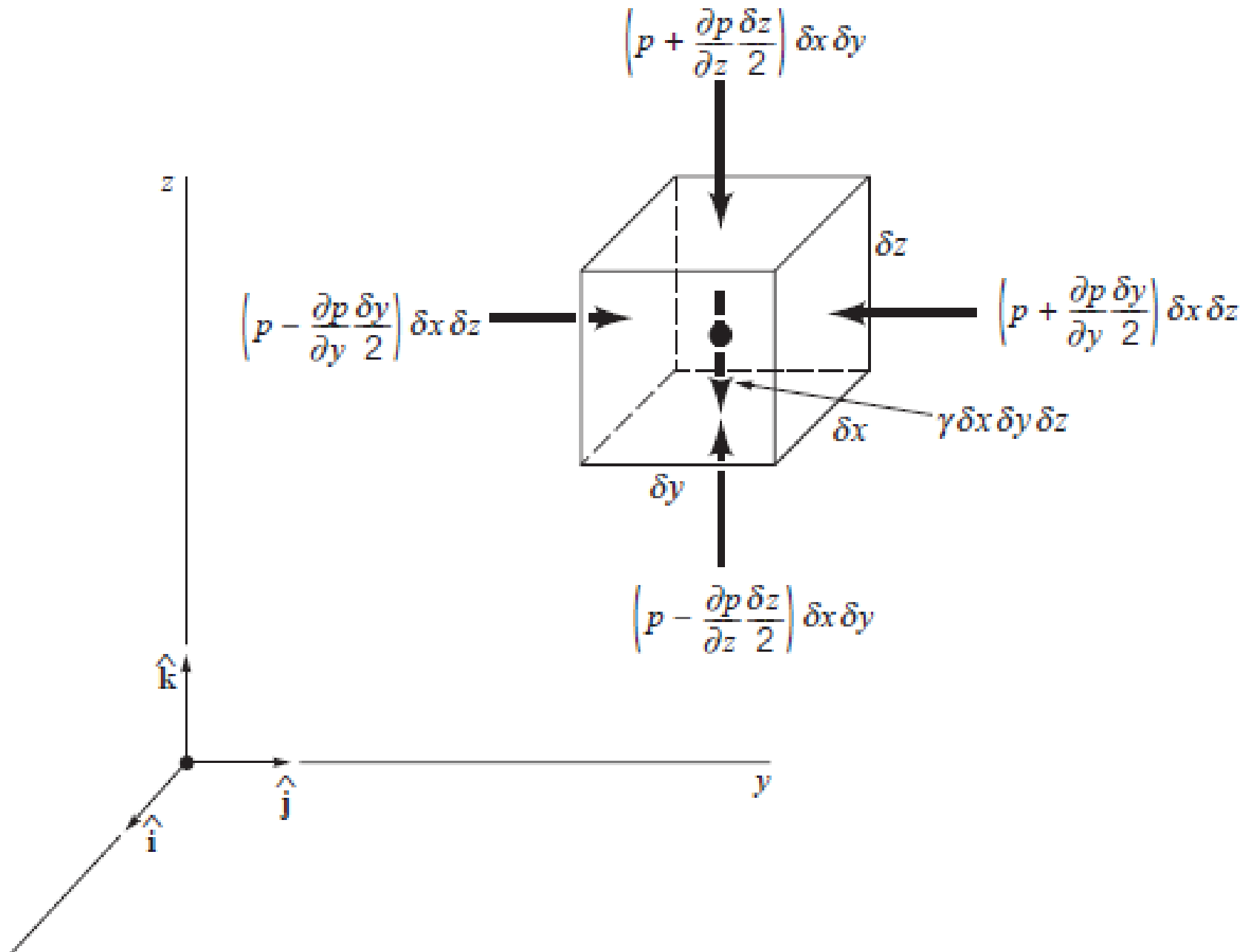
Lei de Pascal

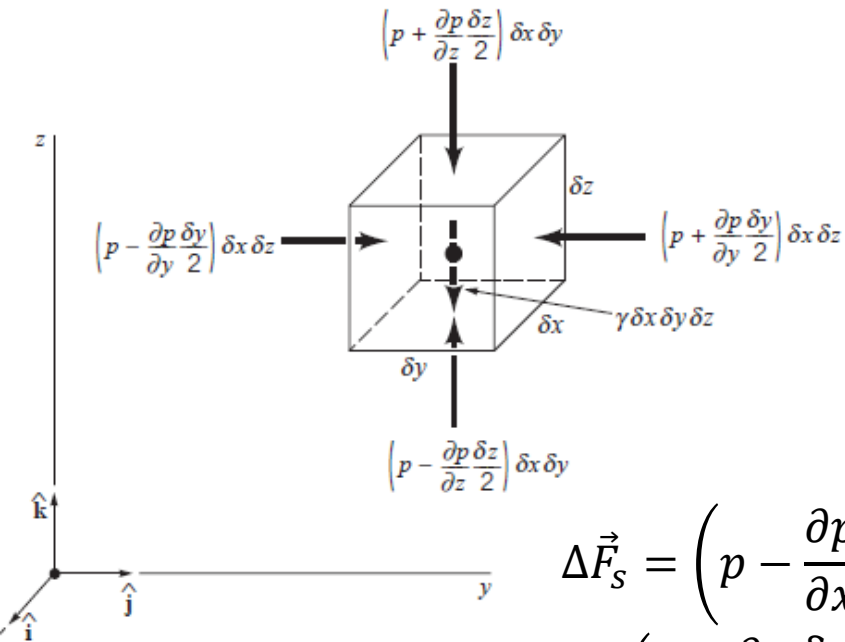
Em um sistema fechado, mudanças de pressão em um ponto são transmitidas a todo o sistema.



Se $F_1 = 50N$ e a área do pistão $A_2 = 20A_1$, então $F_2 = 1000N$

Equação fundamental da estática





Equação fundamental da estática

Força de campo $\Delta \vec{F}_C = \gamma \delta_x \delta_y \delta_z (-\vec{k})$

Forças de superfície: $\Delta \vec{F}_S$

$$\Delta \vec{F}_S = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_x}{2} \right) \delta_y \delta_z \vec{i} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_x}{2} \right) \delta_y \delta_z (-\vec{i}) +$$

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta_y}{2} \right) \delta_x \delta_z \vec{j} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta_y}{2} \right) \delta_x \delta_z (-\vec{j}) +$$

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\delta_z}{2} \right) \delta_x \delta_y \vec{k} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\delta_z}{2} \right) \delta_x \delta_y (-\vec{k})$$

$$\therefore \Delta \vec{F}_S = - \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right)}_{\text{Grad } p} \delta_x \delta_y \delta_z, \text{ e levando ao limite } p / \Delta V = \delta_x \delta_y \delta_z \rightarrow 0$$

$$\frac{dF_S}{dV} = -\nabla p$$

Lei de Stevin

Tomando-se a 2ª lei de Newton:

$$\sum \Delta \vec{F}_{ext} = dm \cdot \vec{a} = \rho \vec{a} \Delta V, \text{ com } \vec{a} = 0 \rightarrow$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \Delta \vec{F}_c + \Delta \vec{F}_s = 0 \quad \text{ou:}$$

$$\gamma \delta_x \delta_y \delta_z (-\vec{k}) - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) \delta_x \delta_y \delta_z = 0 \quad \text{ou ainda:}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{PLANO HORIZONTAL}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$$

Lei de Stevin

Como p é independente de x e y \longrightarrow

$$p(x, y, z) = p(z) \text{ e, } \therefore, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$$

Integrando a equação $\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$ com a hipótese de fluido incompressível, homogêneo, com $g = \text{constante}$ e com $p = p_0$ para $z = z_0$ resulta:

$$p - p_0 = \gamma(z - z_0)$$

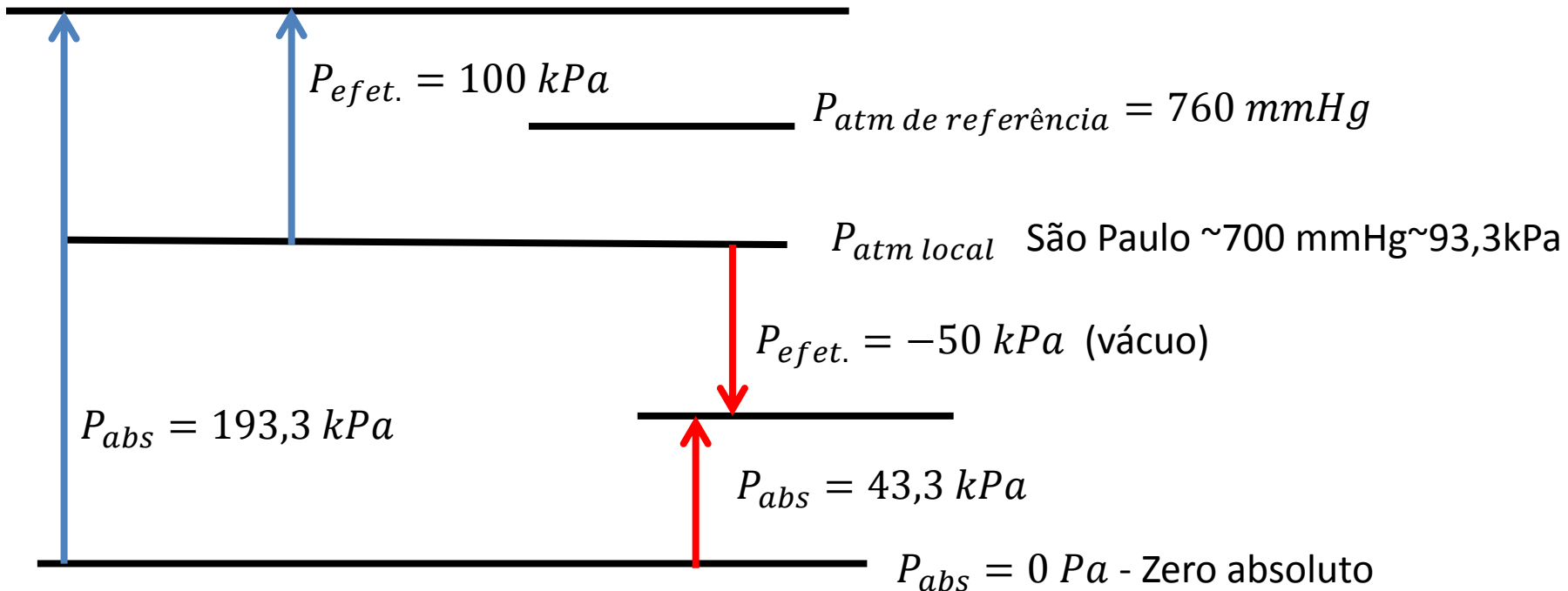
Para líquidos, se fizermos uma mudança de variáveis com $h = -(z - z_0)$, resulta

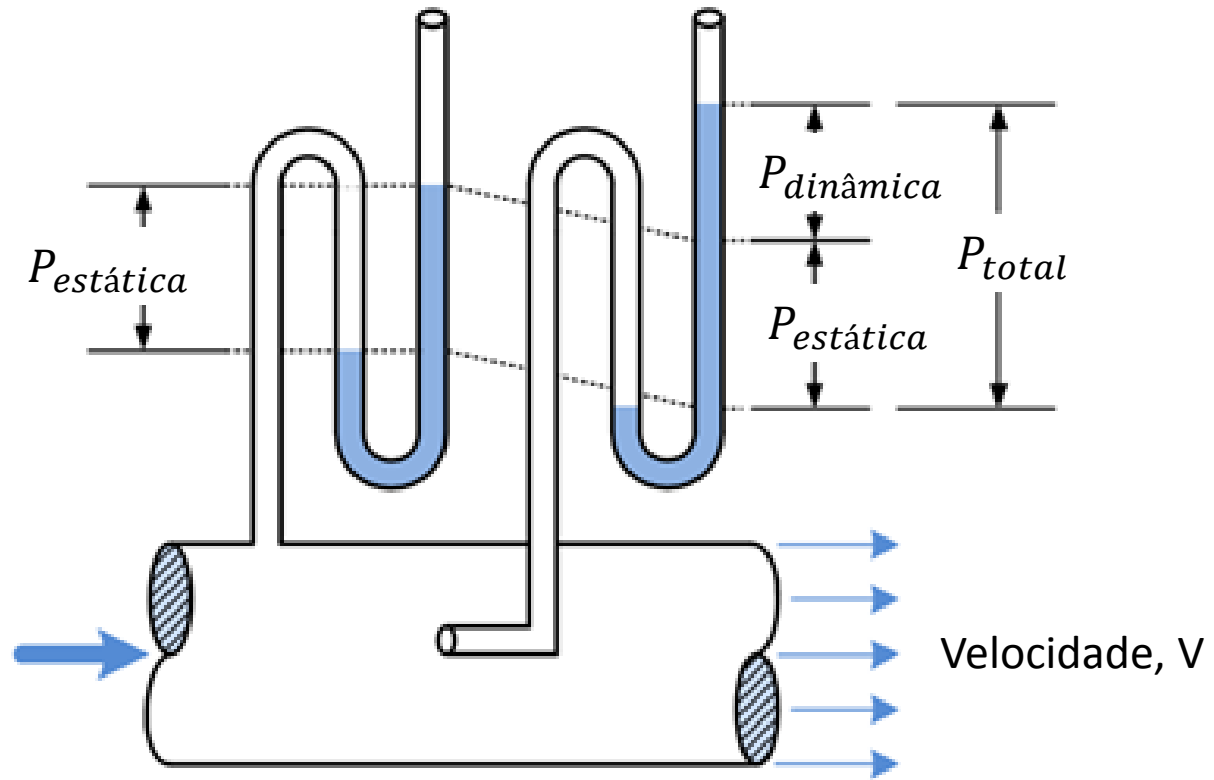
$$\mathbf{p - p_0 = \gamma h} \quad \text{que é a Lei de STEVIN}$$

Pressão absoluta (P_{abs}), pressão atmosférica (P_{atm}), pressão manométrica ou efetiva ($P_{efet.}$), vácuo ($P_{efet.}$)

Representação de uma pressão manométrica ou efetiva ($P_{efet.}$) de 100 kPa em um tubo, em São Paulo.

Representação de vácuo ($P_{efet.}$) de -50 kPa em um tubo, em São Paulo.

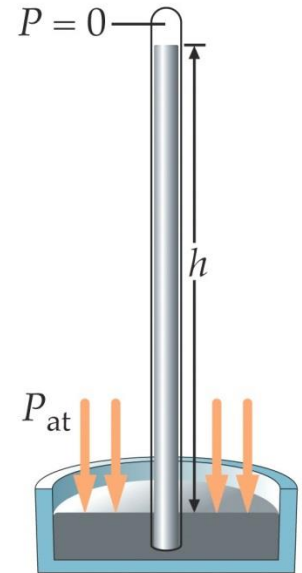


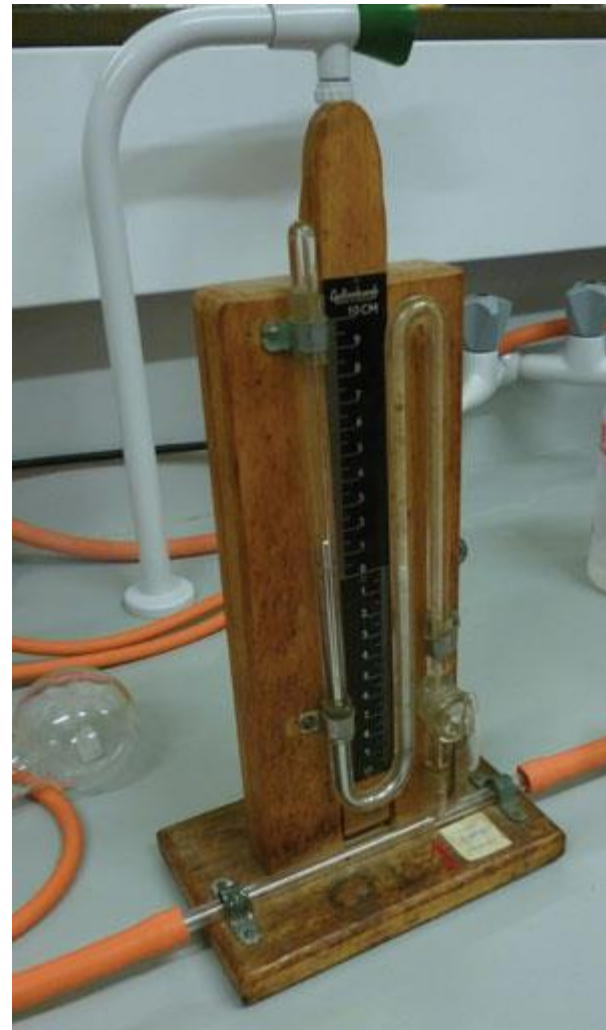


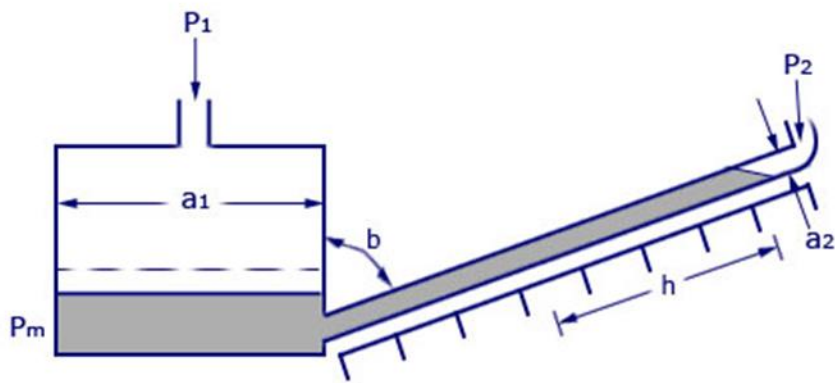
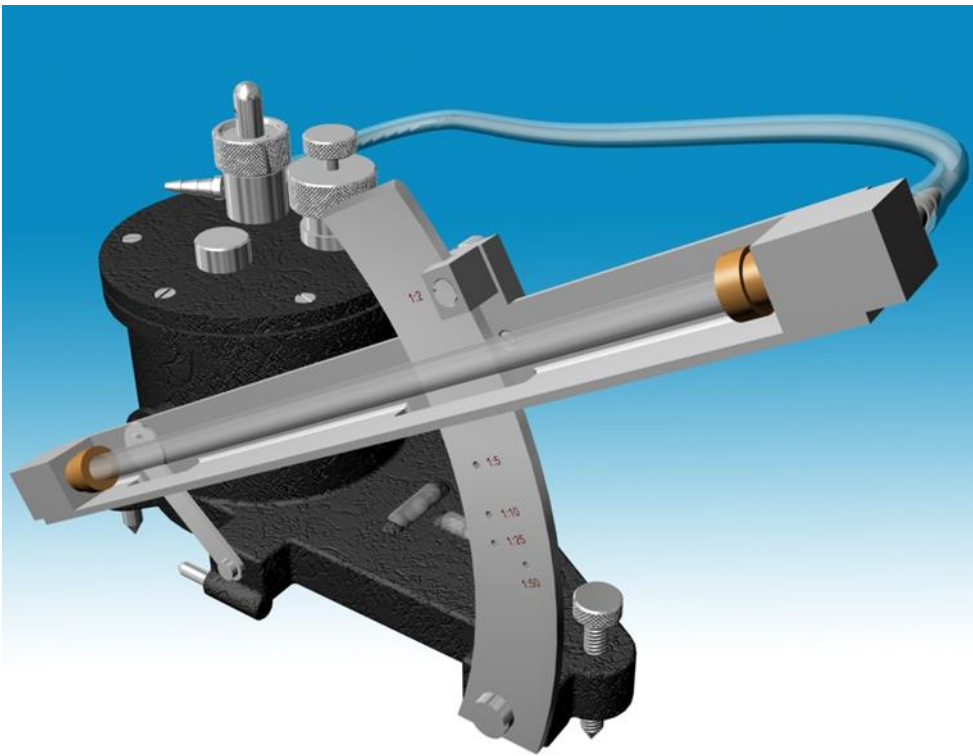
Tubo de Pitot e as representações de $P_{total} = P_{dinâmica} + P_{estática}$

Algumas unidades de pressão

101325 Pa (Pascal)=
1 atm (atmosfera=
1,01325 bar=
760 mmHg=
10,33 mH₂O=
1,0332 Kgf/cm²=
14,7 psi

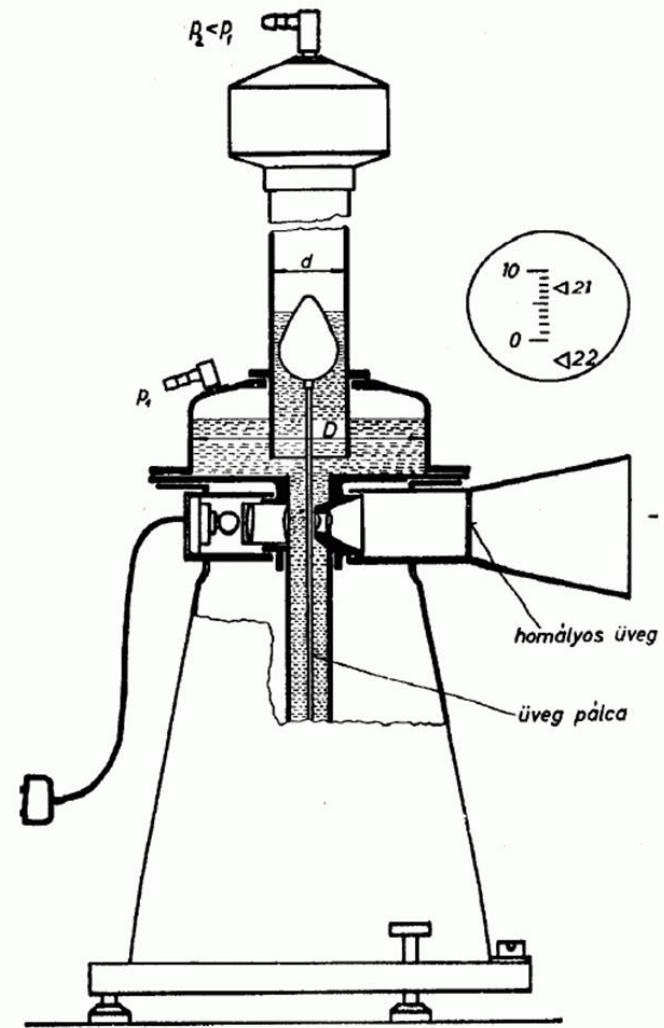
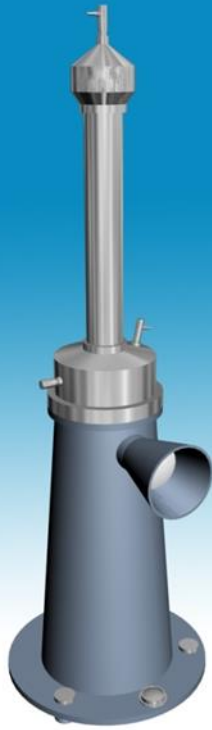




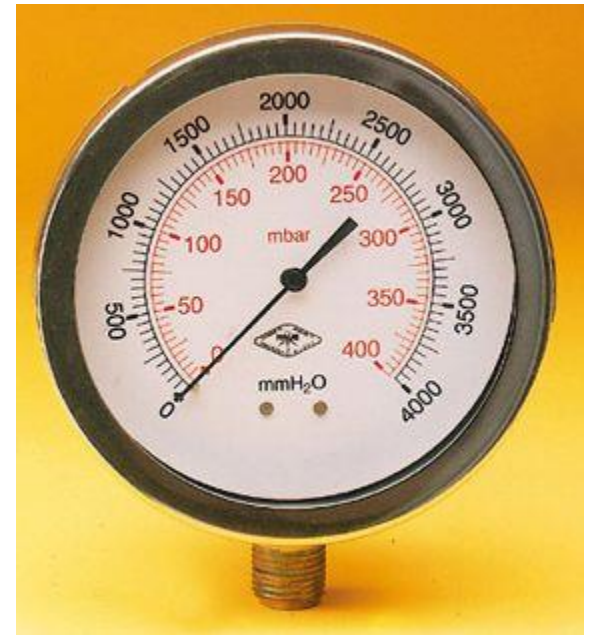
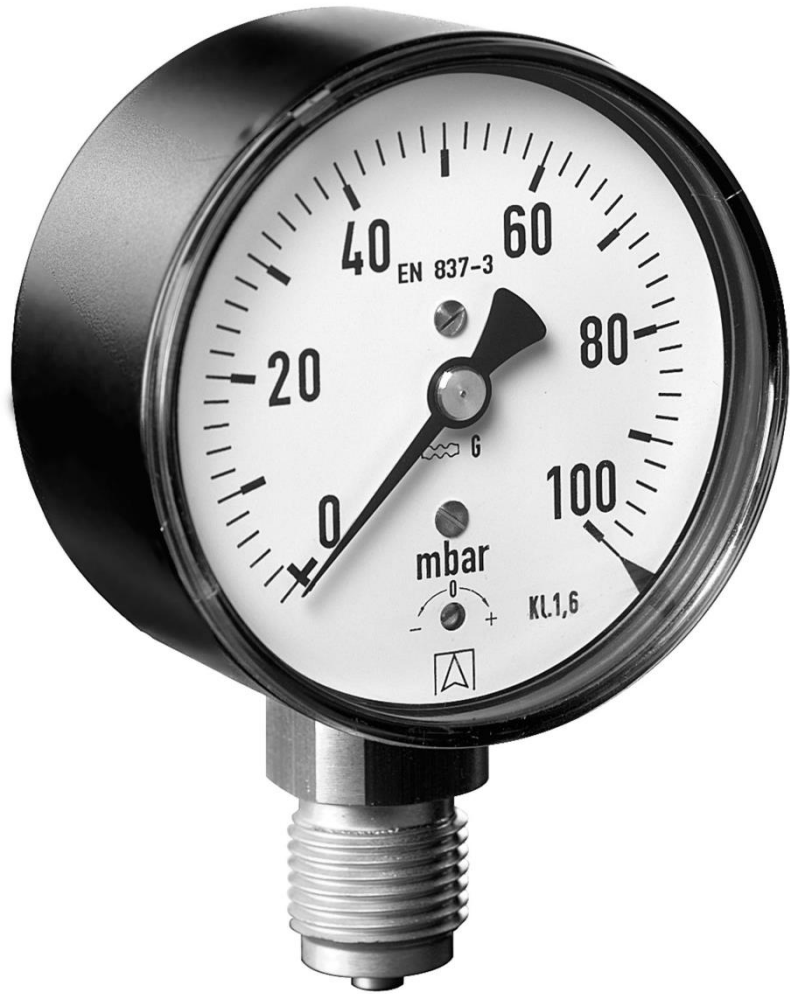


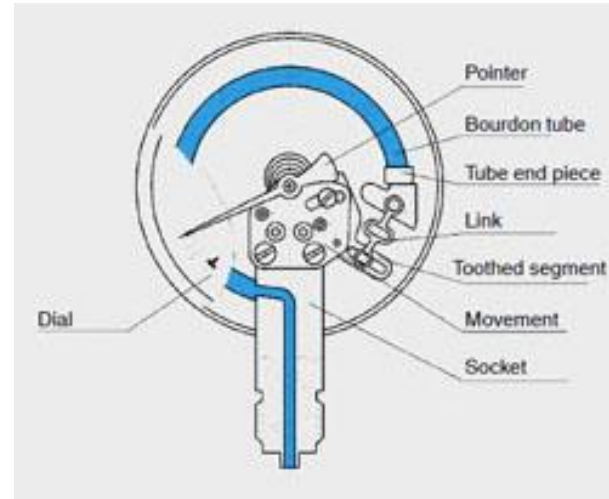
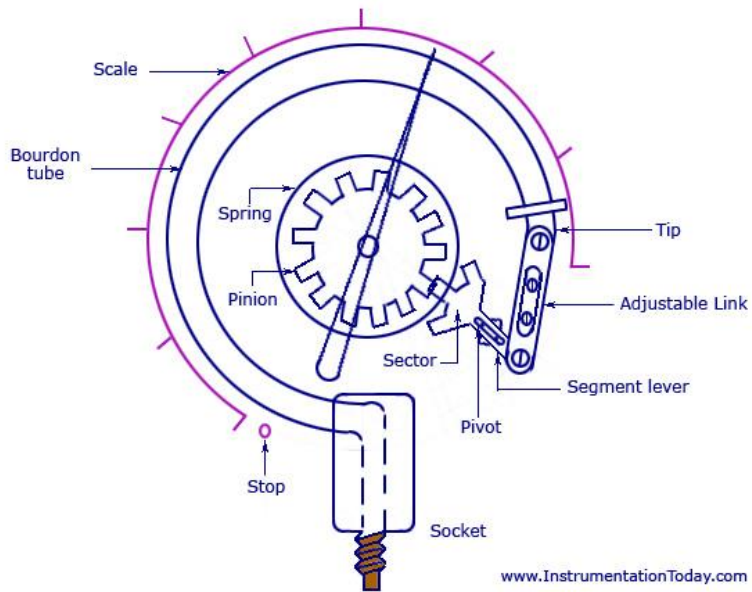
Inclined Tube manometer



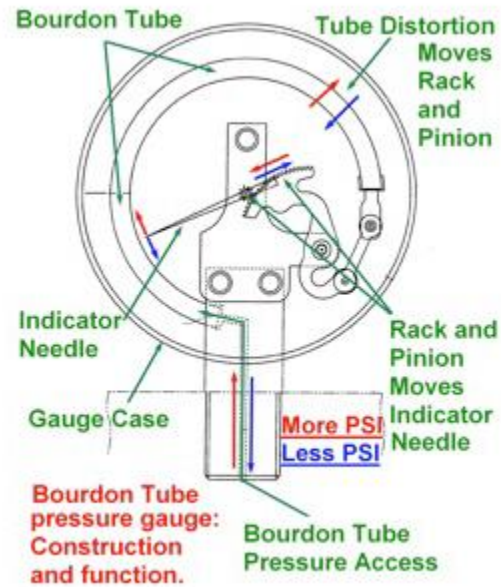
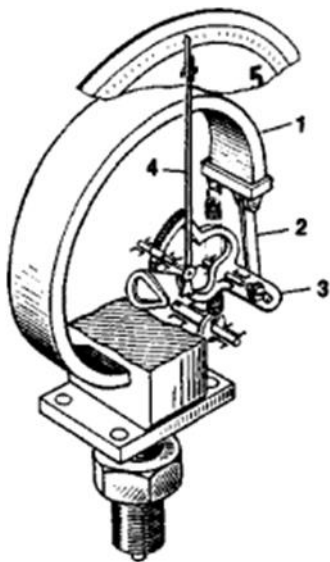


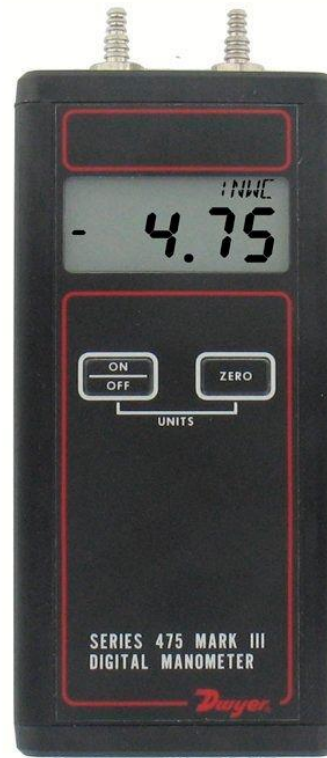
Betz micro manometer

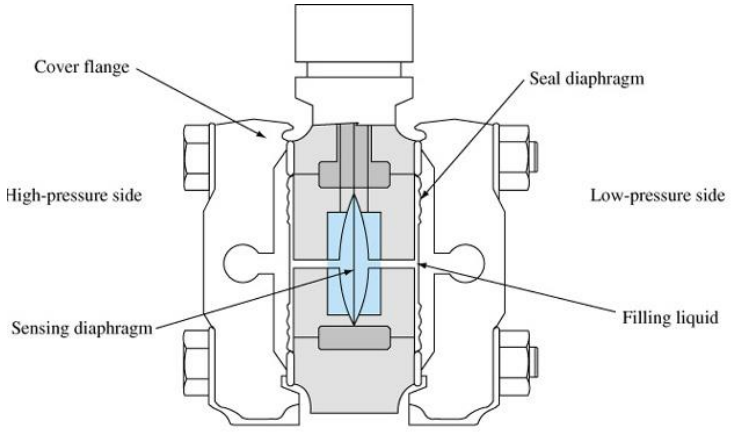
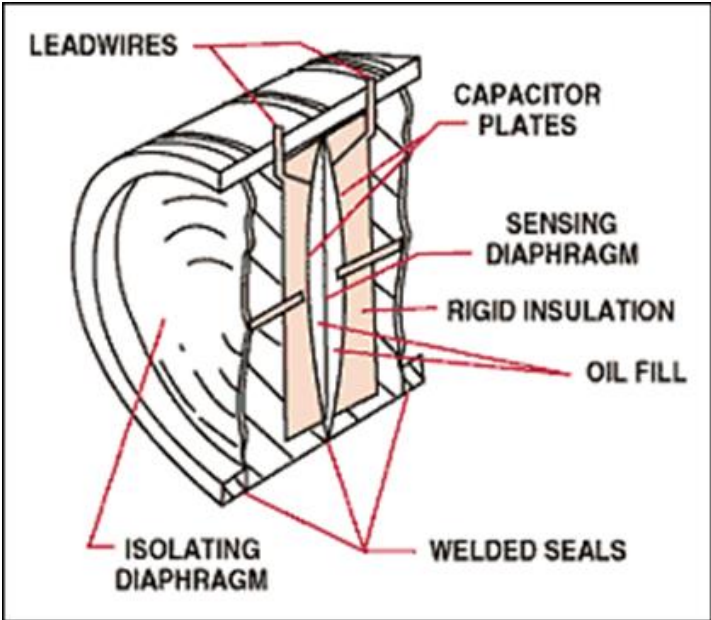




Bourdon Tube Pressure Gauge







(a)



MT220 DIGITAL MANOMETER

YOKOGAWA



LIGHT %Error AUTO 0% AUTO 100%



COMP

HI IN LO



DIGITS MENU



PARAMETER SET



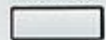
MEMORY

STORE RECALL DELETE No.



PRESSURE

ZERO CAL



POWER



DISPLAY

RELATIVE UNIT HOLD TRIG



DMM

DC5V/20mA ON/OFF



24V DC

ON/OFF



INPUT

FUSE

250V

T100mA

24V

OUTPUT

30mA

MAX



COM



COM



COM



COM



COM



COM



COM



COM



COM



COM



COM



COM



COM

INPUT

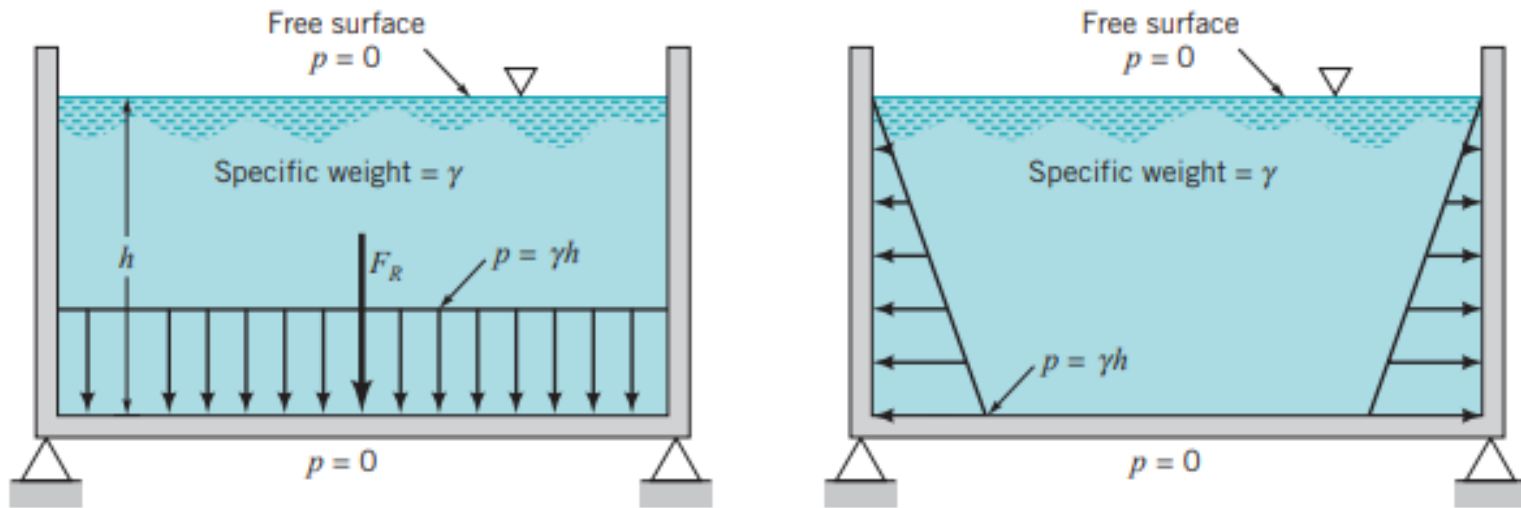
RANGE: 130kPa



500kPa MAX

ALL TERMINALS 42V PEAK MAX BETWEEN TERMINALS AND GND.

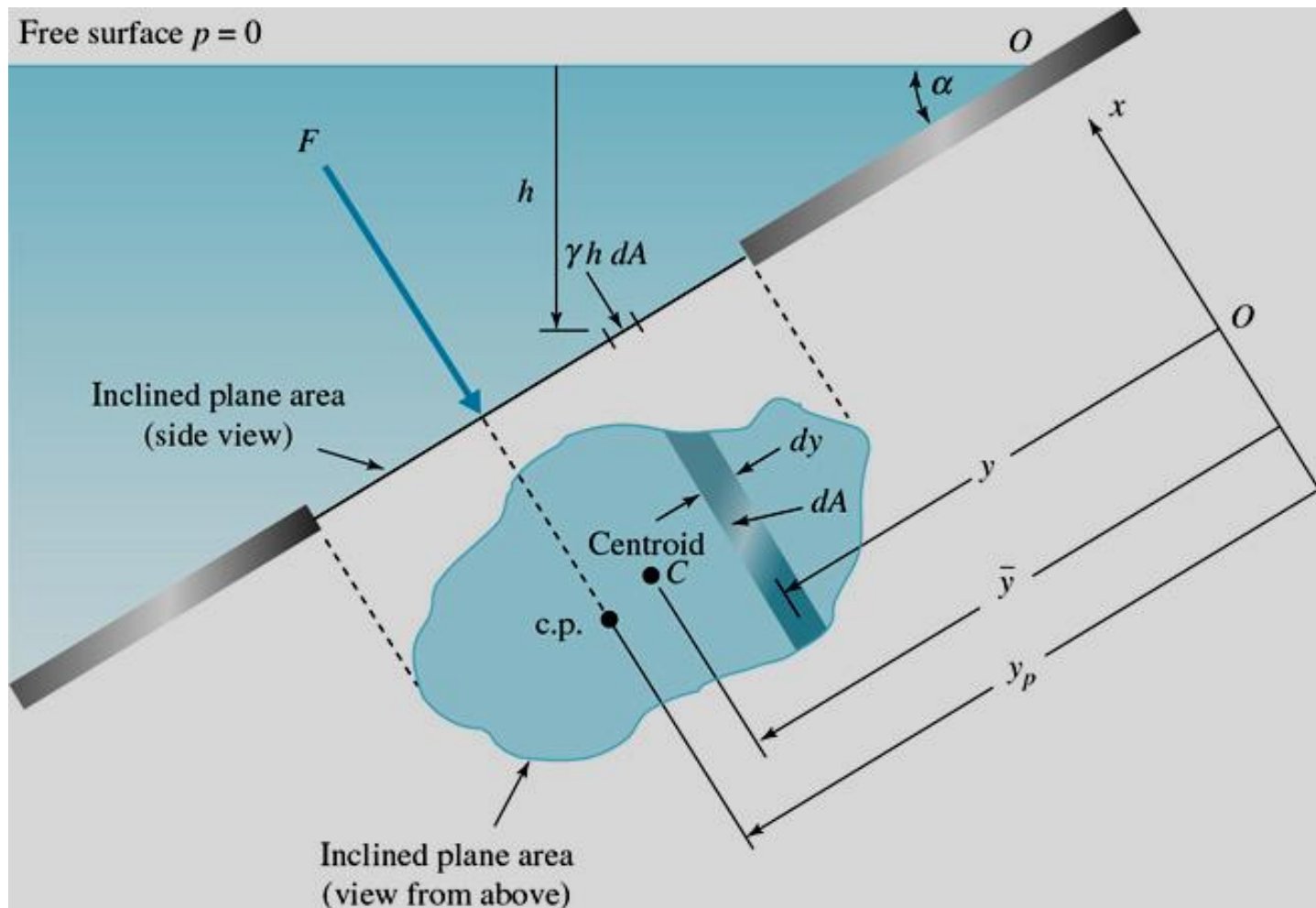
Forças hidrostáticas sobre áreas planas



Distribuição de pressões em um reservatório aberto

Dois métodos de resolução: método dos momentos de 1ª e 2ª ordem e Método dos Prismas de Pressão

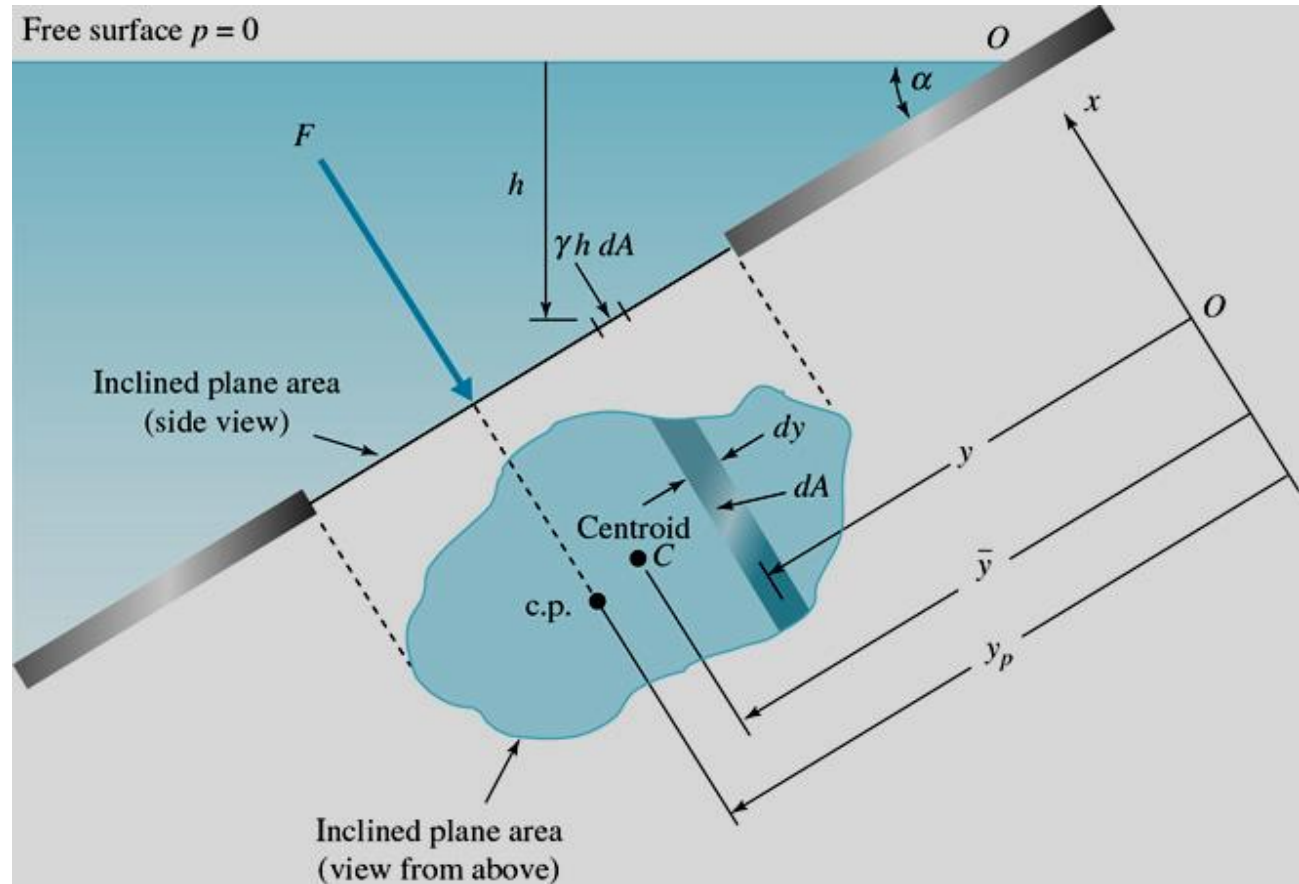
Forças sobre áreas planas – Método dos momentos de 1a e 2a ordem.



Centróide = CG (propriedade matemática da área)

Centro de Pressão = CP = Local de ação da força resultante

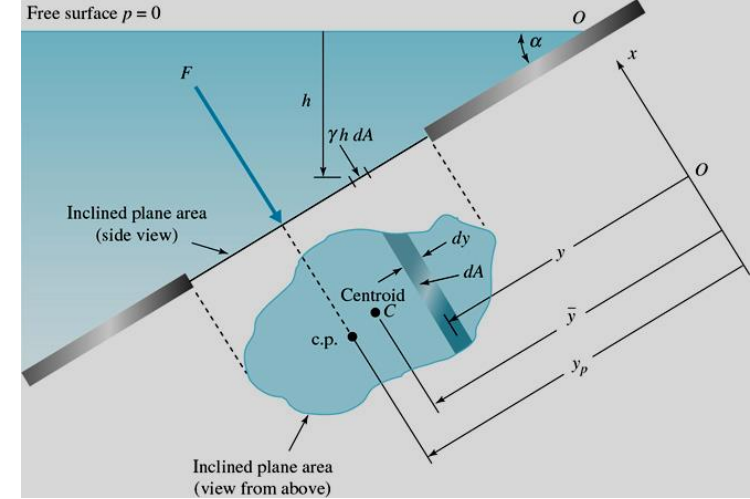
Forças sobre áreas planas



$$F_R = \int \gamma h dA = \int \gamma y \sin \alpha dA = \gamma \sin \alpha \int_A y dA$$

A integral é o Momento de 1ª ordem da área em relação ao eixo x

Forças sobre áreas planas



$$F_R = \int \gamma h dA = \int \gamma y \sin \alpha dA = \gamma \sin \alpha \int_A y dA$$

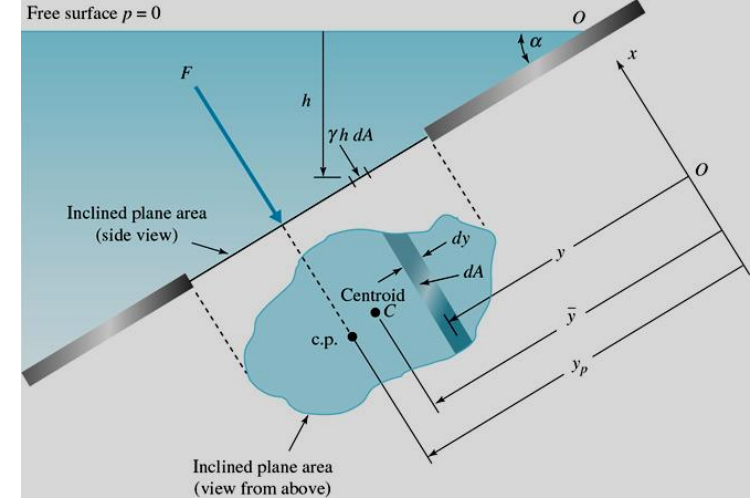
Como a integral é o Momento de 1ª ordem da área em relação ao eixo x , pode-se escrever:

$$\int_A y dA = y_c A, \text{ onde } y_c \text{ é a coordenada } y \text{ do centróide}$$

Assim $F_R = \gamma A y_c \sin \alpha = \gamma h_c A$

Forças sobre áreas planas

a linha de ação da força resultante, y_r , pode ser determinada pela soma dos momentos em relação a x (o momento da força resultante = momentos das forças de pressão)



$$F_R y_R = \int_A y dF = \int_A \gamma \sin \alpha y^2 dA$$

E como $F_R = \gamma A y_c \sin \alpha$, resulta $y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{y_c A}$

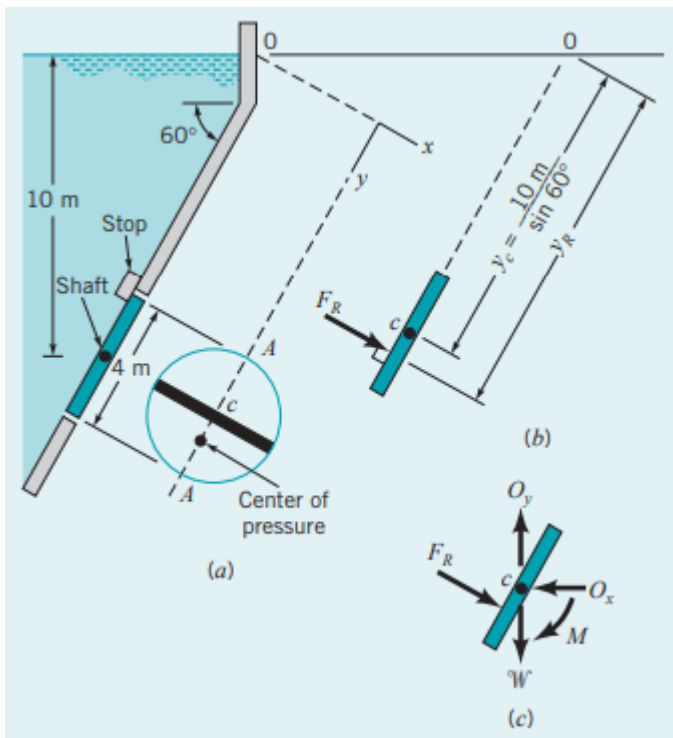
A integral é momento de 2ª ordem da área, ou momento de inércia I_x

$y_R = \frac{I_x}{y_c A}$ e, pelo teorema dos eixos paralelos $I_x = I_{xc} + A y_c^2$

Assim, $y_r = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c$ similarmente $x_r = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c$

TABELA C.1 Áreas

	<i>Esboço</i>	<i>Área</i>	<i>Centróide</i>	<i>Segundo momento</i>
Retângulo		bh	$\bar{y} = h/2$	$\bar{I} = bh^3/12$ $\bar{I}_{xy} = 0$
Triângulo		$bh/2$	$\bar{y} = h/3$	$\bar{I} = bh^3/36$ $\bar{I}_{xy} = (b - 2d)bh^3/72$
Círculo		$\pi D^2/4$	$\bar{y} = r$	$\bar{I} = \pi D^4/64$
Semicírculo		$\pi D^2/8$	$\bar{y} = 4r/3\pi$	$I_x = \pi D^4/128$
Elipse		πab	$\bar{y} = b$	$\bar{I} = \pi ab^3/4$
Semi-elipse		$\pi ab/2$	$\bar{y} = 4b/3\pi$	$I_x = \pi ab^3/8$



Determine a magnitude e a força resultante da exercida pela água sobre a comporta circular com 4m de diâmetro.

Determine o momento a ser aplicado no eixo para abrir a comporta.

$h_c = 10 \text{ m}$ = altura da coluna de água no Centróide (propriedade matemática da área)

$$F_R = \gamma h_c A = 9,8 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot \left(\pi \frac{4^2}{4} \right) = 1,23 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Ponto de aplicação

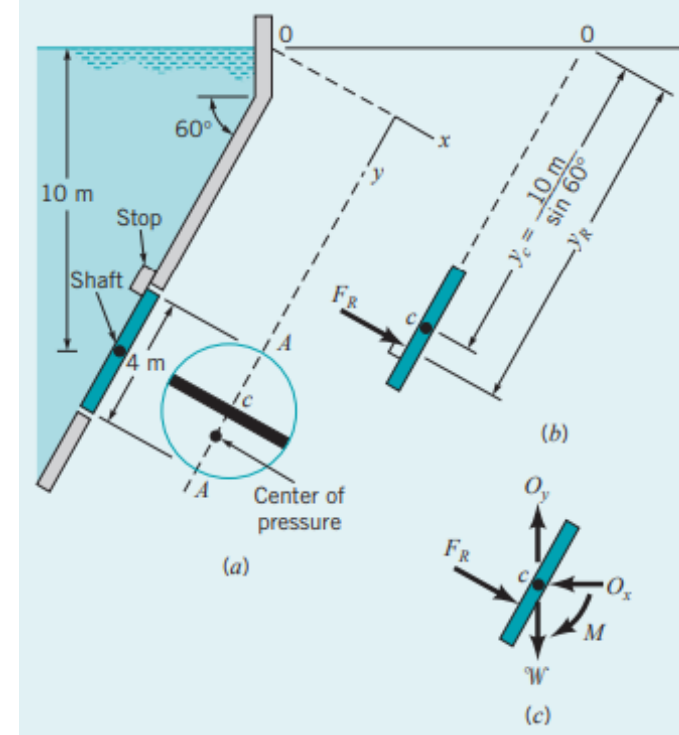
$$y_R = \frac{I_{x_c}}{y_c A} + y_c \text{ e } x_R = \frac{I_{x y_c}}{y_c A} + x_c \text{ (por simetria)}$$

da tabela $I_{x_c} = \frac{\pi R^4}{4}$ e $y_c = \frac{10}{\text{sen}60} \rightarrow y_r = \frac{h_c^2 \frac{\pi R^4}{4}}{(10/\text{sen}60)} + \frac{10}{\text{sen}60} = 11,6 \text{ m}$

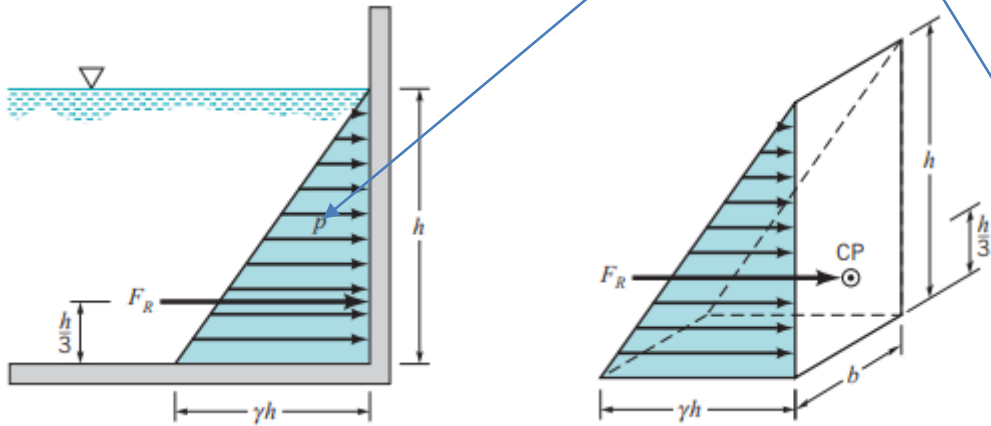
$y_R - y_c = 11,6 - \frac{10}{\text{sen}60} = 0,0866$, um pouco abaixo do centroide C, o que implica que o batente está forçado.

Para dimensionar o motor/redutor para abrir a comporta e sangrar o reservatório, calcula-se o momento ou torque

$$\sum M_c = 0 \text{ e portanto } F_R = (y_R - y_c) = 1,23 \cdot 10^6 \cdot 0,0866 = 1,07 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$



Método do Prisma de Pressão



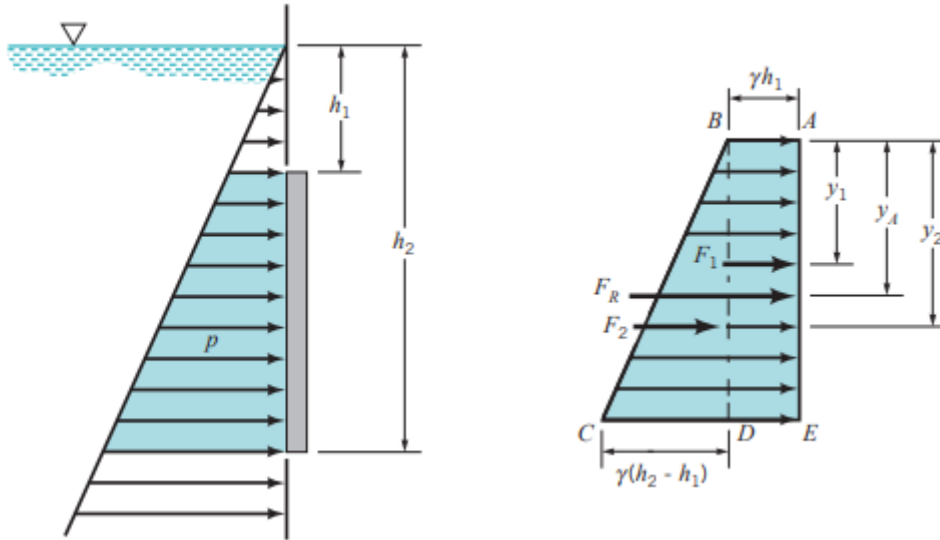
- P varia linearmente com profundidade $P = \gamma h$
- $P_{efet} = 0$ na superfície
- P_{media} ocorre em plano $h/2$ na distribuição triangular

F_R que atua na área $A = b \cdot h$ é $F_R = P_{média} \cdot A = \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot A$

$$F_R = \text{volume do prisma} = \frac{1}{2} \gamma h \cdot bh = \gamma \frac{h}{2} A \quad \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \cdot \text{largura}$$

Método do Prisma de Pressão

Mesma abordagem vale quando a superfície está totalmente submersa

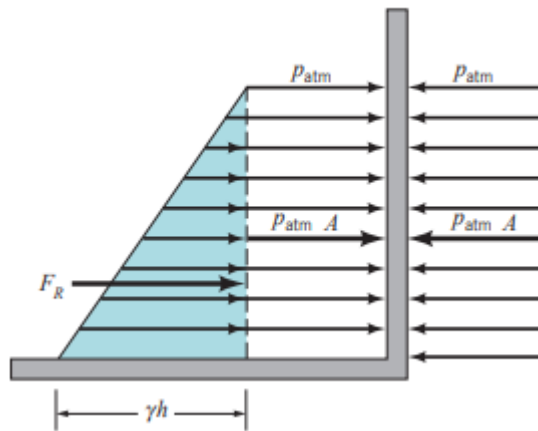
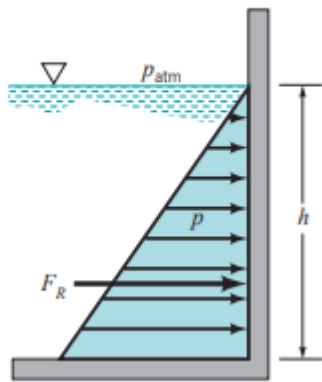
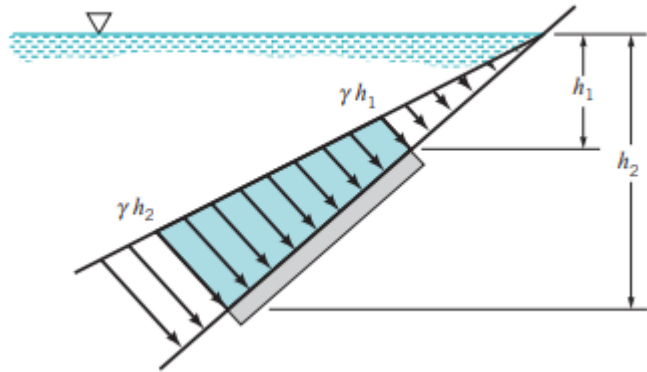


Distribuição triangular de pressões $= \gamma(h_2 - h_1) \cdot h_2 \cdot b$
 Distribuição retangular de pressões $= \gamma h_1 \cdot h_1 \cdot b$

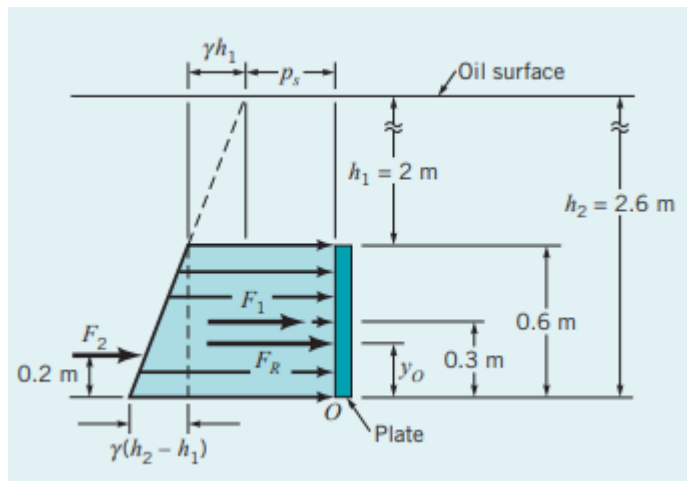
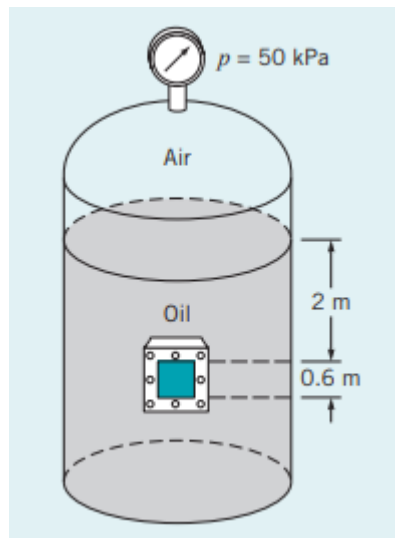
$$F_R = F_1 + F_2 \quad (\Delta + \square)$$

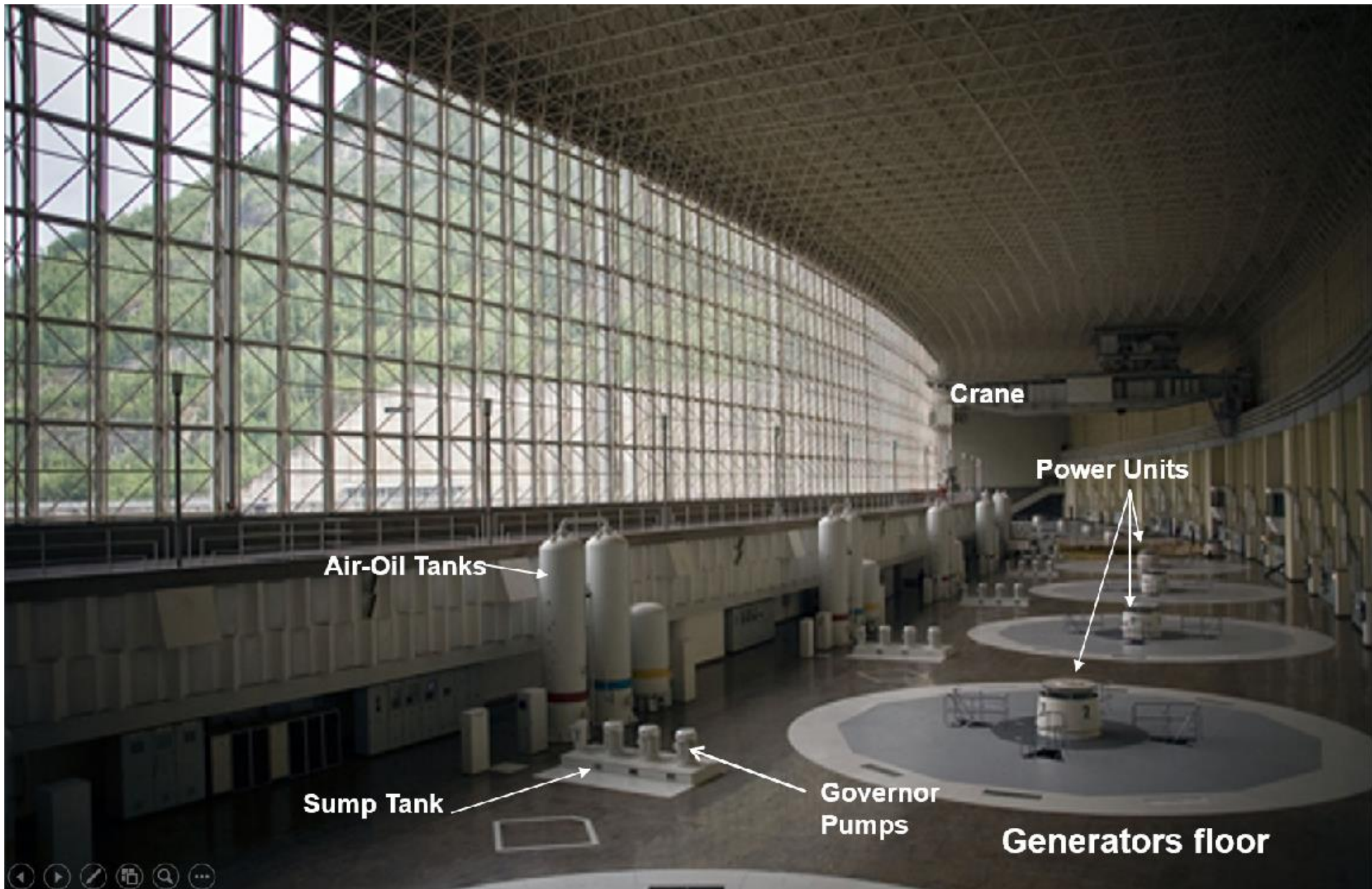
A localização de F_R é determinada a partir do momento em relação a um eixo

$$F_R y_R = F_1 y_1 + F_2 y_2$$



Tanque pressurizado com ar contém óleo (densidade=0,9) e possui uma vigia para limpeza e inspeção com $0,9 \times 0,9 \text{ m}^2$. Qual a magnitude e localização da força nesta placa?





Air-Oil Tanks

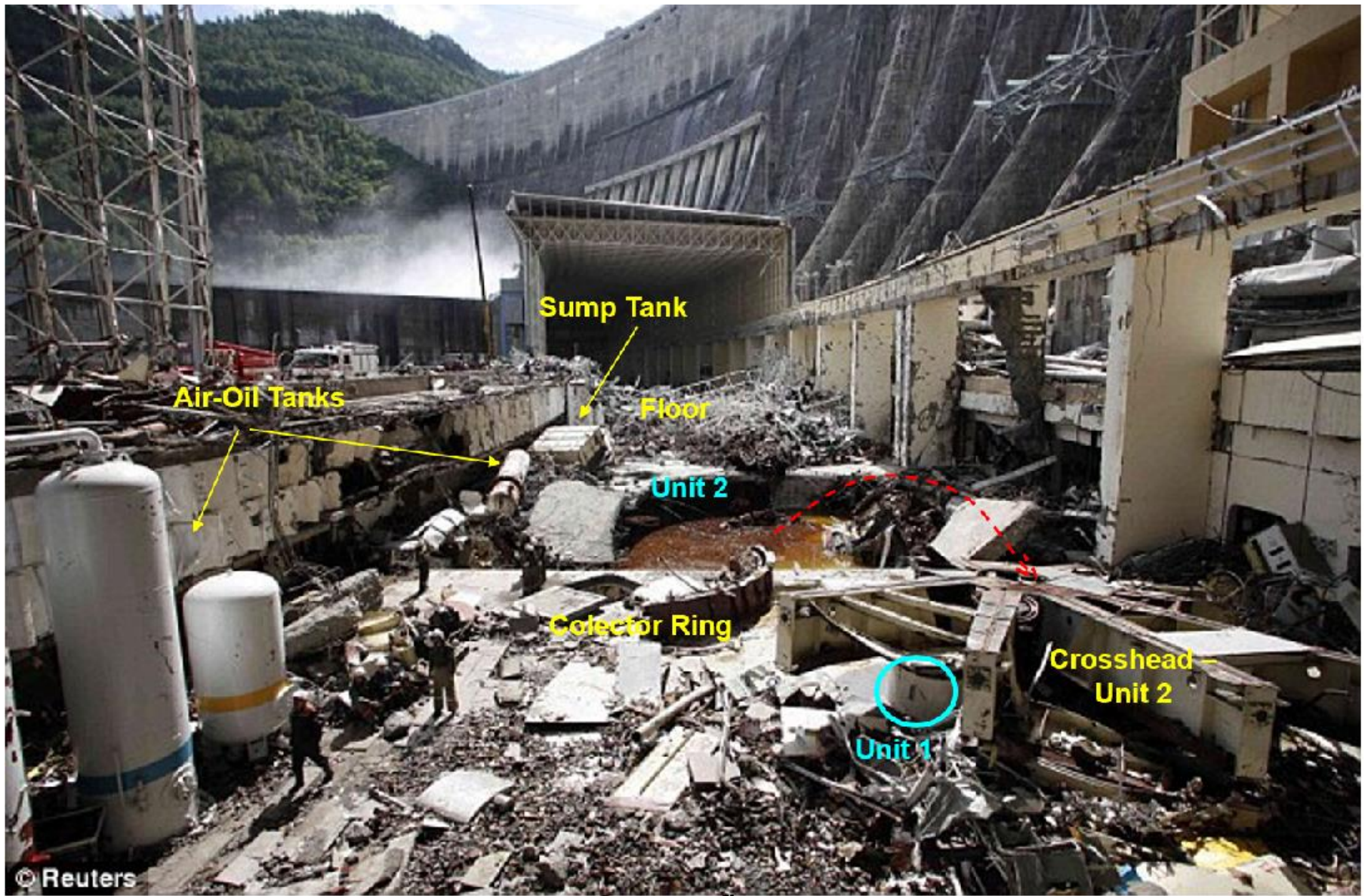
Sump Tank

**Governor
Pumps**

Crane

Power Units

Generators floor



Sump Tank

Air-Oil Tanks

Floor

Unit 2

Collector Ring

Unit 1

Crosshead -
Unit 2

$$F_1 = (P_{gas} + \rho g h_1)A = (50 \times 10^3 + 0,9 \times 10^3 \times 9,81 \times 2) \times 0,36 = 24400N$$

$$F_2 = \rho g \left(\frac{h_1 - h_2}{2} \right) A = 0,9 \times 10^3 \times 9,81 \times \left(\frac{0,6}{2} \right) \times 0,36 = 950N$$

$$F_R = F_1 + F_2 = 25.400N$$

Localização vertical do ponto de aplicação da F_R : obtida somando os momentos em relação ao eixo que passa pelo ponto zero:

$$F_R \cdot y_R = F_1(0,3) + F_2(0,2)$$

$$\therefore y_R = \frac{24,4 \times 10^3 \times 0,3 + 0,95 \times 10^3 \times 0,2}{25,4 \times 10^3} = 0,296m$$

