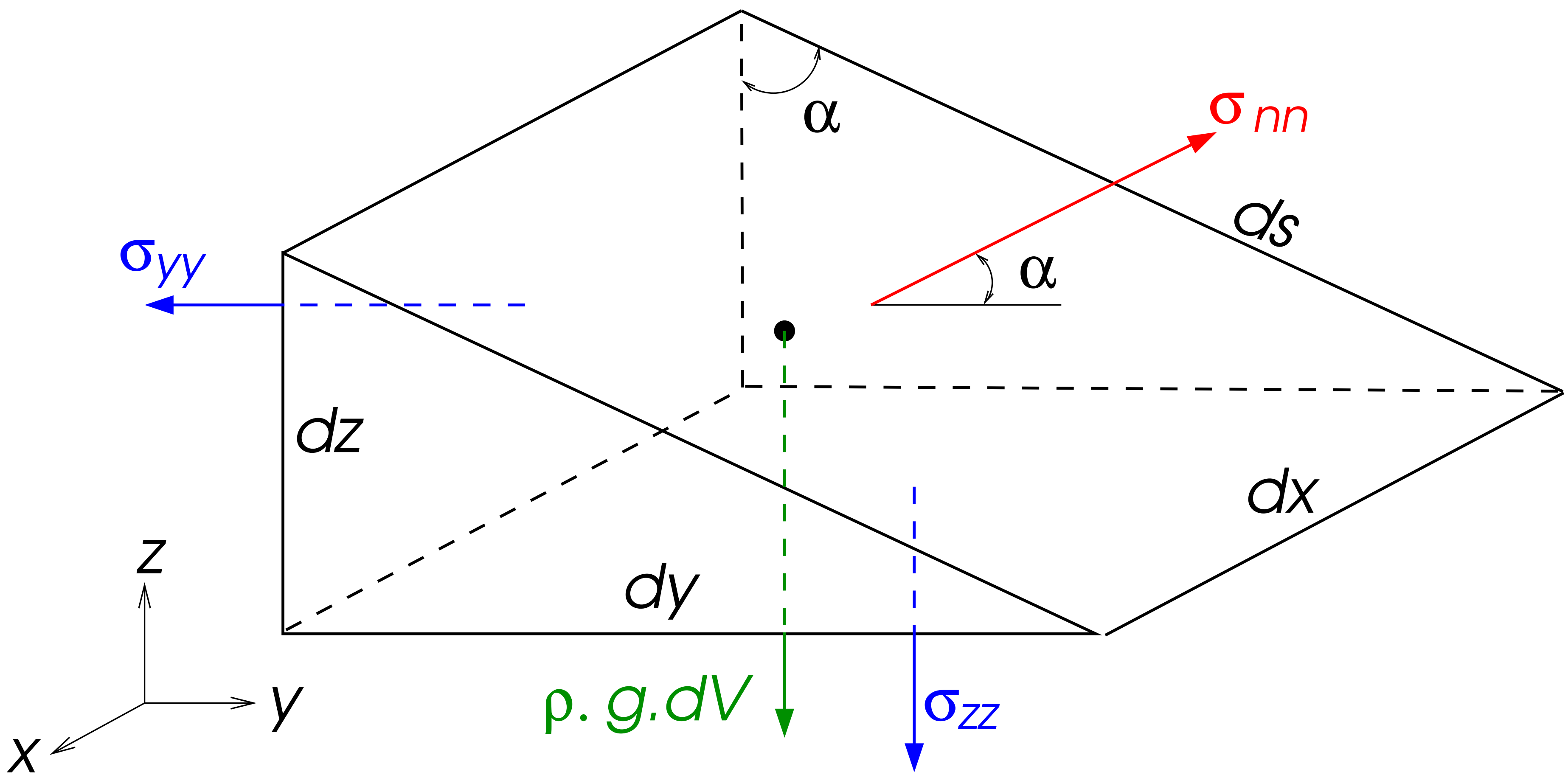
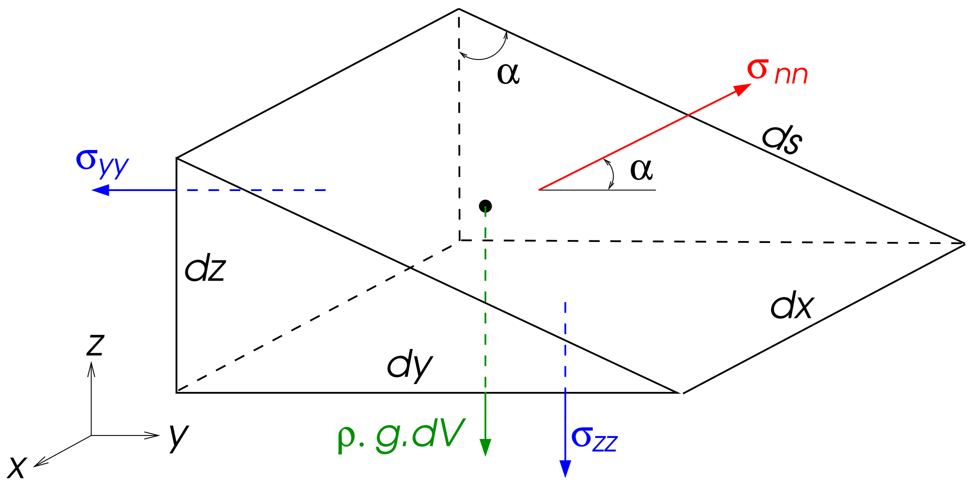
Estática dos Fluidos

Em um fluido em repouso (ou em um fluido invíscido, dito perfeito) não existem tensões de cisalhamento, apenas normais:



Vamos aplicar a 2ª lei de Newton:



Direção z:

$$-\sigma_{zz}.dx.dy + \sigma_{nn}.ds.dx.\text{sen}\alpha - \rho.g.dV = \rho.dV.a_z$$

Uma vez que $dV = [(dy.dz)/2].dx$ e $\text{sen}\alpha = dy/ds$, segue-se que:

$$-\sigma_{zz}.dx.dy + \sigma_{nn}\cdot ds\cdot dx\cdot \frac{dy}{ds} - \rho\cdot g\cdot \frac{dx.dy.dz}{2} = \rho.\frac{dx.dy.dz}{2}.a_z$$

Dividindo por $dx.dy$ e rearranjando,

$$\sigma_{nn} = \sigma_{zz} + \rho\cdot g\cdot \frac{dz}{2} + \rho\cdot \frac{dz}{2}\cdot a_z = \sigma_{zz} + \rho\cdot \frac{dz}{2}\cdot (g + a_z)$$

como dz é infinitesimalmente pequeno, segue-se que

$$\sigma_{nn} = \sigma_{zz}$$

Direção y:

$$-\sigma_{yy}.dx.dz + \sigma_{nn}.ds.dx.\cos\alpha = \rho.dV.a_y$$

Uma vez que $dV = [(dy.dz)/2].dx$ e $\cos\alpha = dz/ds$, segue-se que:

$$-\sigma_{yy}.dx.dz + \sigma_{nn} \cdot ds \cdot dx \cdot \frac{dz}{ds} = \rho.\frac{dx.dy.dz}{2}.a_y$$

Dividindo por $dx.dz$ e rearranjando,

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy} + \rho \cdot \frac{dy}{2} \cdot a_y$$

como dy é infinitesimalmente pequeno, segue-se que

$$\sigma_{nn} = \sigma_{yy}$$

Analogamente, para a direção x, a mesma conclusão seria obtida: $\sigma_{nn} = \sigma_{xx}$

Introdução

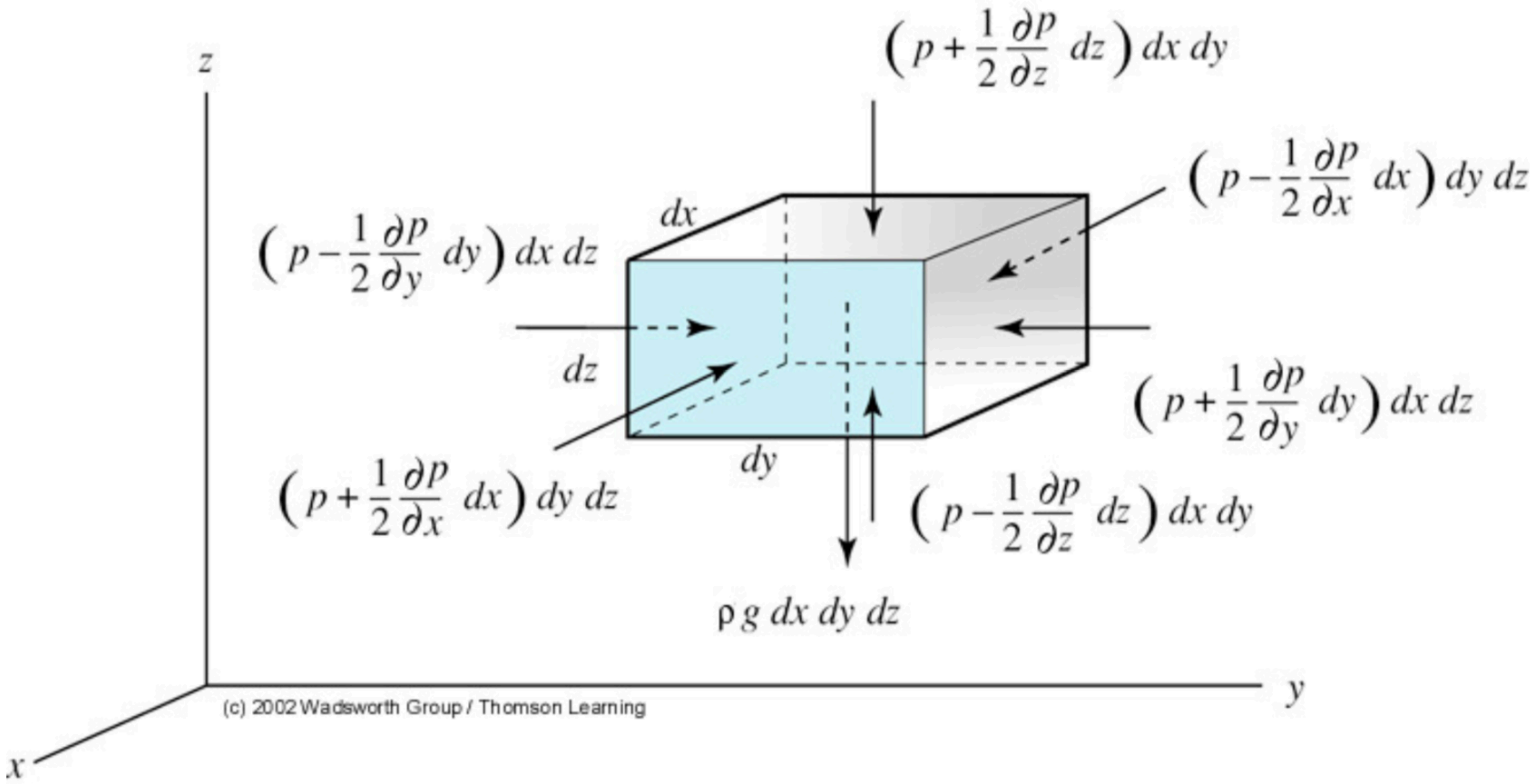
Assim, para o escoamento de fluido perfeito (invíscido), a tensão normal em um ponto é a mesma em todas as direções. Ela é, portanto, uma grandeza escalar.

A tensão normal em um escoamento de fluido perfeito é igual à *pressão termodinâmica* com sinal contrário: $\sigma_{nn} = -p$

Para a situação do fluido em repouso, $a_z = a_y = 0$ e os resultados obtidos continuam válidos: $\sigma_{zz} = \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \sigma_{nn} = -p$.

Equação da estática dos fluidos

Considere o elemento de fluido em repouso:



Equação da estática dos fluidos

A força superficial resultante é dada por:

$$
\begin{aligned}
d\vec{F}_s \quad = \quad & \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)\cdot dy\cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right)\cdot dy\cdot dz\right]\cdot\vec{i} \\
& \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}\right)\cdot dx\cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{dy}{2}\right)\cdot dx\cdot dz\right]\cdot\vec{j} \\
& \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{dz}{2}\right)\cdot dx\cdot dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{dz}{2}\right)\cdot dx\cdot dy\right]\cdot\vec{k}
\end{aligned}
$$

$$d\vec{F}_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

$$\therefore d\vec{F}_s = -\vec{\nabla}p.dx.dy.dz$$

Equação da estática dos fluidos

A força resultante sobre o elemento será a soma da força de campo e de superfície:

$$d\vec{F}_R = d\vec{F}_c + d\vec{F}_s = \left(-\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g}\right).dx.dy.dz = \left(-\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g}\right).dV$$

A força resultante deve ser zero para o fluido em repouso:

$$-\vec{\nabla}p + \rho.\vec{g} = 0$$

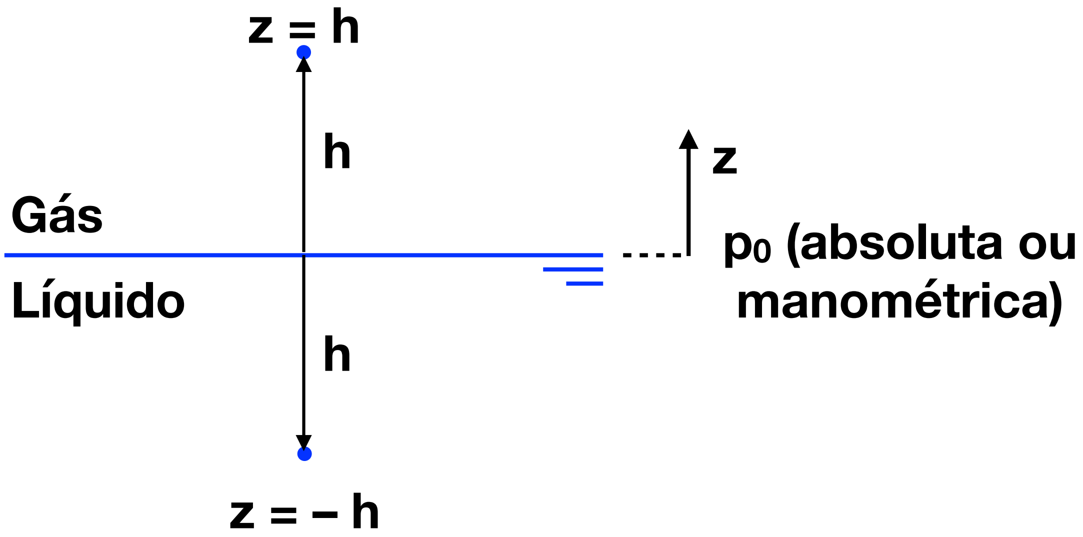
Como a aceleração da gravidade atua só no eixo z:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \; ; \text{e} \; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho.g = -\gamma$$

Variação de pressão em um fluido estático

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Deduzimos: $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$; $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$; e $\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho.g = -\gamma$



Integrando (fluido incompressível):

$$\int_{p(z)}^{p_0} dp = -\gamma \cdot \int_{z=-h}^{0} dz$$

$$\int_{p(z)}^{p_0} dp = -\gamma \cdot \int_{z=-h}^{0} dz$$

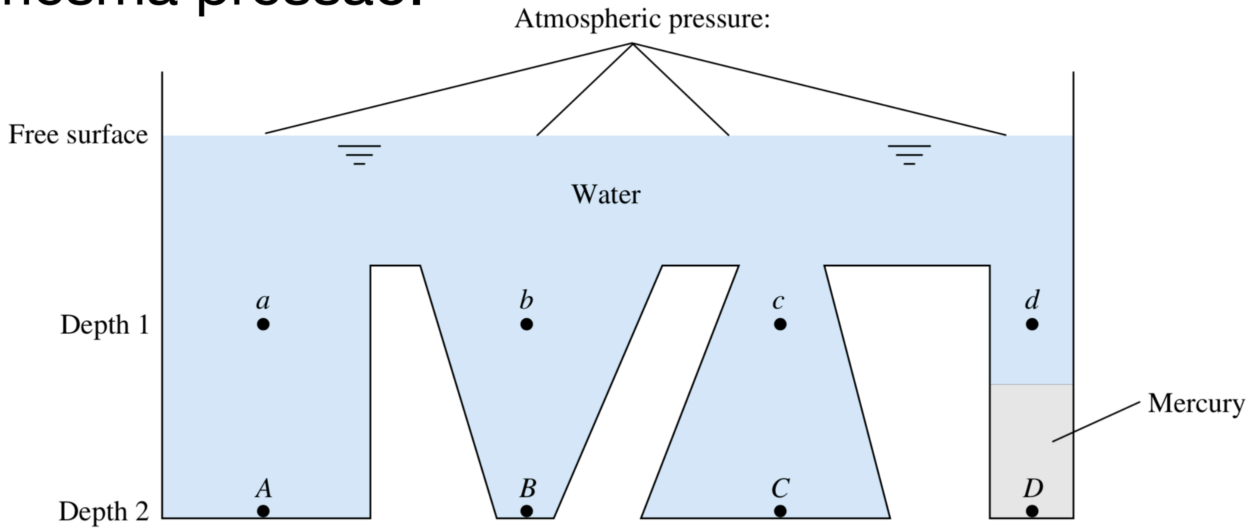
$$p_0 - p(z) = -\gamma.[0 - (-h)]$$

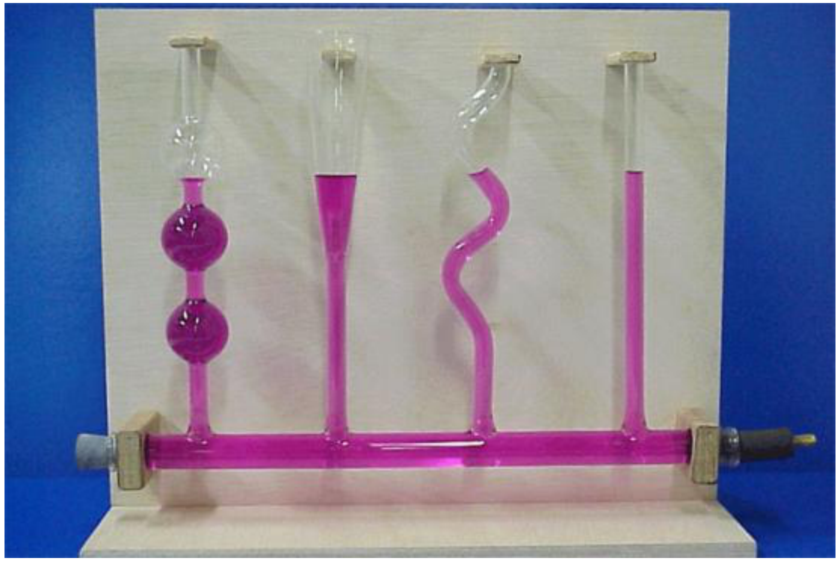
Lei de Stevin: $p(z) = p_0 + \gamma.h = p_0 + \rho.g.h$

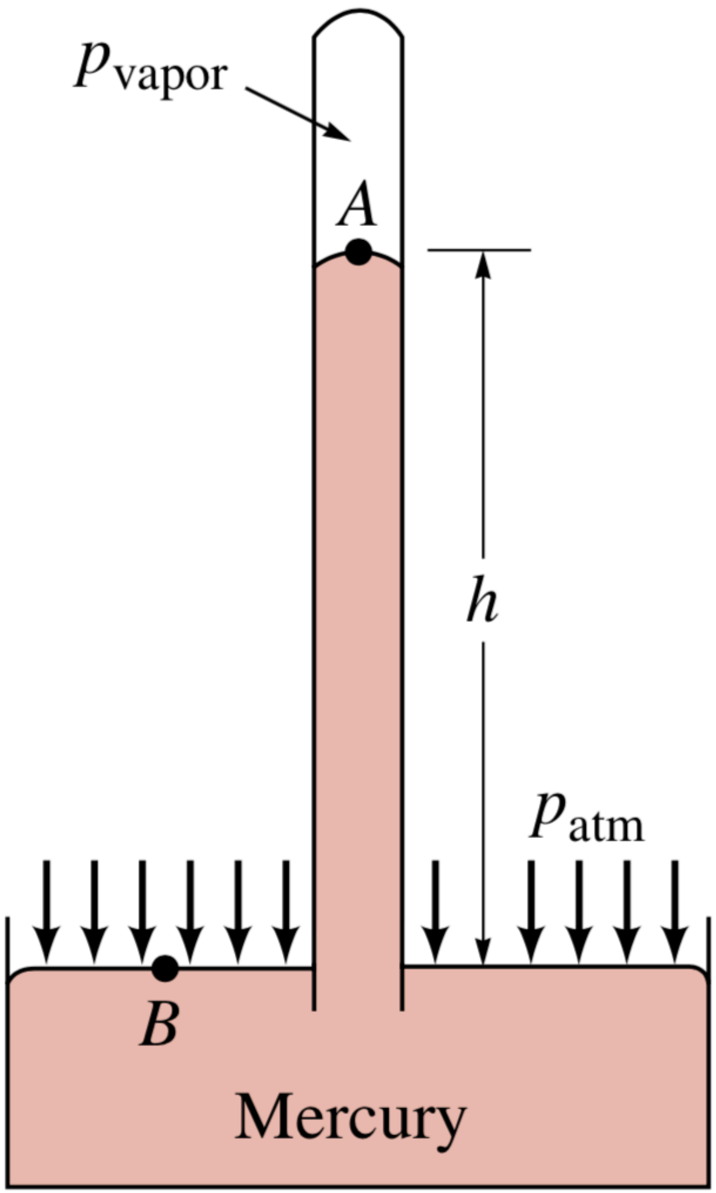
Princípio dos vasos comunicantes

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

A pressão exercida por um líquido não depende do formato ou do volume do recipiente no qual ele se encontra e que pontos de mesma altura possuem mesma pressão.







Barômetro de Toriccelli:

$$p_{atm} = p_{vapor} + \gamma . h$$

$$p_{atm} \approx \gamma . h$$

Peso específico de alguns fluidos comuns

Fluid	Specific weight γ at 68°F = 20°C lbf/ft^3	N/m^3
Air (at 1 atm)	0.0752	11.8
Ethyl alcohol	49.2	7,733
SAE 30 oil	55.5	8,720
Water	62.4	9,790
Seawater	64.0	10,050
Glycerin	78.7	12,360
Carbon tetrachloride	99.1	15,570
Mercury	846	133,100

Aplicação #2.1: Tubo de Bourdon

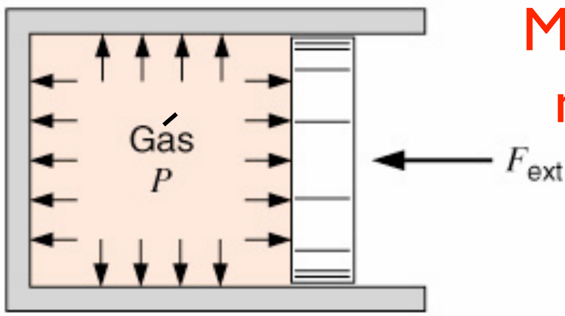
Fonte: Wika Group – https://www.youtube.com/watch?v=I4NEGbuEUQA

Conceitos fundamentais

Pressão

$$P = \lim_{\delta A \to \delta A'} \frac{\delta F_n}{\delta A}$$

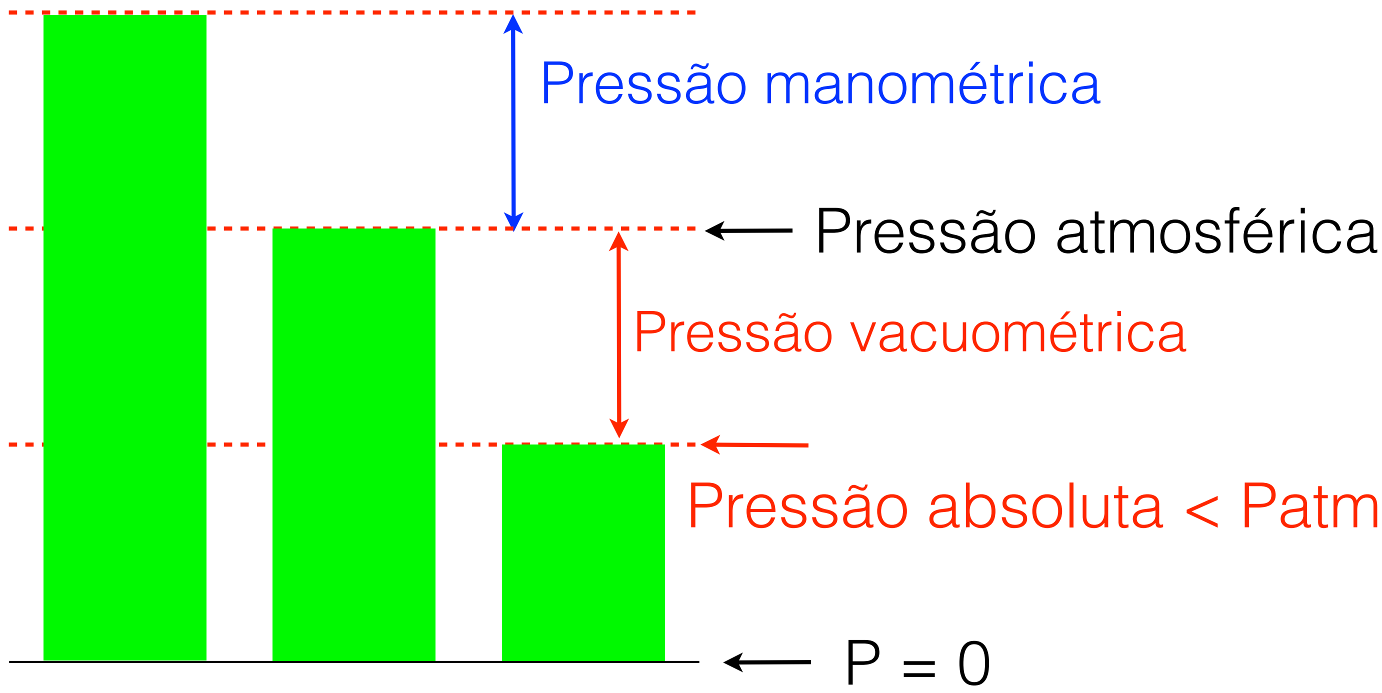
Considere a situação:



Mesma pressão no equilíbrio

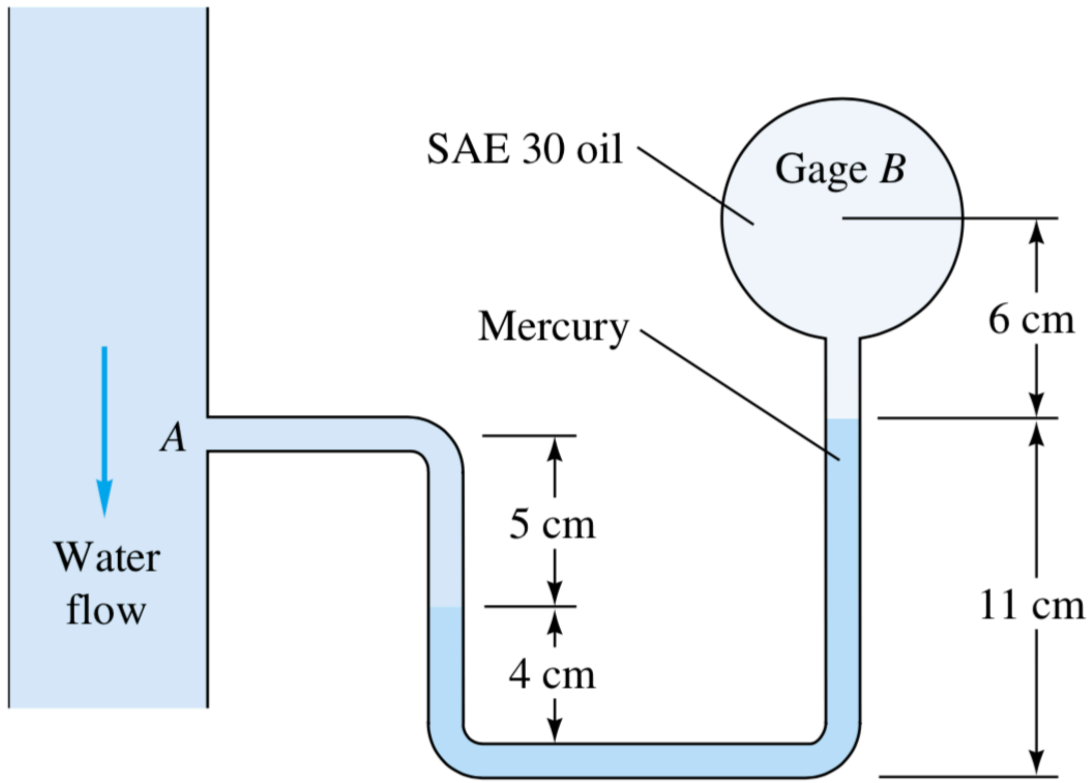
Pressão absoluta > Patm

Em Termodinâmica trabalhamos com



Manometria: Exemplo 1

O medidor de pressão B marca 87 kPa, pede-se para calcular a pressão am A. Admita que todos os fluido estão a 20 °C.



Resp. 96,4 kPa
Absoluta ou manométrica?

Procedimento para solucionar problemas de manômetro

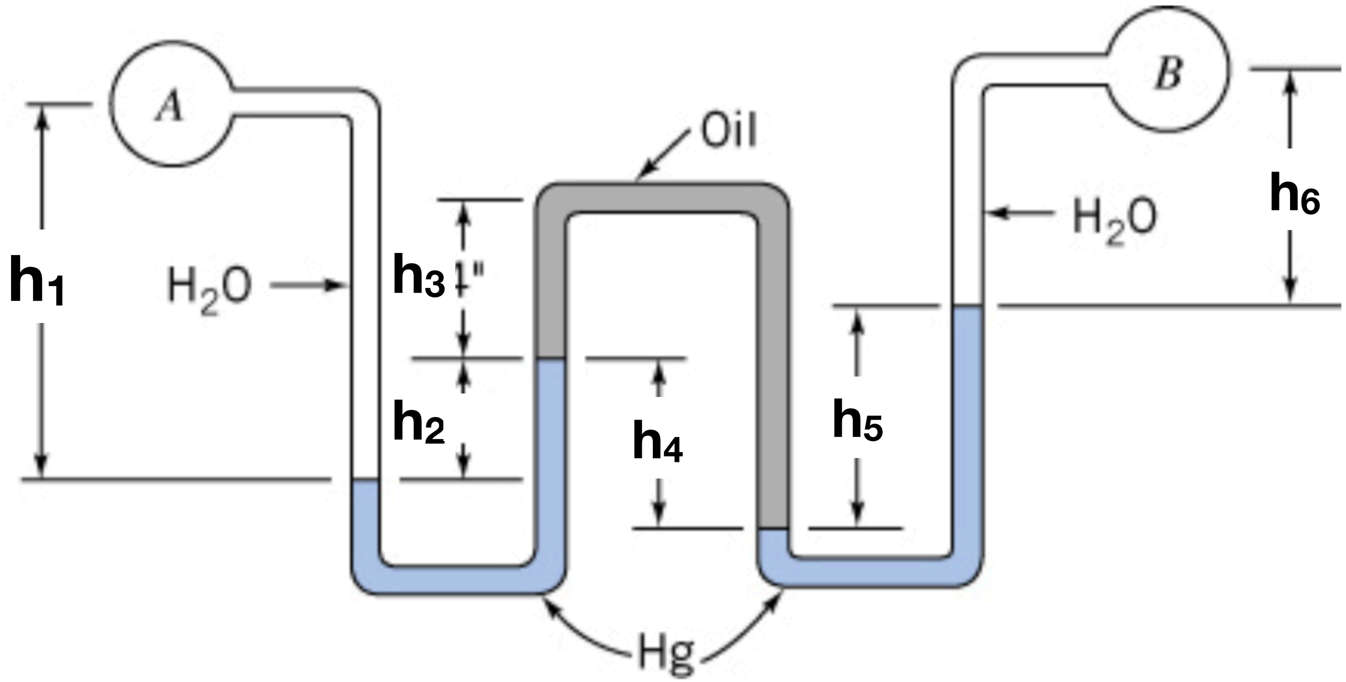
1. Começar em uma extremidade;

2. Somar a esta pressão a variação de pressão se o próximo menisco estiver em um nível mais baixo ou subtrair a variação de pressão se o menisco estiver em um nível mais alto;

3. Repetir a etapa 2 até alcançar a outra extremidade do manômetro e igualar à pressão neste ponto.

Manometria: Exemplo 2

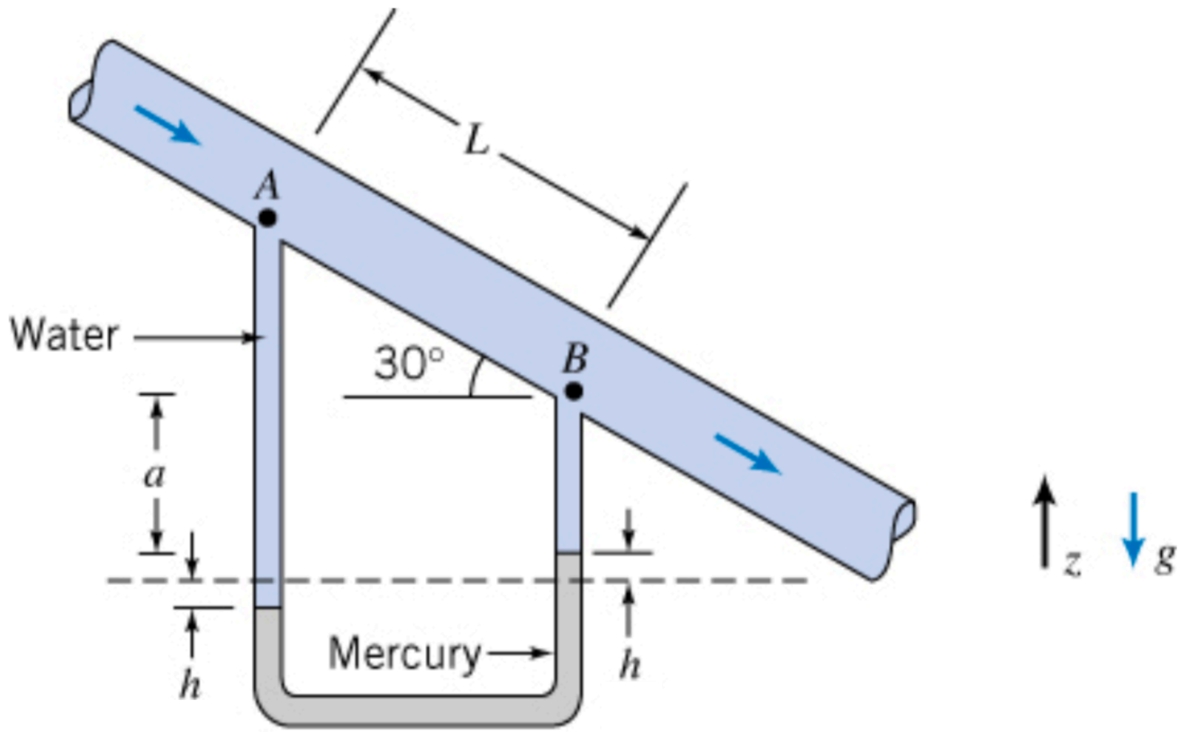
Enunciado: Água escoa no interior dos tubos A e B. Óleo lubrificante ($SG = 0,88$) está na parte superior do tubo em **U** invertido. Mercúrio ($SG = 13,6$) está na parte inferior dos dois tubos em **U**. Determine a diferença de pressão, $p_A - p_B$, em kPa. [Fox, McDonald e Pritchard, Ex. 3.3, 6a Edição]



$h_1 = 10''$
$h_2 = 3''$
$h_3 = 4''$
$h_4 = 4''$
$h_5 = 5''$
$h_6 = 8''$

Manometria: Exemplo 3

Enunciado: Água flui para baixo ao longo de um tubo inclinado de 30° em relação à horizontal conforme mostrado na figura. A diferença de pressão $p_A - p_B$ é causada parcialmente pela gravidade e parcialmente pelo atrito. Obtenha uma expressão algébrica para a diferença de pressão citada. Calcule esta diferença se $L = 5$ pés e $h = 6''$. [Fox, McDonald e Pritchard, 3.24, 6a Edição]



Manometria: exemplo 3

$$P_A + \rho_{H_2O}\, gL \,\mathrm{sen}\, 30° + \cancel{\rho_{H_2O}}\, ga + \rho_{H_2O}\, gh - \rho_{Hg}\, gh - \cancel{\rho_{H_2O}}\, ga = p_B$$

$$P_A - P_B = \rho_{Hg}\, gh - \rho_{H_2O}\, gh - \rho_{H_2O}\, gL \,\mathrm{sen}\, 30°$$

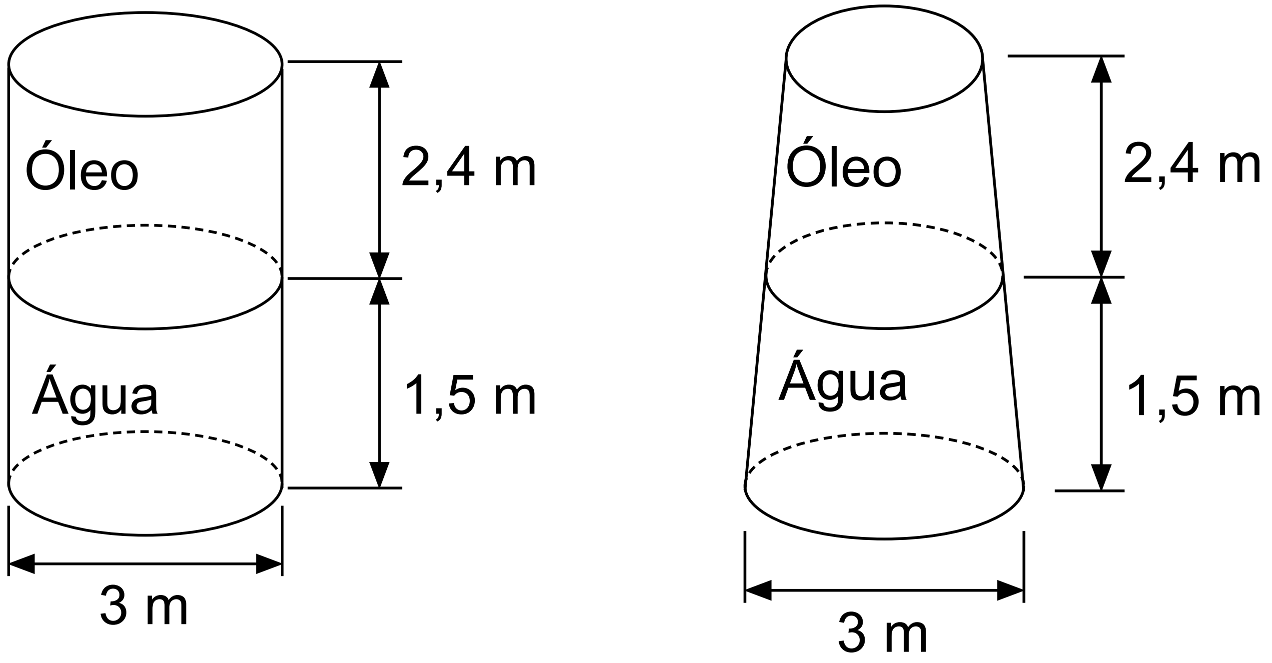
$$= SG_{Hg}\, \rho_{H_2O}\, gh - \rho_{H_2O}\, gh - \rho_{H_2O}\, gL \,\mathrm{sen}\, 30°$$

$$P_A - P_B = \rho_{H_2O}\, g\left[h(SG_{Hg} - 1) - L \,\mathrm{sen}\, 30°\right]$$

Da Tabela A.2, $SG_{Hg} = 13{,}55$.
Portanto,

$$P_A - P_B = 1{,}94\, \frac{\mathrm{slug}}{\mathrm{ft}^3} \times 32{,}2\, \frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}^2} \left[0{,}5\ \mathrm{ft}\,(13{,}55 - 1) - 5\mathrm{ft}\ \mathrm{sen}\ 30°\right] \times \frac{\mathrm{lbf} \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{ft} \cdot \mathrm{slug}}$$

$$P_A - P_B = 236\ \mathrm{lbf/ft}^2\ (1{,}64\ \mathrm{psi}) \xleftarrow{\quad P_A - P_B \quad}$$



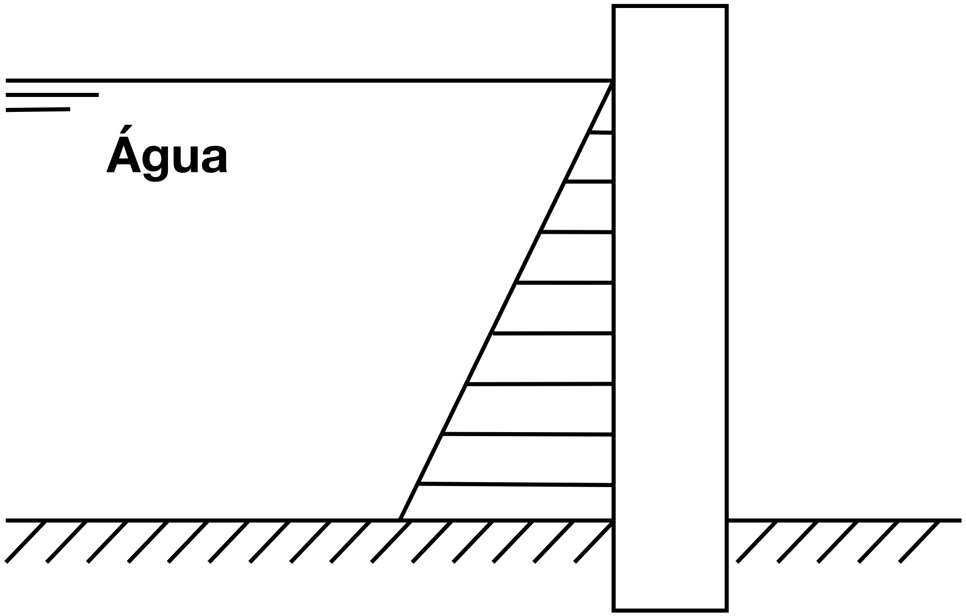
$\gamma_O = 8830\ N/m^3$

$\gamma_A = 9810\ N/m^3$

Força no fundo dos reservatórios:

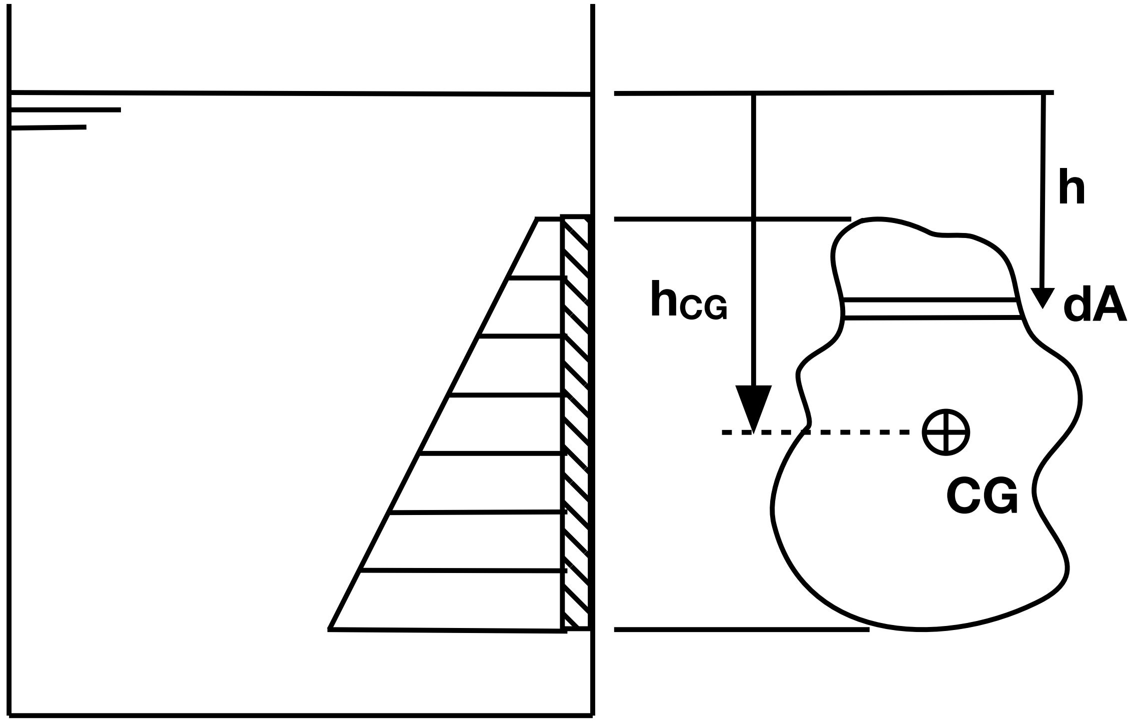
$$p_F = p_{atm} + \gamma_O \,.\, 2{,}4 + \gamma_A \,.\, 2{,}4 = p_{atm} + 35907\ Pa$$

$$F_F = p_F \,.\, A = 35907 \,.\, 7{,}07 = 253812\ N$$



Como calcular a força horizontal sobre a barragem nesse caso?

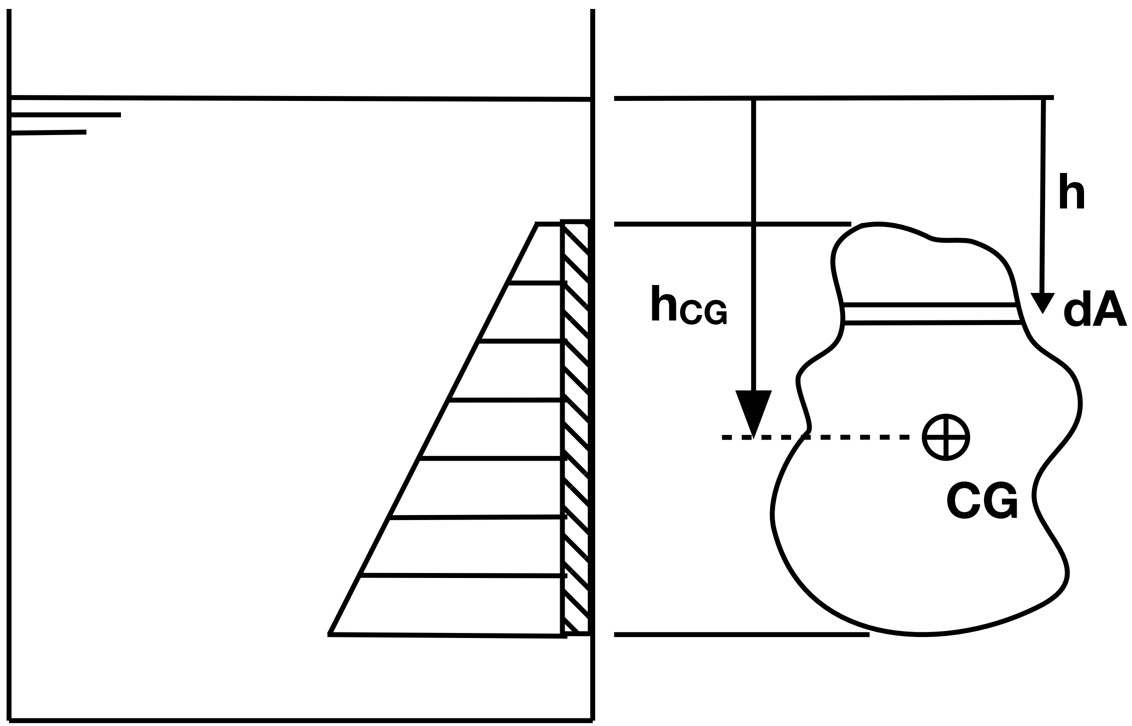
Força Hidrostática sobre Superfícies submersas



A força exercida pelo fluido sobre a fatia horizontal de área dA:

$$dF = pdA$$

$$\Rightarrow dF = \left(p_{atm} + \gamma h\right) dA$$



A força total exercida pelo fluido pode ser obtida por integração (fluido incompressível):

$$F = \int p\, dA = \int \left(p_{atm} + \gamma h \right) dA$$

$$F = p_{atm} A + \gamma \int h\, dA$$

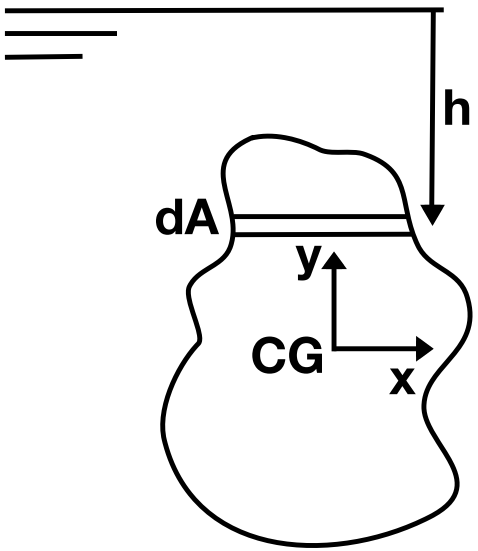
Força Hidrostática sobre Superfícies submersas

$$F = p_{atm} A + \gamma \int h dA$$

Lembrando da definição de centro geométrico: $$h_{CG} = \frac{1}{A} \int h \, dA$$

$$\Rightarrow F = p_{atm} A + \gamma h_{CG} A$$

Qual o ponto de aplicação desta força?



Para responder a esta pergunta, vamos calcular o momento em relação ao eixo x provocado pelas forças de pressão em relação ao CG:

$$dM = p \cdot dA \cdot y$$

$$M = \int p \cdot y dA$$

$$M = \int \left(p_{atm} + \gamma h \right) y dA$$

1ª integral: $\int p_{atm} y dA = p_{atm} \int y \, dA = 0$ definição de centro geométrico

2ª integral: $\int \gamma h y \, dA = \gamma \int \left(h_{CG} - y \right) y \, dA$

$$M = \int \left(p_{atm} + \gamma h \right) y dA$$

1ª integral: $\int p_{atm} y dA = 0$

2ª integral: $\int \gamma h y \, dA = \gamma \int \left(h_{CG} - y \right) y \, dA$

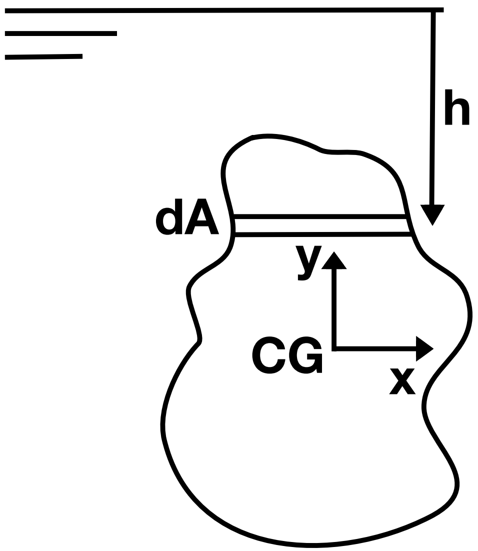
$$\gamma \int \left(h_{CG} - y \right) y \, dA = \gamma h_{CG} \underbrace{\cancel{\int y \, dA}}_{0} - \gamma \int y^2 \, dA$$

Lembrando da definição de momento de inércia em relação ao eixo x: $I_{xx} = \int y^2 \, dA$

$$\Rightarrow \gamma \int y^2 \, dA = \gamma I_{xx}$$

$$M = \int \left(p_{atm} + \gamma h \right) y dA = -\gamma I_{xx}$$

Qual o ponto de aplicação desta força?



A força está aplicada no chamado centro de pressão (CP), cujas coordenadas x_{CP} e y_{CP} devem ser calculadas:

$$F y_{CP} = -\gamma I_{xx}$$

$$y_{CP} = -\frac{\gamma I_{xx}}{F} \quad \text{com} \quad F = p_{CG} A = \gamma h_{CG} A$$

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx}}{h_{CG} A}$$

Por analogia para o eixo y calculamos x_{CP}:

$$x_{CP} = -\frac{I_{xy}}{h_{CG} A}$$

Sendo I_{xy} o produto de inércia.

Comentários

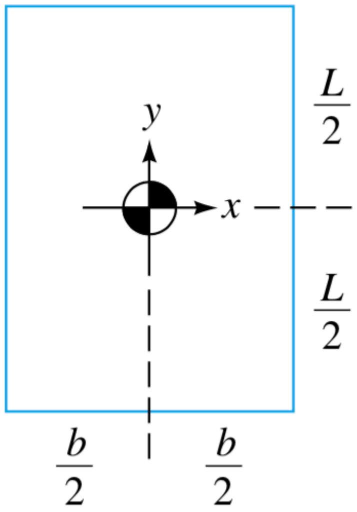
1. O momento de inércia (I_{xx}) e o produto de inércia (I_{xy}) são propriedades geométricas da placa, e encontram-se tabelados;
2. O momento de inércia (I_{xx}) é, <u>sempre</u>, maior que zero. Assim, o sinal negativo na equação de y_{CP} indica que o centro de pressão se localiza abaixo do centro de gravidade ($y_{CP} < 0$);
3. Quanto mais fundo estiver o CG da comporta, mais o centro de pressão se aproxima do centro de gravidade;
4. O produto de inércia (I_{xy}) pode ser negativo ou positivo, o que definirá a coordenada x_{CP} com relação ao quadrante (3º quadrante, $x_{CP} < 0$ ou 4º quadrante, $x_{CP} > 0$);
5. I_{xy} pode ser igual a zero, no caso da figura ser simétrica com relação ao eixo y. Neste caso, $x_{CP} = 0$, e o centro de pressão fica diretamente abaixo do centróide, sobre o eixo y.

Caso a superfície não seja vertical, mas inclinada de um ângulo θ < 90º, apenas se altera o cálculo das coordenadas do centro de pressão:

$$x_{CP} = -\frac{I_{xy} \cdot sen\theta}{h_{CG} A}$$

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx} \cdot sen\theta}{h_{CG} A}$$

Momentos e Produtos de Inércia

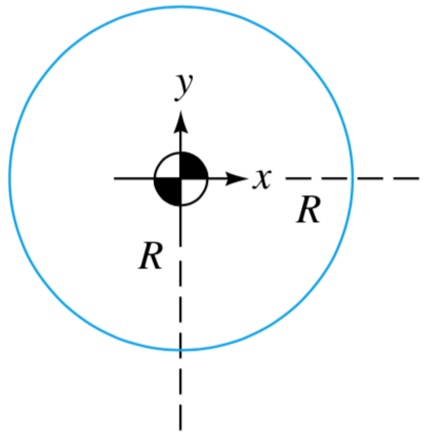


$$A = bL$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

(a)

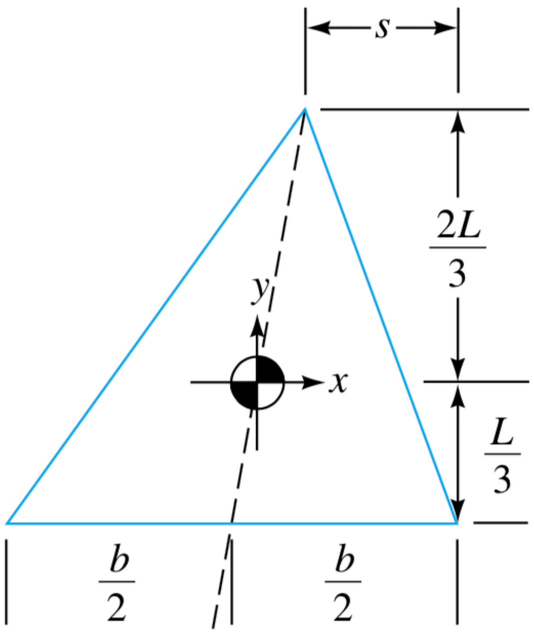


$$A = \pi R^2$$

$$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0$$

(b)

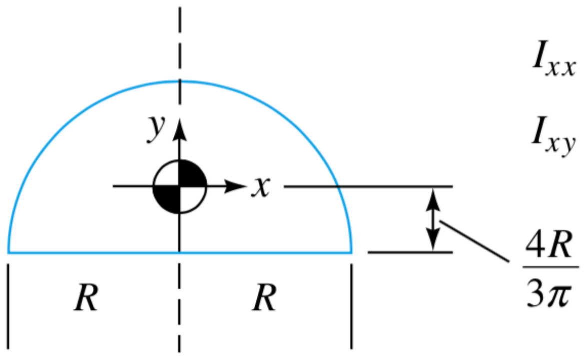


$$A = \frac{bL}{2}$$

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72}$$

(c)



$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

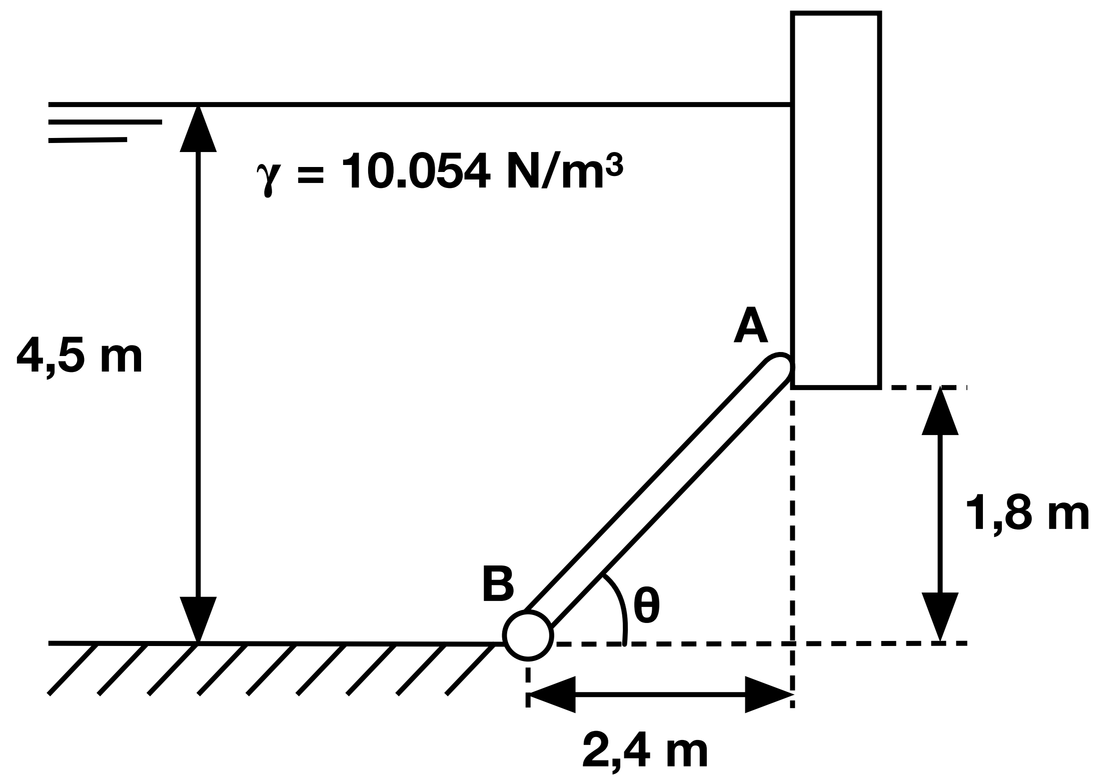
$$I_{xx} = 0.10976R^4$$

$$I_{xy} = 0$$

(d)

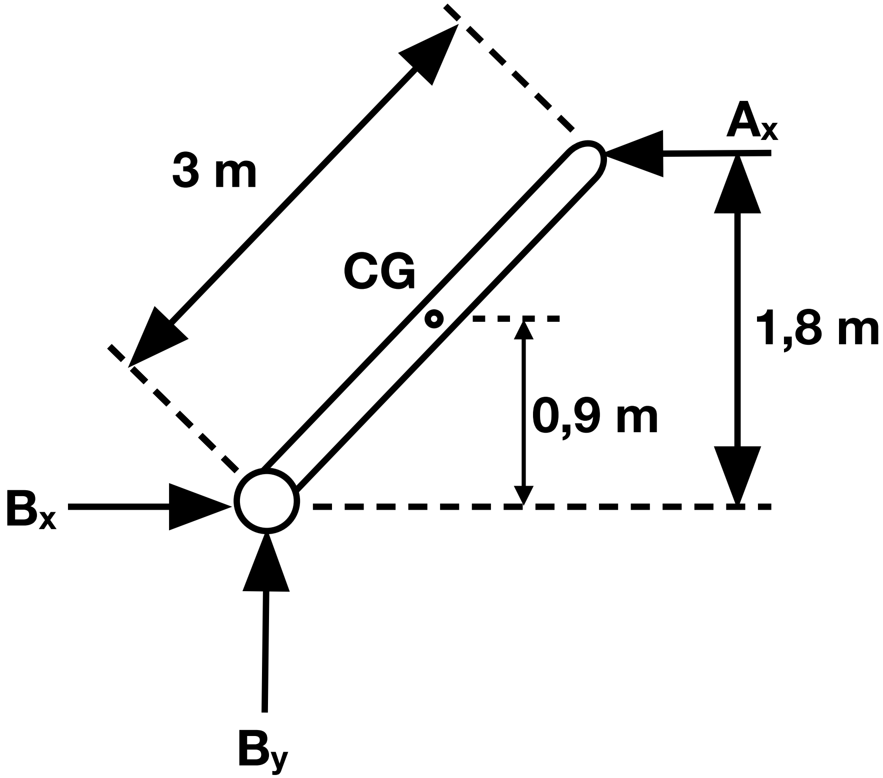
Forças em superfícies submersas: Exemplo 1

A compota tem 1,5 m de largura, está articulada no ponto B e repousa contra uma parede liso no ponto A. Calcule: a) a força sobre a comporta devida à pressão da água do mar, b) a força horizontal exercida pela parede no ponto A, e c) as reações a articulação B.



Forças em superfícies submersas: Exemplo 1

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo



1º Passo, determinar h_{CG}:

$h_{CG} = 4,5 – 0,9 = 3,6$ m

2º Passo, determinar p_{CG}:

$p_{CG} = \gamma h_{CG} = 10054.3,6 = 36194$ Pa

3º Passo, determinar F (a):

$F = p_{CG}.A = 36194.(3.1,5) = 162873$ Pa

4º Passo, determinar I_{xx} e I_{xy}:

$$I_{xx} = \frac{b \cdot L^3}{12} = \frac{1,5.3^3}{12} = 3,375m^4$$

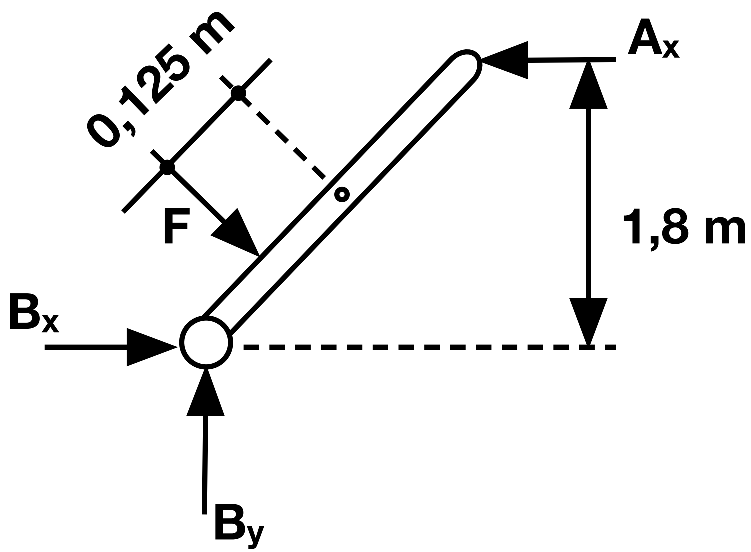
$I_{xy} = 0$

5º Passo, determinar x_{CP} e y_{CP}:

$$x_{cp} = 0$$

$$y_{cp} = -\frac{I_{xx}.\sin\theta}{h_{co} \cdot A} = \frac{-3,375.0,6}{3,6 \cdot 415} = -0,125m$$

(b) Força horizontal em A:



$$\sum M_B = 0$$

$$A_x.1{,}8 - F.(1{,}5 - 0{,}125) = 0$$

$$A_x = 124417 \text{ N}$$

(c) Reações em B:

$$\sum F_x = 0$$

$$-A_x + F.\text{sen}\theta + B_x = 0$$

$$B_x = 26.693 \text{ N}$$

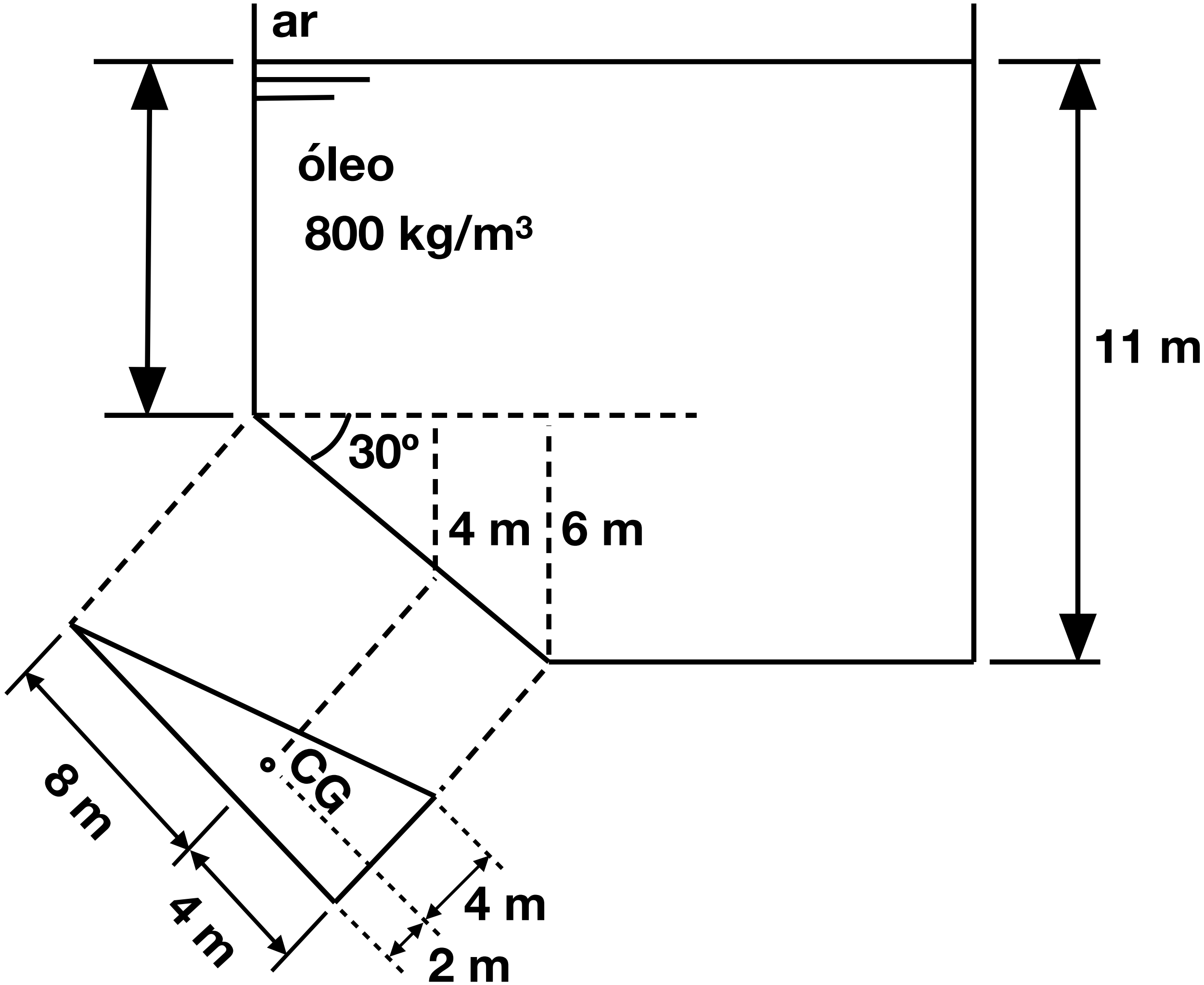
$$\sum F_y = 0$$

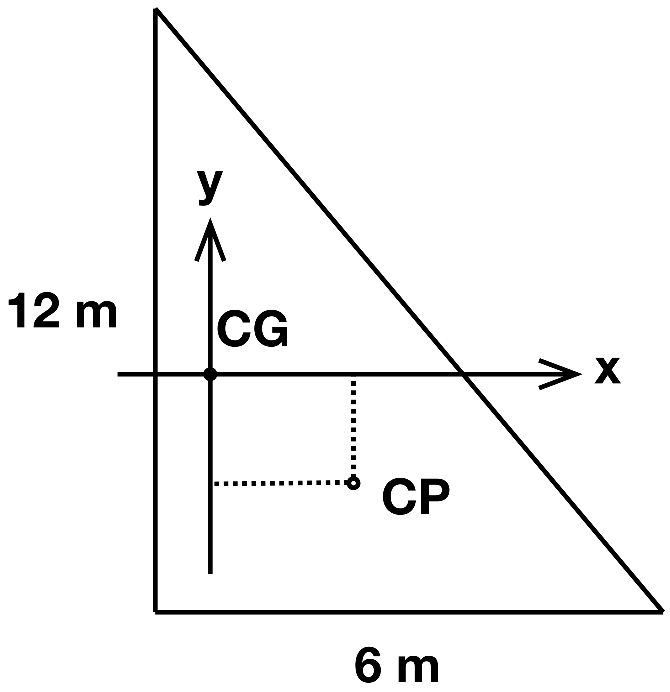
$$B_y - F.\cos\theta = 0$$

$$B_y = 130.300 \text{ N}$$

Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

Um tanque de óleo tem um painel em forma de triângulo reto próximo ao fundo. Calcule a força resultante do fluido sobre o painel e o ponto de aplicação da força.





1º Passo, determinar h_{CG}:

$h_{CG} = 5 + 4 = 9$ m

2º Passo, determinar p_{CG}:

$p_{CG} = \gamma h_{CG} = 800.9{,}81.9 = 70.632$ Pa

3º Passo, determinar F:

$F = p_{CG}.A = 70632.36 = 2.542.752$ Pa

4º Passo, determinar I_{xx} e I_{xy}:

$$I_{xx} = \frac{b \cdot L^3}{36} = \frac{6 \cdot 12^3}{36} = 288 m^4$$

$$I_{xy} = \frac{b \cdot (b - 2s) L^2}{72} = -\frac{b^2 \cdot L^2}{72} = -\frac{6^2 \cdot 12^2}{72} = -72 m^4 \qquad s = b$$

5º Passo, determinar x_{CP} e y_{CP}:

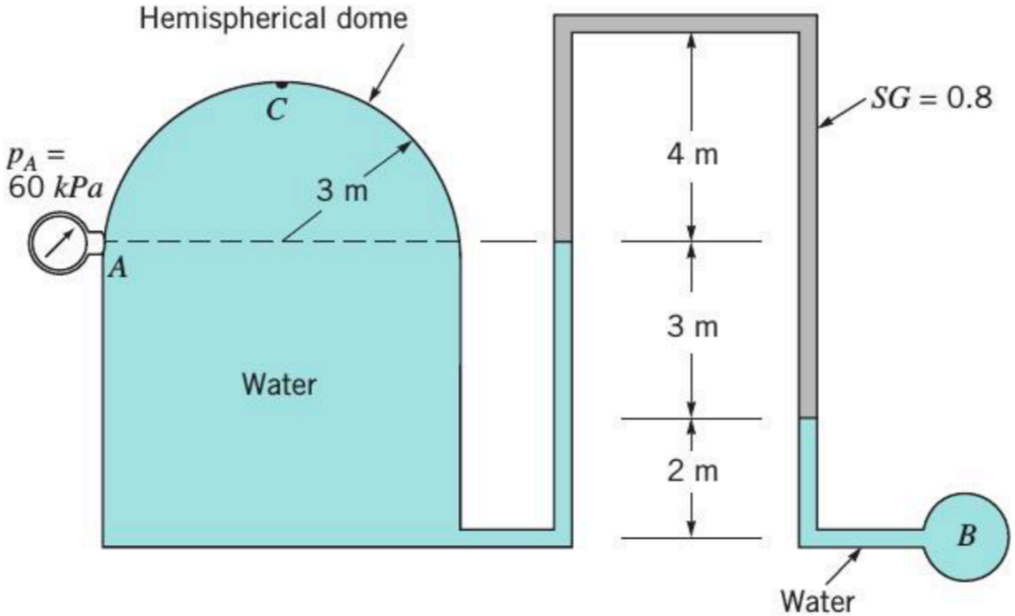
$$x_{CP} = -\frac{I_{xy} \cdot sen\theta}{h_{CG} \cdot A} = -\frac{-72 \cdot sen30^o}{9 \cdot 36} = +0{,}111 m$$

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx} \cdot sen\theta}{h_{CG} \cdot A} = -\frac{288 \cdot sen30^o}{9 \cdot 36} = -0{,}444 m$$

Exercício proposto 1

Enunciado: Um tanque cilíndrico fechado preenchido com água tem um domo hemisférico e está conectado a uma tubulação invertida conforme mostra a figura abaixo. O líquido na parte superior da tubulação tem densidade relativa de 0,8. As demais partes do sistema estão preenchidas com água. Se a leitura do manômetro é de 60 kPa, determine: (a) a pressão no tubo B; and (b) a pressão no ponto C em mmHg. [Munson, 2.29 , 6a Edição]

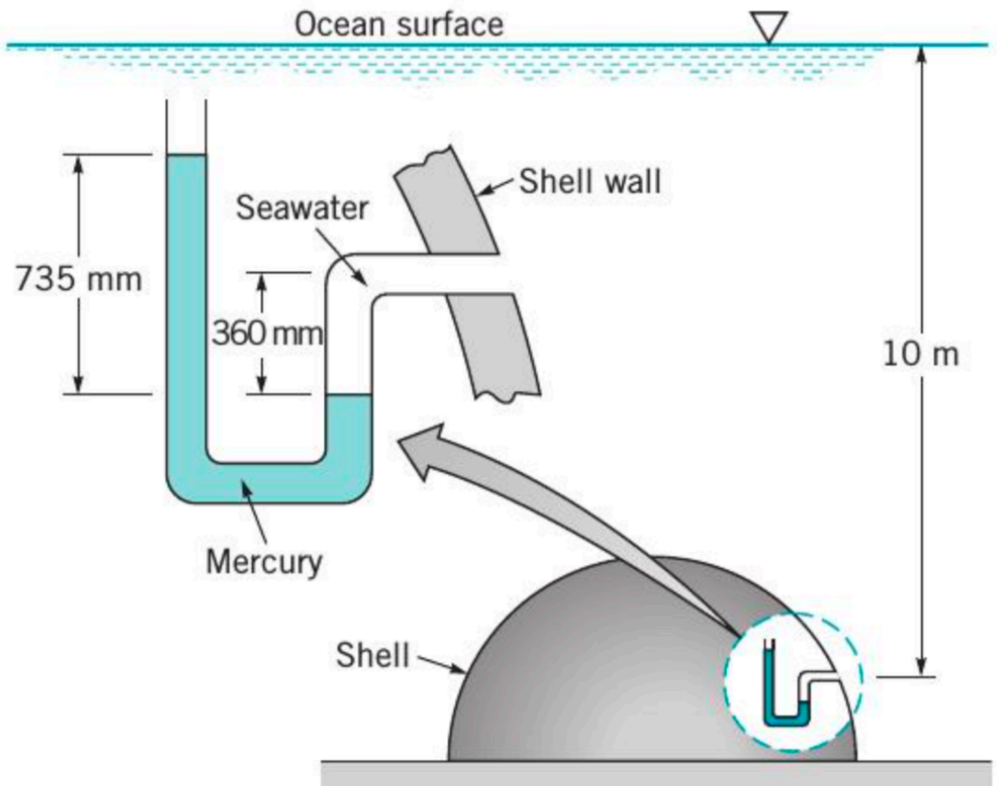
Resp.: (a) 103 kPa; (b) 230 mmHg.



Exercício proposto 2

Enunciado: A figura abaixo mostra uma casca hemisférica cheia de ar que está presa no fundo do oceano (profundidade igual a 10 m). Um barômetro localizado dentro da casca hemisférica apresenta uma coluna de mercúrio com altura de 765 mm e o manômetro em U mostrado na figura indica uma leitura diferencial de 735 mm de mercúrio. Utilizando estes dados, determine qual o valor da pressão atmosférica na superfície livre do oceano. [Munson, 2.38 , 4a Edição]

Resp.: 94,9 kPa.

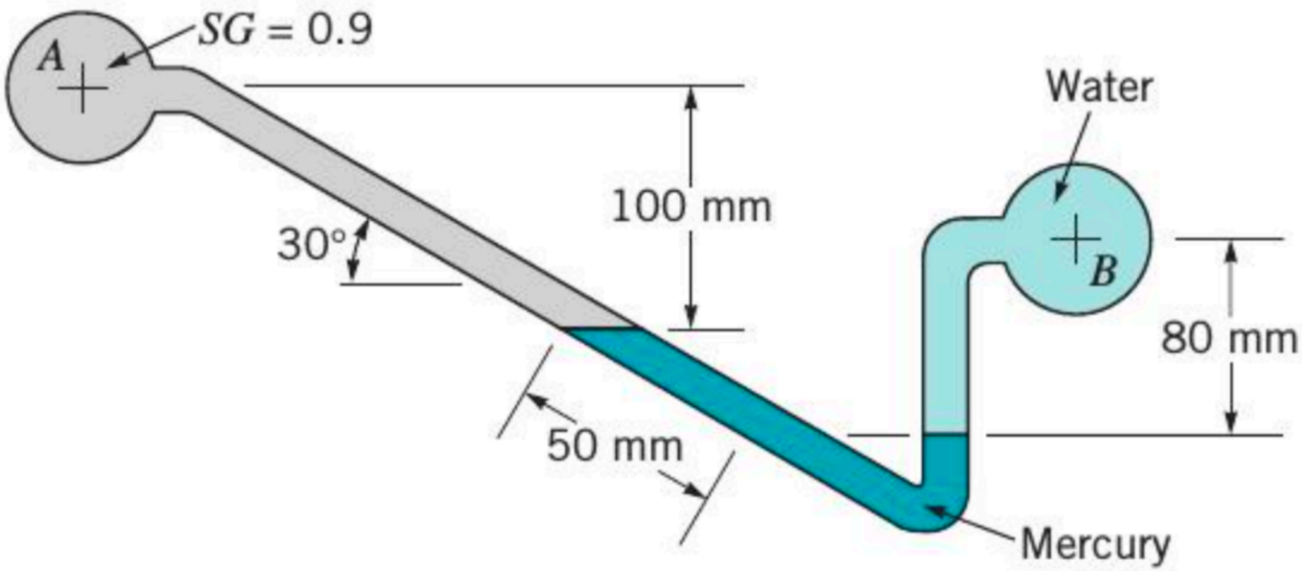


Exercício proposto 3

Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo

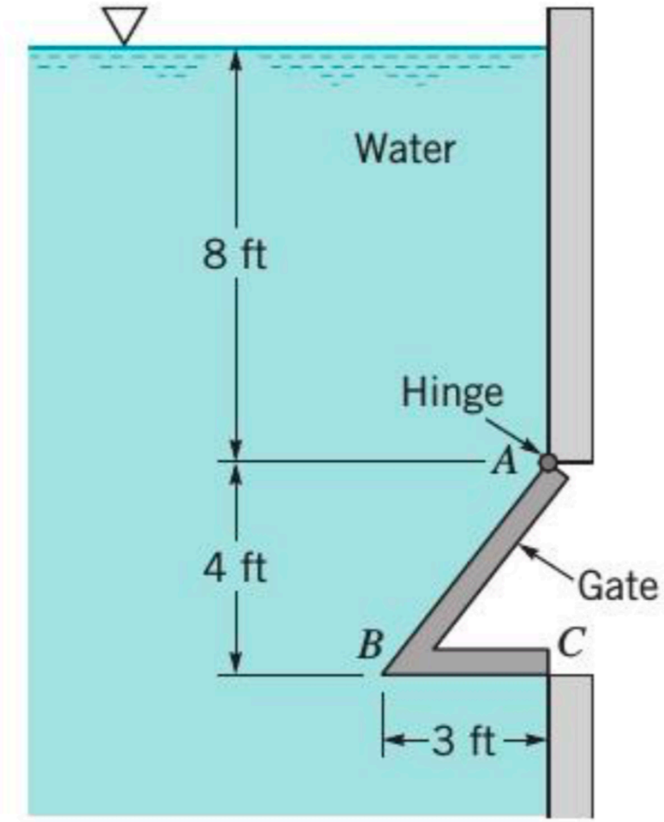
Enunciado: Determine a nova leirura de pressão diferencial no mercúrio ao longo do tubo inclinado mostrado na figura abaixo se a pressão em A for diminuída de 10 kPa e a pressão em B permanecer inalterada. O fluido em A tem densidade relativa de 0.9 e o fluido em B é água. [Munson, 2.45 , 6a Edição]

Resp.: 0,212 m.



Exercício proposto 4

Enunciado: Uma comporta com seção transversal mostrada na figura ao lado tem 5 pés de largura e 4 pés de altura. A comporta pesa 500 lb e seu centro de gravidade está a 1 pé à esquerda de AC e 2 pés acima de BC. Determine a reação na comporta em C. OBS: 1 pé = 0,3048 m; 1 lbf = 4,4482216 N.
[Munson, 2.67, 6a Edição]
Resp.: 28.16 kN.



Exercício proposto 5

Enunciado: A figura mostra o esboço de uma comporta homogênea (10 pés de largura) que pesa 200 lbf e está articulada em A. Note que a comporta é mantida na posição mostrada na figura através de uma barra que apresenta comprimento de 12 pés. Quando o ponto inferior da barra é movimentado para a direita, o nível de água permanece no topo da comporta. A linha de ação da força que a barra exerce sobre a comporta coincide com o eixo da barra. (a) Faça um gráfico do módulo da força exercida pela pela barra em função do ângulo da comporta para *theta* entre 0 e 90°; (b) Repita seus cálculos admitindo que o peso da comporta é desprezível. Analise seus resultados para $\theta \to 0$. OBS: 1 pé = 0,3048 m; 1 lbf = 4,4482216 N. [Munson, 2.60 , 4a Edição]