

PME 3222 – MEC FLU para Engenharia Civil

Aula # 2.1

ANÁLISE DIMENSIONAL E SEMELHANÇA

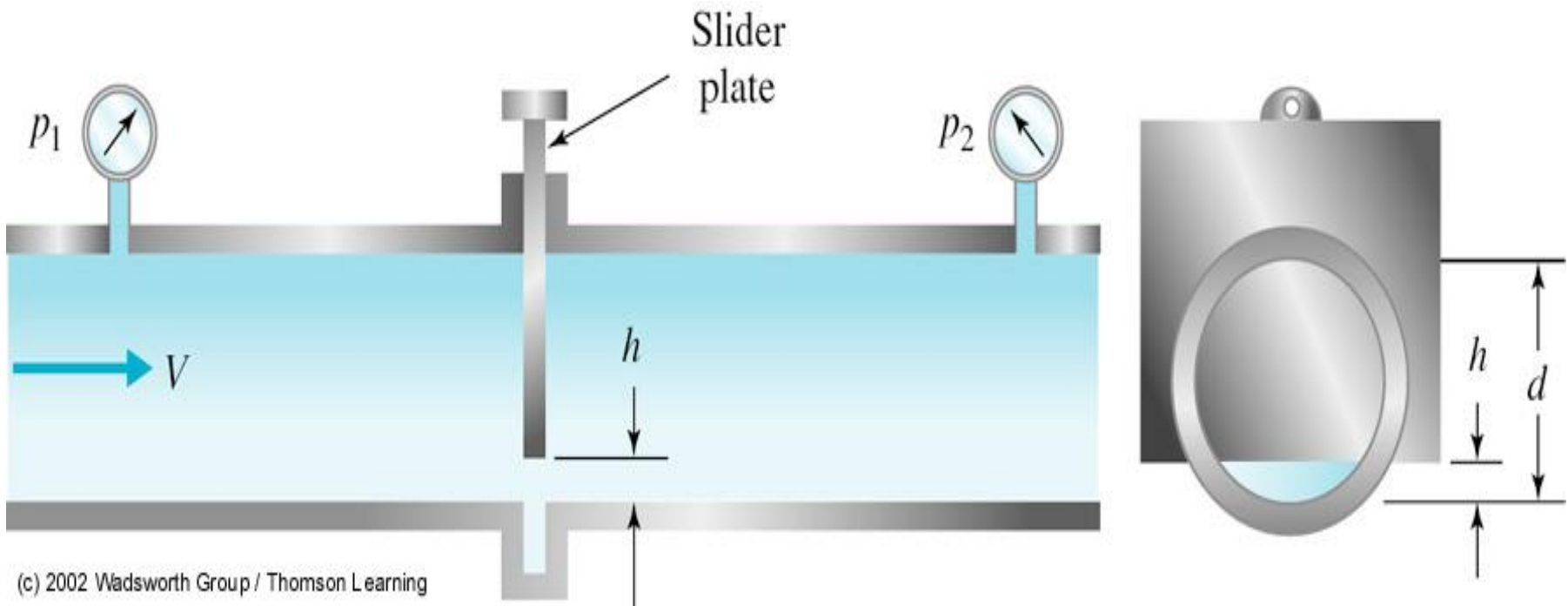
Grandezas, dimensões, unidades. Análise Dimensional. Teorema de Buckingham (π s). Principais Grupos Adimensionais. Semelhança. Referências: Cap. 7- Munson e Apostila nº3.

Grandezas em MECÂNICA DOS FLUIDOS

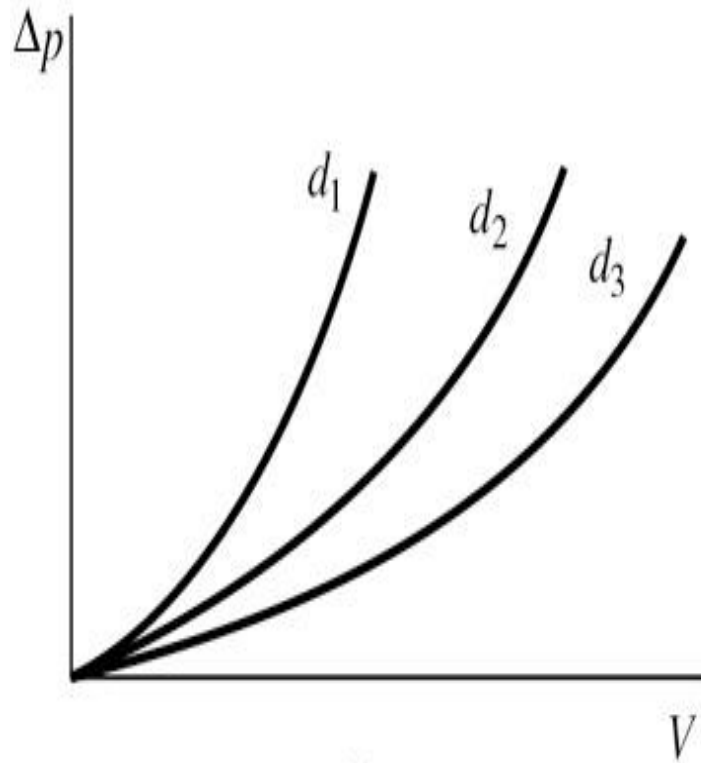
Equações, dimensões, unidades e símbolos

GRANDEZA		EQUAÇÃO	DIMENSÃO	UNIDADE	SÍMBOLO
Geométrica	Ângulo	Arco/raio	$[M^0L^0T^0]$	radiano	rad
	Comprimento	Medida linear	$[L^1]$	metro	m
	Área	comprimentoXcomprimento	$[L^2]$	metro quadrado	m ²
	Volume	áreaXcomprimento	$[L^3]$	metro cúbico	m ³
Cinemática	Tempo		$[T^1]$	segundo	s
	Velocidade linear	Distância/tempo	$[L^1T^{-1}]$	metro por segundo	m.s ⁻¹
	Velocidade angular	Ângulo/tempo	$[T^{-1}]$	radianos por segundo	rad.s ⁻¹
	Aceleração angular	Velocidade angular/tempo	$[T^{-2}]$	radianos por segundo ao quadrado	rad.s ⁻²
	Vazão em volume	Volume/tempo	$[L^3.T^{-1}]$	metros cúbicos por segundo	m ³ .s ⁻¹

Dinâmica	Massa	Força/aceleração	[M ¹]	quilograma	kg
	Força	MassaXaceleração	[M ¹ L ¹ T ⁻²]	Newton=quilograma.metro por segundo	N
	Peso	MassaXaceleração da gravidade	[M ¹ L ¹ T ⁻²]	Newton	N
	Massa específica	Massa/volume	[M ¹ L ⁻³]	quilogramas por metro cúbico	Kg.m ⁻³
	Peso específico	Peso/volume	[M ¹ L ⁻² T ⁻²]	Newtons por metro cúbico	N.m ⁻³
	Densidade relativa	Massa específica/massa específica da água	[M ⁰ L ⁰ T ⁰]	relação numérica	-----
	Pressão	Força/área	[M ¹ L ⁻¹ T ⁻²]	Newton por metro quadrado=Pascal	N.m ⁻² =Pa
	Tensão	Força/área	[M ¹ L ⁻¹ T ⁻²]	Newton por metro quadrado	N.m ⁻²
	Módulo de elasticidade	Tensão/deformação unitária	[M ¹ L ⁻¹ T ⁻²]	Newton por metro quadrado	N.m ⁻²
	Quantidade de movimento	ForçaXtempo	[M ¹ L ¹ T ⁻¹]	Newton segundo	N.s
	Trabalho, Energia	ForçaXdistância	[M ¹ L ² T ⁻²]	Newton.metro=Joule	N.m=J
	Potência	Trabalho/tempo	[M ¹ L ² T ⁻³]	Joule por segundo=Watt	J.s ⁻¹ =W
	Momento da força	ForçaXdistância	[M ¹ L ² T ⁻²]	Newton.metro	N.m
	Viscosidade dinâmica	Tensão de cisalhamento/gradiente de velocidade	[M ¹ L ¹ T ⁻¹]	quilogramas por metro.segundo	Kg.m ⁻¹ s ⁻¹ =μ
	Viscosidade cinemática	Viscosidade dinâmica/massa específica	[L ² T ⁻¹]	metro quadrado por segundo	m ² .s ⁻¹
	Tensão superficial	Força/comprimento	[M ¹ T ⁻²]	Newton por metro	N.m ⁻¹

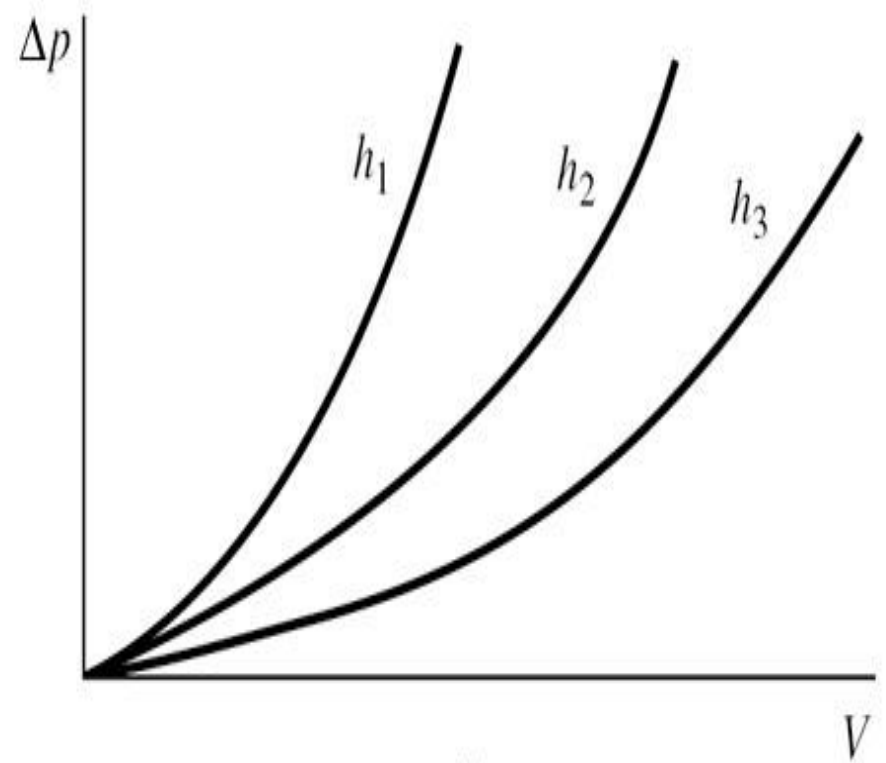


Flow around a slider valve.



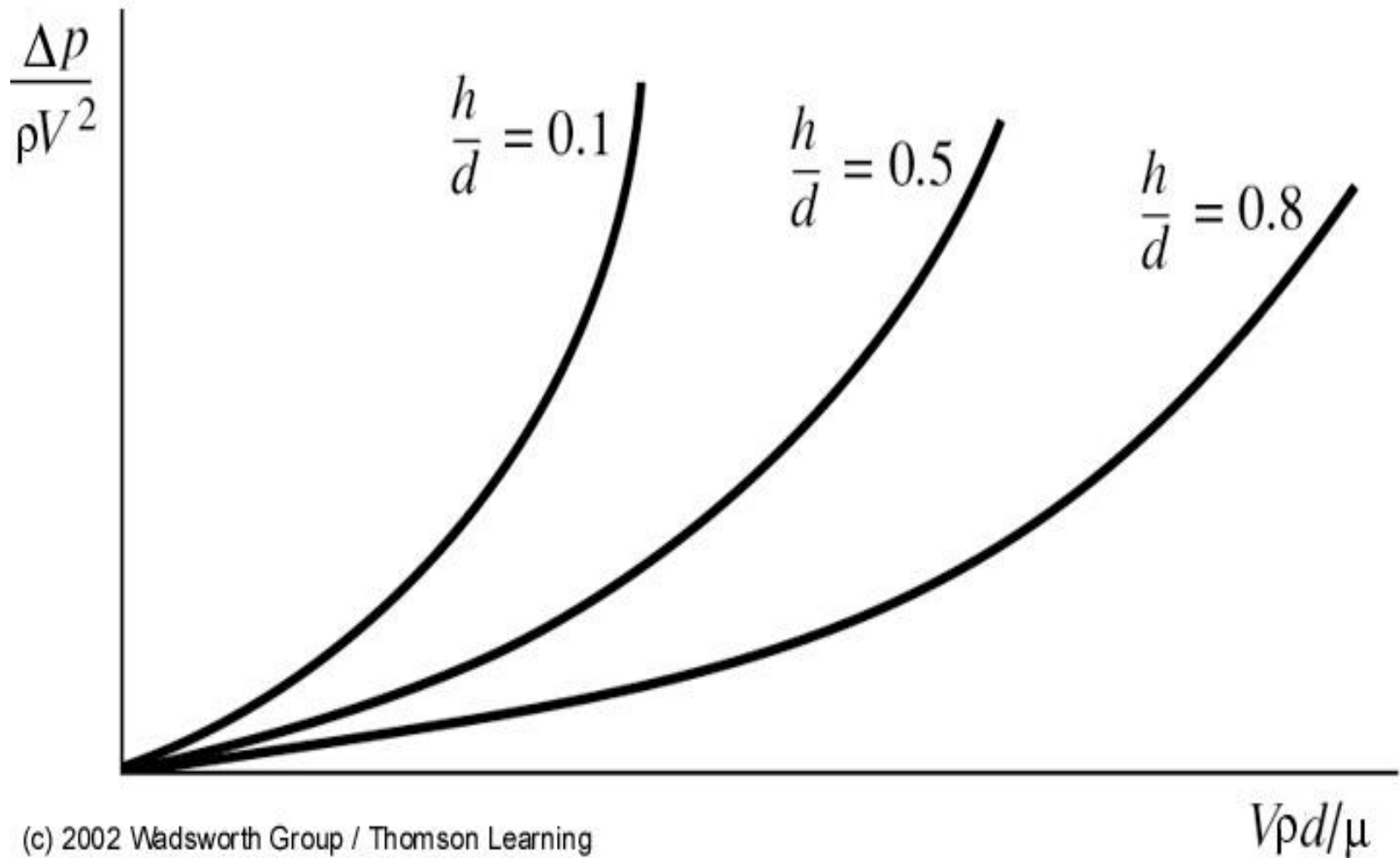
(a)

(c) 2002 Wadsworth Group / Thomson Learning



(b)

Pressure drop versus velocity curves: (a) p, μ, h fixed; (b) p, μ, d fixed.



(c) 2002 Wadsworth Group / Thomson Learning

Dimensionless pressure drop versus dimensionless velocity and dimensionless opening.

Schematic pipe flow

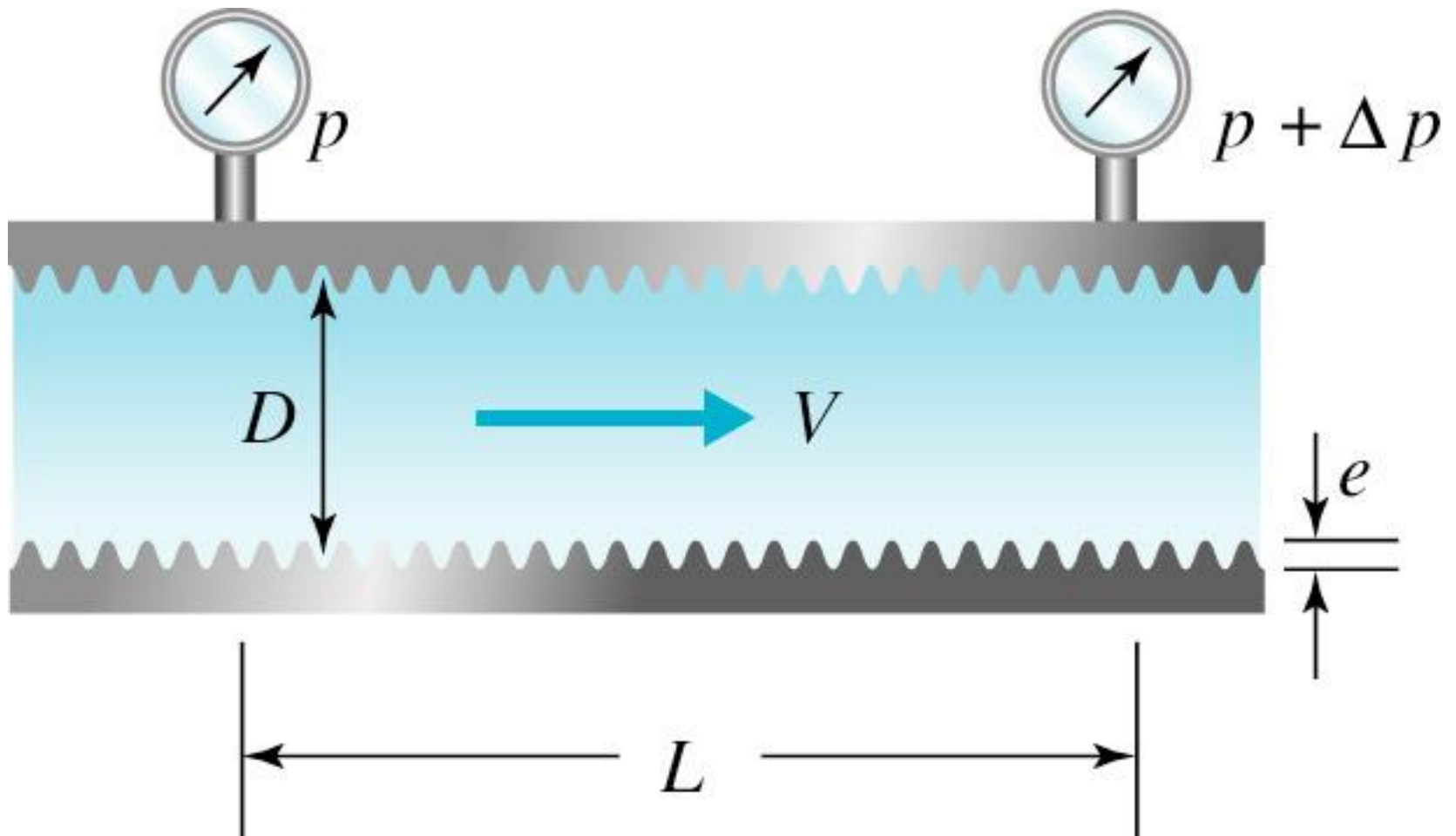
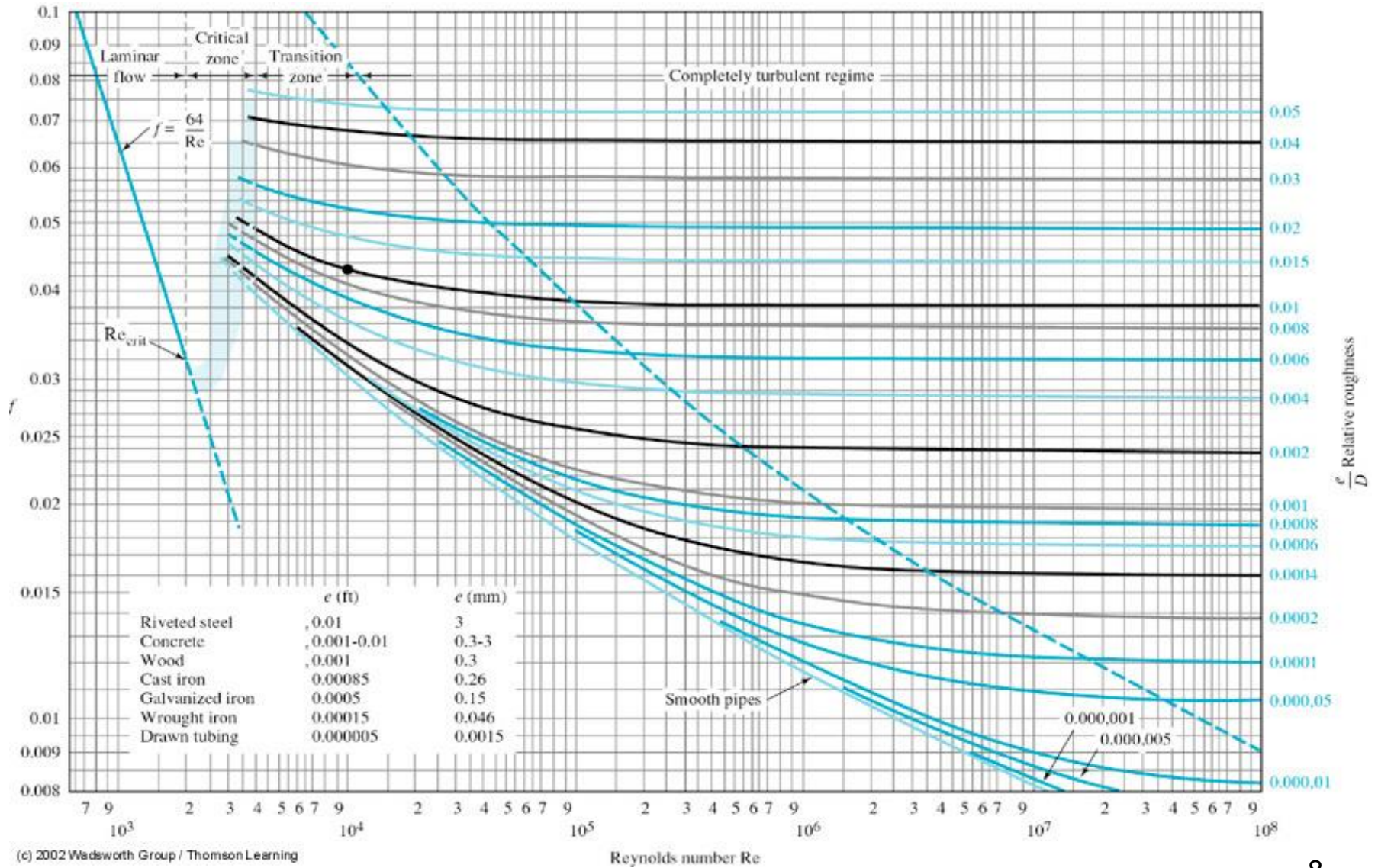
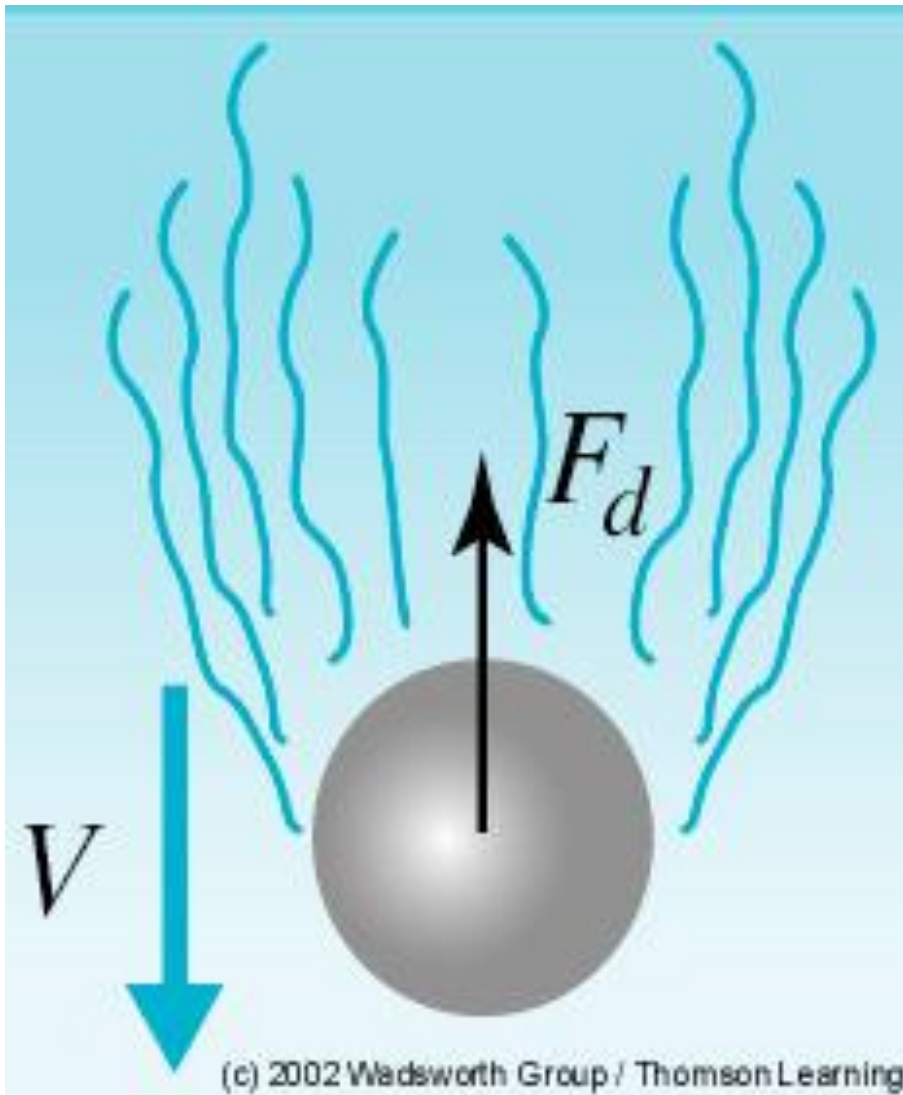


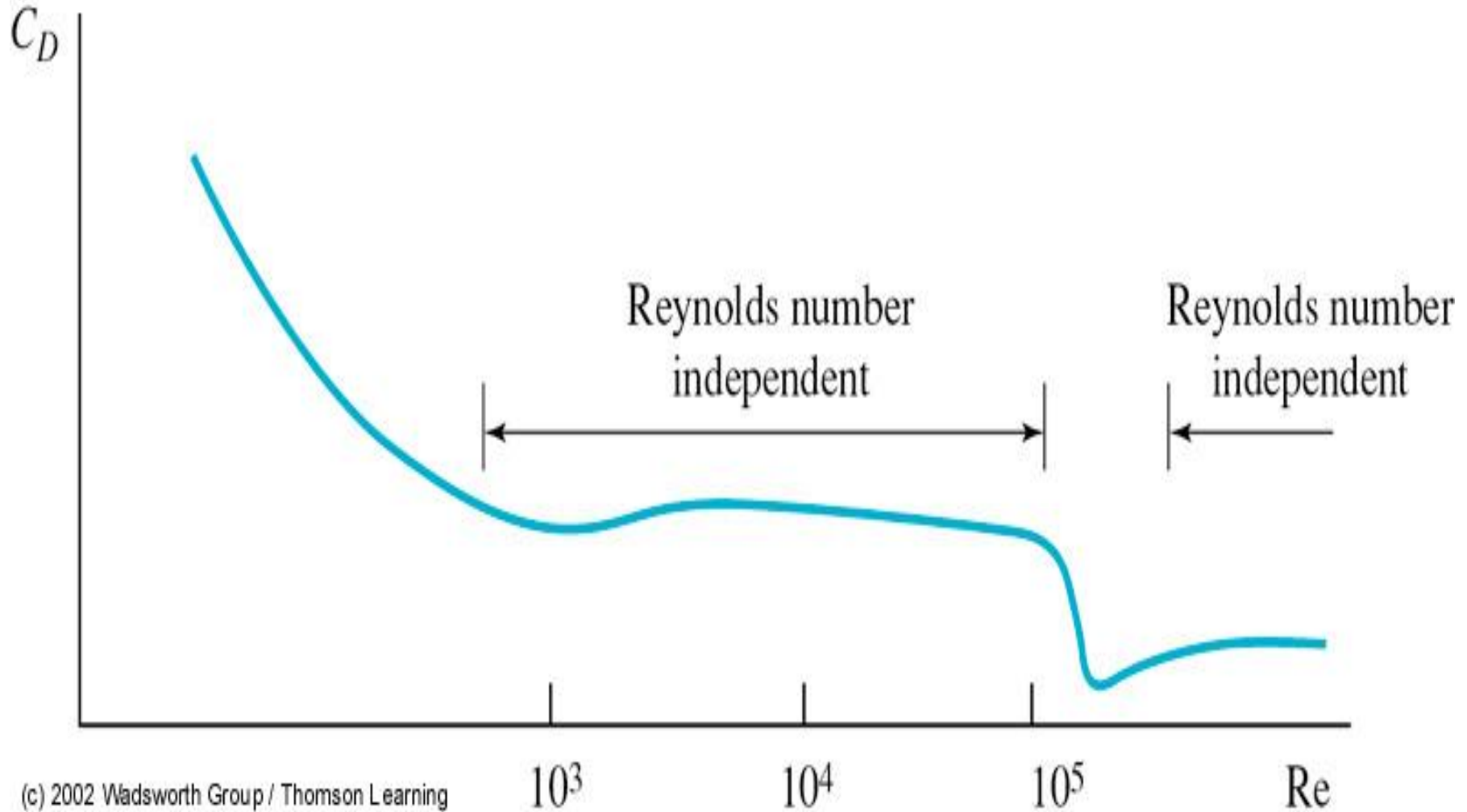
Diagrama de Moody (de L.F. Moody, *Trans. ASME*, Vol.66,1944.)





Ball drop

Drag coefficient versus Reynolds number.



(c) 2002 Wadsworth Group / Thomson Learning



Scale model of the large buildings in a city. Air flow around the buildings is studied. The roughening elements on the floor generate the desired wall turbulence. (fonte: Fluid Mechanics and Diffusion Laboratory, Colorado University.)



**Model of the
Bonneville lock
and dam on the
Columbia River.
(fonte: U.S. Army
Corps of
Engineers
Waterways
Experiment
Station)**

Itens 7.1, 7.2, 7.3, 7.6, 7.8 e 7.9 - Munson

- Análise dimensional
- Teorema de Buckingham (adimensionais π)
- Dedução de adimensionais
- Grupos adimensionais usuais e significados físicos
- Modelos e Semelhança

CONCEITOS:

- GRANDEZA, UNIDADE E MEDIDA
- ESTRUTURA DAS TEORIAS FÍSICAS (ideia, lei, fórmula)
- ENUNCIADO DAS LEIS >
- GRANDEZAS FUNDAMENTAIS E GRANDEZAS DERIVADAS
- EQUAÇÃO DIMENSIONAL Exemplo

• TEOREMA DE BUCKINGHAM

- DEDUÇÃO DE NÚMEROS ADIMENSIONAIS Π Exemplo
- INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS ADIMENSIONAIS
- GRUPOS ADIMENSIONAIS USUAIS EM MEC FLU

• MODELOS E SEMELHANÇA

- EXERCÍCIOS;
 - MUNSON – itens 7.6, 7.12, 7.14, 7.16, 7.18, 7.21 e 7.25
 - COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS, Capítulo 3,

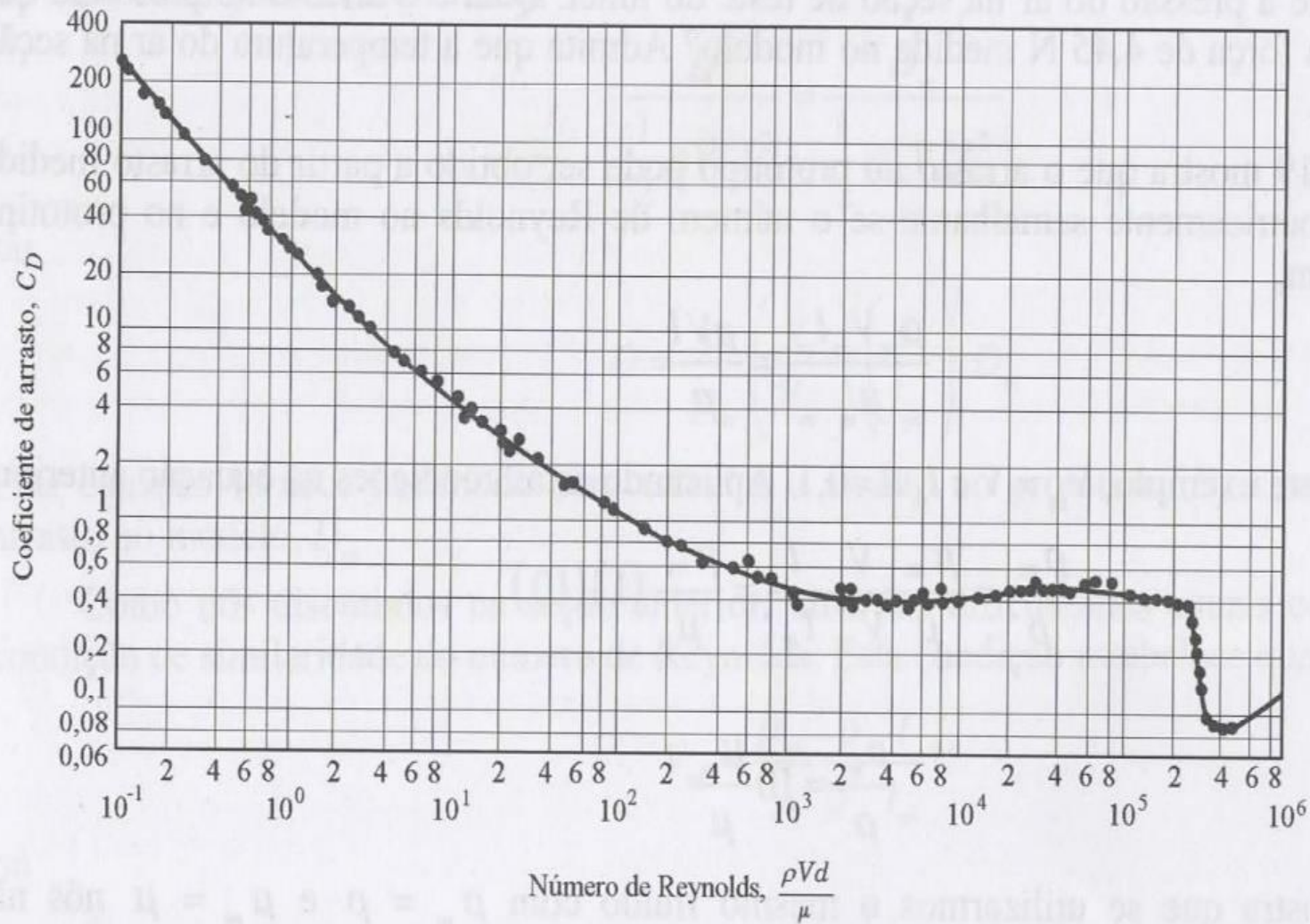


Figura 7.7 O efeito do número de Reynolds no coeficiente de arrasto de uma esfera. O coeficiente de arrasto é definido por $C_D = D/(1/2)A\rho V^2$, onde A é a área projetada da esfera (igual a $\pi d^2/4$) (Dados obtidos na Ref. 16, utilização autorizada).

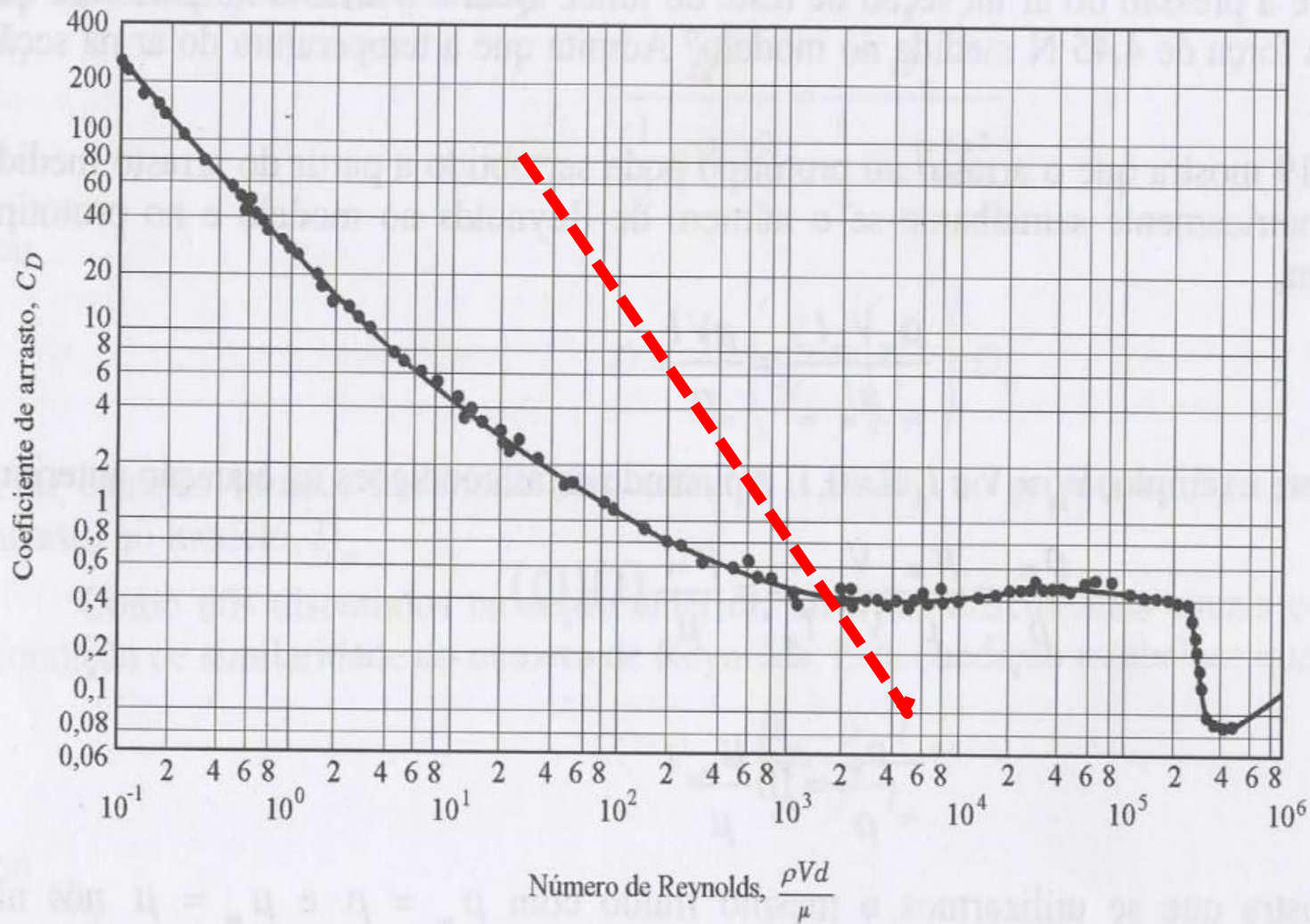


Figura 7.7 O efeito do número de Reynolds no coeficiente de arrasto de uma esfera. O coeficiente de arrasto é definido por $C_D = D/(1/2)A\rho V^2$, onde A é a área projetada da esfera (igual a $\pi d^2/4$) (Dados obtidos na Ref. 16, utilização autorizada).

ANÁLISE DIMENSIONAL E SEMELHANÇA

CONCEITOS

1.) Grandeza, medida e unidade

- comprimento da sala $L = 10\text{m}$
 $L = 1000\text{cm}$

L	10	m
\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow
Grandeza	medida	unidade

$$\left. \begin{array}{l} (A) = a U_A \\ (A) = a' U'_A \end{array} \right\} \boxed{\frac{a}{a'} = \frac{U'_A}{U_A} = [A]} \quad \begin{array}{l} \text{notação de} \\ \text{MAXWELL} \end{array}$$

ou seja, medida inversamente proporcional às unidades

2.) Estrutura das Teorias Físicas

- ideias primitivas
 - leis fundamentais
 - fórmulas de definições
- } \rightarrow leis derivadas

ex. lei fundamental: tensão de cisalhamento

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

$$p = \rho g h$$

fórmulas de definições $v = \frac{\mu}{\rho}$

3.) Leis Fundamentais

As leis fundamentais podem ser expressas de forma monomial

$$(Y) \sim (Y)^{\alpha_1} \cdot (Y)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (Y)^{\alpha_m} \quad \text{Grandezas}$$

$$x_1 = \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{array} \right) x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m} \quad \text{medida}$$

↳ constante de proporcionalidade para igualdade que pode ser:

- específica: exemplo μ (viscosidade cinemática)
- universal: exemplo g (aceleração da gravidade)

4.) Grandezas fundamentais e grandezas derivadas

x_1, x_2, \dots, x_m escolher grandezas fundamentais de tal forma que as restantes possam ser escritas como combinações.

não grandezas fundamentais:

$$\frac{\alpha_1}{x_1} \cdot \frac{\alpha_2}{x_2} \cdot \frac{\alpha_3}{x_3} = 1, \text{ somente se } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

ou seja, não linearmente independentes

base: conjunto de grandezas que exprimem:

- geométrica : uma grandeza fundamental
- cinemática : duas grandezas fundamentais
- dinâmica : três grandezas fundamentais

base \equiv sistema de unidades coerentes

normalmente M, L, T ou F, L, T.

5. Equações dimensionais

$$y = c \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

$$y' = c \cdot x_1^{\alpha_1'} \cdot x_2^{\alpha_2'} \cdots x_n^{\alpha_n'}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{x_1^{\alpha_1}}{x_1^{\alpha_1'}} \cdot \frac{x_2^{\alpha_2}}{x_2^{\alpha_2'}} \cdots \frac{x_n^{\alpha_n}}{x_n^{\alpha_n'}}$$

se c permanece igual, a equação é dimensionalmente homogênea; se não for, não é dimensionalmente homogênea.

$$[Y] = [x_1]^{\alpha_1} [x_2]^{\alpha_2} \cdots [x_n]^{\alpha_n} \quad \text{equação dimensional}$$

exemplo: equação do pêndulo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

(dimensionalmente homogênea)

$$T = 2\sqrt{L}$$

(só vale no sistema de unidades que g valha $3,8 \text{ m/s}^2$)

EXERCÍCIOS

Estabelecer a equação dimensional das seguintes grandezas, nas bases F, L, T e M, L, T

	F	L	T	M	L	T
comprimeto		L			L	
força	F			M	L	T ⁻²
peso específico γ	F	L ⁻³		M	L ⁻²	T ⁻²
massa específica ρ	F	L ⁻⁴	T ⁺²	M	L ⁻³	
velocidade						

ou

$[x] = [L]$

$[força] = [F]$

$[\gamma] = [F] [L]^{-3}$

$[\rho] = [F] [L]^{-4} [T]^{+2}$

$[q] = [L]^3 [T]^{-1}$

Ex. 7.1

7.3

6. TEOREMA DOS π_s (BUCKINGHAM)

Dada a função $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, associar

entre $\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-r}) = 0$ equivalente

onde $\pi_i \Rightarrow$ número adimensional

$r \Rightarrow$ característica da matriz dimensional (maior ordem do determinante formada pelos coeficientes)

Bibliografia; Teorema π	Munson - Cap. 7
	Fox e McDonald - Cap. 7
	Coleções de Exercícios - Cap. 3

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= x_1^{y_1} \cdot x_2^{z_1} \cdot \dots \cdot x_r^{m_1} \cdot x_{r+1} \\ &\vdots \\ \Pi_{m-r} &= x_1^{y'_1} \cdot x_2^{z'_1} \cdot \dots \cdot x_r^{m'_1} \cdot x_m \end{aligned}$$

Condições de similaridade (ou simplesmente, similaridade):

? Se 3 adimensionais representam n fenômenos e m 2 adimensionais são iguais entre modelos e protótipos, então o terceiro será também igual.

EXERCÍCIO: Técnica de obtenção das monomios Π

Seja n fenômenos onde intervêm as seguintes variáveis

ρ V L μ γ p c σ

buscando as equações dimensionais de cada variável segundo a base (F, L, T)

F	1	0	0	1	0	1	0	1
L	-4	1	1	-2	1	-2	1	-1
T	2	-1	0	1	-2	0	-1	0
	r			m - r				

$\rho, V, L \in \text{BASE}$ se determinante $\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \therefore \quad (\rho, v, L) \equiv \text{BASE DE}$$

então as funções

$$f(\rho, v, L, \mu, g, p, c, \sigma) = 0$$

podem ser associadas outra função com adimensionalais

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = 0$$

onde

$$[\mu] = \pi_1 [\rho]^{\alpha_1} [v]^{\alpha_2} [L]^{\alpha_3} \quad (1)$$

$$[g] = \pi_2 [\rho]^{\beta_1} [v]^{\beta_2} [L]^{\beta_3} \quad (2)$$

$$[p] = \pi_3 [\rho]^{\gamma_1} [v]^{\gamma_2} [L]^{\gamma_3}$$

$$[c] = \pi_4 [\rho]^{\delta_1} [v]^{\delta_2} [L]^{\delta_3}$$

$$[\sigma] = \pi_5 [\rho]^{\epsilon_1} [v]^{\epsilon_2} [L]^{\epsilon_3}$$

$$(1) \rightarrow F L^{-2} T = \pi_1 \underbrace{F^{\alpha_1} L^{-4\alpha_1} T^{2\alpha_1}}_{\rho^{\alpha_1}} \underbrace{L^{\alpha_2} T^{-\alpha_2}}_{v^{\alpha_2}} L^{\alpha_3}$$

$$T \rightarrow \alpha_1 = 1$$

$$L \rightarrow -2 = -4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$F \rightarrow 1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$$

$$\therefore (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 1)$$

$$\therefore \boxed{\pi_1 = \frac{\mu}{\rho v L}} \text{ Reynolds.}$$

$$(2) \quad [g] = \pi_2 [\rho]^{\beta_1} [V]^{\beta_2} [L]^{\beta_3}$$

$$L T^{-2} = \pi_2 \underbrace{F^{\beta_1} L^{-4\beta_1} T^{2\beta_1}}_e L^{\beta_2} T^{-\beta_2} L^{\beta_3}$$

$$\therefore \begin{cases} 0 = \beta_1 \\ 1 = -4\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ -2 = 2\beta_1 - \beta_2 \end{cases} \quad \therefore (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \equiv (0, 2, -1)$$

ou $\boxed{\pi_2 = \frac{gL}{V^2}}$ número de FROUDE

(3) $\rightarrow \pi_3 = \frac{P}{\rho V^2}$ ou $\boxed{\pi_3 = \frac{F}{\rho V^2 L^2}}$ número de EULER

(4) $\rightarrow \boxed{\pi_4 = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}}$ número de WEBER

(5) $\rightarrow \boxed{\pi_5 = \frac{V}{c}}$ número de MACH

significados físicos:

Reynolds : forças de inércia e força viscosa

Froude : forças de inércia e força peso

Euler : forças de inércia e forças de pressão

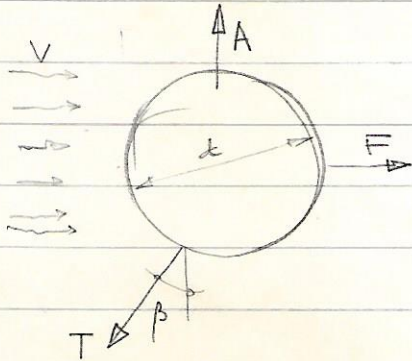
Weber : forças de inércia e forças de tensão superficial

Mach : forças de inércia e forças elásticas.

Exercício 3.9 → Coletânea (resolvido).

Exercícios 3.10/3.13/3.14: Coletânea de exercícios Cap. 7 pag. 14 (resolvido).

Dados:

1.) balão em equilíbrio imerso em ar, com velocidade horizontal V 2.) $d = 0,15\text{m}$ 3.) gás do balão é H_2 / peso do balão é nulo.4.) constante dos gases $R_{\text{ar}} = 29,3\text{m/k}$ $R_{\text{H}_2} = 421,1\text{m/k}$

5.) atmosfera padrão ao nível do mar

 $P_{\text{abs}} = 1,013 \times 10^4\text{kgf/m}^2$ para $\Theta = 15^\circ\text{C} \equiv 288^\circ\text{K}$ $\nu_{\text{ar}} = 1,45 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ Determinar relações entre β e V RESOLUÇÃO: variáveis que intervêm no fenômeno

$$f(\rho, V, d, F, \mu) = 0 \quad \text{ou seja} \quad \exists f /$$

$$\text{para base } (\rho, V, d) \rightarrow \phi(\pi_1, \pi_2) = 0 \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \pi_1 = E \\ \pi_2 = R \end{cases}$$

 $A =$ peso do ar deslocado - peso do hidrogênio

$$A = \frac{\pi d^3}{6} \gamma_{\text{ar}} - \frac{\pi d^3}{6} \gamma_{\text{H}} = \frac{\pi d^3}{6} (\gamma_{\text{ar}} - \gamma_{\text{H}})$$

$$\frac{P}{\gamma} = R\Theta \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{P}{R\Theta} \quad \therefore \quad A = \frac{\pi d^3}{6} \cdot \frac{P_{\text{ab}}}{\Theta_{\text{ab}}} \left(\frac{1}{R_{\text{ar}}} - \frac{1}{R_{\text{H}}} \right)$$

$$\text{Euler} \rightarrow E = \frac{F}{\rho V^2 d^2} \quad \text{ou} \quad F = E \rho V^2 d^2 \quad \text{em}$$

$$F = \left(\frac{8E}{\pi} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi d^2}{4} \right) \rho V^2$$

coeficiente de arrasto C_d área transversal ao escoamento A_p

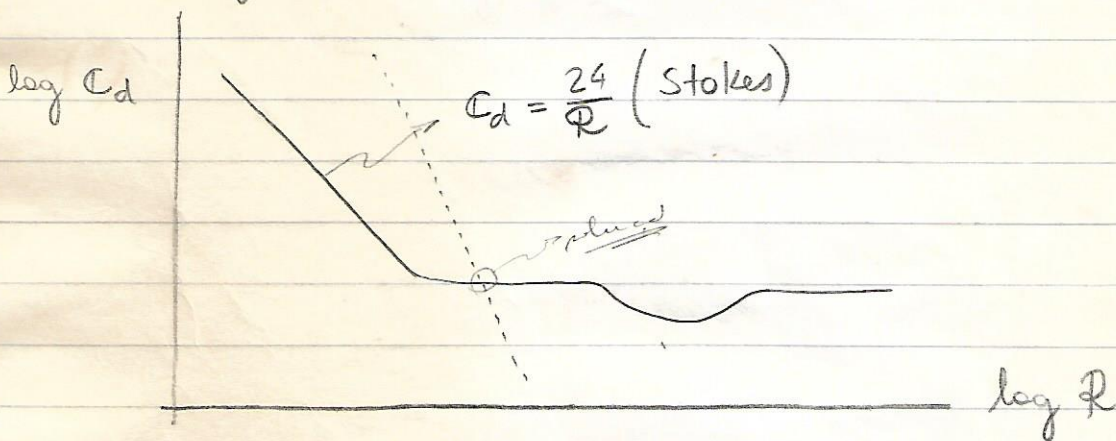
ou $F_{arraste} = \frac{1}{2} C_d A_p \rho_{ar} V^2$

dai $\text{tg } \beta = \frac{F}{A} = \frac{\frac{1}{2} C_d \frac{\pi}{4} d^2 \rho_{ar} V^2}{\frac{\pi}{6} d^3 \cdot \frac{\rho}{\theta} \cdot \left(\frac{1}{R_{ar}} - \frac{1}{R_H} \right)}$

como $\rho_{ar} = \frac{\rho_{ab}}{g \theta_{ob} R_{ar}}$ \rightarrow $\text{tg } \beta = \frac{3}{4} \frac{C_d V^2 R_H}{g d (R_H - R_{ar})}$ (I)

$\phi(\pi_1, \pi_2) = \phi(\varepsilon, R) = 0$; mais comum e' $\phi(C_d, R) = 0$

gráficamente, esta função ϕ tem o seguinte comportamento (pag. 9 da Coletânea de Exercícios)



Exemplo numérico: calcular V para $\beta = 10^\circ$

$C_d \cdot R^2 = \frac{4}{3} g d^3 \frac{\text{tg } \beta}{V^2} \left(\frac{R_H - R_{ar}}{R_H} \right)$ com $V = \frac{R \cdot v}{d}$ em (I)

ou $C_d \cdot R^2 = 34,45 \times 10^6$

\rightarrow duas formas de resolução: graficamente plotando a reta $\log C_d + 2 \log R = \log(34,45 \times 10^6)$ e por tentativa, adotando V , calculando R e C_d e conferindo até convergir solução $(C_d, R) \equiv (0,42; 9.060)$ em

$$V = \frac{9.060 \times 1,45 \times 10^{-5}}{0,15} = 0,876 \text{ m/s}$$

EXERCÍCIO 3.31 - Coletânea de exercícios - Cap. 3 - pag 23

→ problema de semelhança para projetar um navio.
(ver pag. 12A/16 com opção simplificada desta questão)

grandezas	protótipo	modelo
- velocidade do fluido (V)	4,88 m/s	
- massa específica (ρ)	1.026 kg/m ³	1.000 kg/m ³
- dimensões lineares	16	1
- área molhada do casco (Ac)		3,72 m ²
- F resistência (Fr = Fu + Fg)		4,35 kgf
- Fu (força da tensão de arraste)	$\left(\frac{F_u}{A_c}\right)_p = 0,396 V^{1,85}$	$\left(\frac{F_u}{A_c}\right)_m = 0,443 V^{1,9}$

RESOLUÇÃO: Variáveis intervenientes no fenómeno

$$\rho, V, L, F, \mu, g$$

então existe $f(\rho, V, L, F, \mu, g) = 0$ em

com base (ρ, V, L) → $\phi(E, R, F) = 0$ em

$$\phi\left(\frac{F}{\rho L^2 V^2}, \frac{VL}{\mu/\rho}, \frac{V^2}{gL}\right) = 0$$

EULER (E) REYNOLDS (R) FROUDE (F)

Impondo a condições de semelhança entre modelo e protótipo, tem-se

$$[R_m = R_p]$$

$$F_m = F_p$$



1º) passo: cálculo da área do casco para o protótipo:

escala de área = (escala de comprimentos)²

$$\frac{A_m}{A_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^2$$

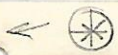
$$K_A = K_L^2 \quad \text{ou} \quad \frac{(A_c)_m}{(A_c)_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^2 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \quad \therefore$$

$$\therefore (A_c)_p = (16)^2 \times 3,72 = 952,32 \text{ m}^2$$

2º) passo: $F_m = F_p$ ou $\frac{V_m^2}{g L_m} = \frac{V_p^2}{g L_p}$

ou $K_v = K_g \cdot K_L \quad \therefore K_v = \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{1}{16}}$

$$\therefore V_m = \frac{4,88}{4} = 1,22 \text{ m/s}$$



3º) passo: $\frac{(F_u)_m}{(A_c)_m} = 0,443 \cdot (V_m)^{1,9} \quad \therefore$

$$\therefore (F_u)_m = 0,443 \cdot (1,22)^{1,9} \cdot 3,72 = 2,405 \text{ kgf}$$

4º) passo: $(F_{\text{resist}})_m = (F_u)_m + (f_g)_m \rightarrow (f_g)_m = 4,35 - 2,405$

ou $(f_g)_m = 1,945 \text{ kgf}$

5º) passo: $\frac{(F_u)_p}{(A_c)_p} = 0,396 \cdot V^{1,85} \quad \therefore$

$$(F_u)_p = 0,396 \cdot (4,88)^{1,85} \cdot 952,32 = 7.080 \text{ kgf}$$

6º) passo $E_p = E_m$ ou $\left(\frac{F}{\rho L^2 V^2}\right)_p = \left(\frac{F}{\rho L^2 V^2}\right)_m$

Assume-se, neste exemplo, a semelhança de Euler para cálculos apenas da parcela f_g , o que é

uma simplificação (conhecido como efeito de escala)

$$\left(\frac{F_g}{\rho L^2 V^2} \right)_m = \left(\frac{F_g}{\rho L^2 V^2} \right)_p \quad \therefore \left. \begin{aligned} K_F &= K_\rho K_V^2 K_L^2 \\ K_V^2 &= K_L \end{aligned} \right\} \quad \therefore$$

$$K_F = K_\rho K_L^3$$

$$\frac{(F_g)_m \rightarrow 1,945 \text{ kgf}}{(F_g)_p} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^3 = \left(\frac{1000}{1026} \right) \left(\frac{1}{16} \right)^3 \quad \therefore$$

$$(F_g)_p = 8.174 \text{ kgf} \quad \text{ou}$$

$$(F_{res})_p = (F_u)_p + (F_g)_p = 7080 + 8.174 = 15.254 \text{ kgf.}$$

Um avião está sendo projetado para voar a 900 km/h e a 10.700 m de altitude, onde a temperatura é de -54°C e a pressão absoluta e viscosidade do ar valem respectivamente $0,235 \text{ kgf/cm}^2$ e $1,44 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$. O ar pode ser considerado um gás ideal com $R = 29,3 \text{ m/}^\circ\text{C}$ e pode ser propagado com a velocidade $C = \sqrt{1,4 E/\rho}$ sendo E o seu módulo (isotérmico) de elasticidade volumétrica.

Um modelo com um décimo do tamanho do protótipo é submetido a ensaio num túnel de vento pressurizado, à temperatura de 20°C para a qual $\mu = 1,81 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$.

a) No ensaio, quais devem ser a pressão e a velocidade para se conseguir simultaneamente

*

3º passo

$$\varepsilon_p = \varepsilon_m \rightarrow \left(\frac{F}{\rho L^2 V^2} \right)_p = \left(\frac{F}{\rho L^2 V^2} \right)_m$$

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} k_F &= k_p \cdot k_L^2 \cdot k_v^2 \\ k_v^2 &= k_L \end{aligned} \right\} k_F = k_p \cdot k_L^3$$

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{1000}{1026} \cdot \left(\frac{1}{16} \right)^3 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{F_p}{F_m} \right) = 18.280,86 \text{ kgf}}$$

Considerando o problema de forma mais completa, com F_{resist} tendo duas componentes F_x e F_y , com F_x definido empiricamente, pode-se aplicar a teoria da semelhança somente na parcela restante ou seja

a) semelhança de Reynolds e de Mach?

b) Qual é o terceiro adimensional envolvido no fenômeno?

c) A força que tende a anastar o modelo, medida no ensaio, é de 200 kgf. Qual a força que se operará nos avanços do avião real?

(Ref. bibliográfica: Frank M. White, "Fluid Mechanics" problema 5.57 - pag. 303)

RESOLUÇÃO

grandeza	V	θ	P_{abs}	μ	L	F
modelo	?	20°C	?	$1,31 \cdot 10^{-5} \text{ N.s/m}^2$	1	200 kgf
protótipo	300 km/h	-54°C	0,235 kgf/cm ²	$1,44 \cdot 10^{-5} \text{ N.s/m}^2$	10	?

$$\phi(R, M, ?) = 0$$

intervem força \therefore 3^o adimensional é Euler

$$\text{onde } E = \frac{F}{\rho L^2 V^2}$$

$$\rightarrow R_m = R_p \quad \therefore \left(\frac{\rho V L}{\mu} \right)_m = \left(\frac{\rho V L}{\mu} \right)_p \quad \text{ou}$$

$$\frac{K_e \cdot K_v \cdot K_c}{K_u} = K_E = 1 \quad (I)$$

$$\rightarrow M_m = M_p \quad \therefore \frac{K_v}{K_c} = K_M = 1$$

$$\text{com } C = \sqrt{1,4 \frac{E}{\rho}}$$

$$E = P_{abs}$$

pag. 20 - apostila Propriedades Físicas dos Fluidos e Ailise

$$\frac{P_{abs}}{\gamma} = R\theta \quad \therefore P_{abs} = \rho g R\theta \quad \text{Densidade e Semelhança}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} C_m &= \sqrt{1,4 \frac{P_m}{\rho_m}} \rightarrow C_m = \sqrt{1,4 (g R \theta)_m} \\ C_p &= \sqrt{1,4 \frac{P_p}{\rho_p}} \rightarrow C_p = \sqrt{1,4 (g R \theta)_p} \end{aligned} \right\} \therefore$$

$$\therefore K_c = \sqrt{K_g \cdot K_R \cdot K_\theta} \quad \text{e com}$$

$$\left. \begin{aligned} K_R &= 1 \text{ (mesmo gás)} \\ K_g &= 1 \text{ (altitude mais afeta substância do que } g) \end{aligned} \right\} \text{ tem - h}$$

$$K_v = K_c = \sqrt{K_\theta} = \sqrt{\frac{20 + 273}{-54 + 273}} = 1,157$$

$$\therefore V_m = 1,157 \times 900 = \underline{1,040 \text{ Km/h}}$$

$$\frac{P}{\rho} = g R \theta \rightarrow \frac{K_p}{K_\rho} = K_g \cdot K_R \cdot K_\theta = K_\theta \quad \text{ou } K_p = K_\rho \cdot K_\theta$$

$$\text{em (I) } \left. \begin{aligned} &\text{resulta} \\ &\text{para substituir } K_p \end{aligned} \right\} K_p = K_u K_L^{-1} \sqrt{K_\theta}$$

$$\text{ou } K_p = \left(\frac{1,81}{1,44} \right) \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^{-1} \times 1,157 = 14,54$$

$$\therefore P_m = \underline{3,42 \text{ Kgf/cm}^2}$$

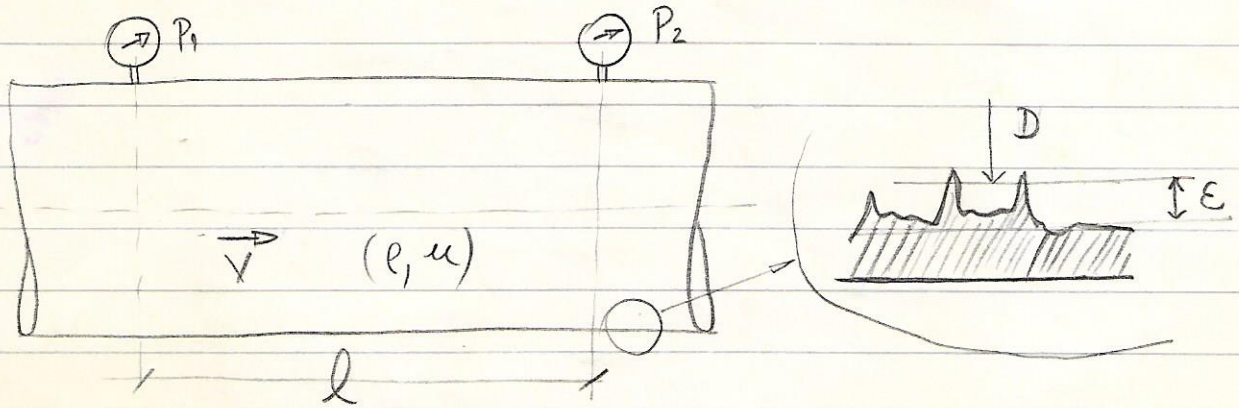
$$\text{Da semelhança de Euler resulta } (E = F / \rho L^2 V^2):$$

$$K_F = K_p \cdot (K_L)^2 \cdot (K_v)^2 = K_u \cdot K_L \cdot \sqrt{K_\theta}$$

$$\text{ou } K_F = \frac{1,81}{1,44} \cdot \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{293}{219}} = 0,1454$$

$$\text{em } \underline{F_p = 1375 \text{ Kg f}}$$

Discussão do equacionamento do escoamento em condutos



$$f(\rho, v, D, \Delta p, \mu, l, \epsilon) = 0 \quad \text{onde } \Delta p = p_1 - p_2$$

é possível, a partir da escolha de (ρ, v, d) como base, resultar os seguintes adimensionais:

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad (\text{número de Euler onde } \Delta p = \frac{F}{L^2})$$

$$\pi_2 = \frac{vD}{\nu} \quad (\text{número de Reynolds})$$

$$\pi_3 = \frac{l}{D} \quad (\text{número óbvio})$$

$$\pi_4 = \frac{\epsilon}{D} \quad (\text{rugosidade relativa})$$

$$\text{Daí, } \phi\left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{vD}{\nu}, \frac{l}{D}, \frac{\epsilon}{D}\right) = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \varphi\left(R, \frac{l}{D}, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

Δp é proporcional e linear com $\frac{l}{D}$ (discutir intuitivamente) \therefore

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = \frac{l}{D} \Phi \left(R, \frac{\epsilon}{D} \right) \quad \text{ou}$$

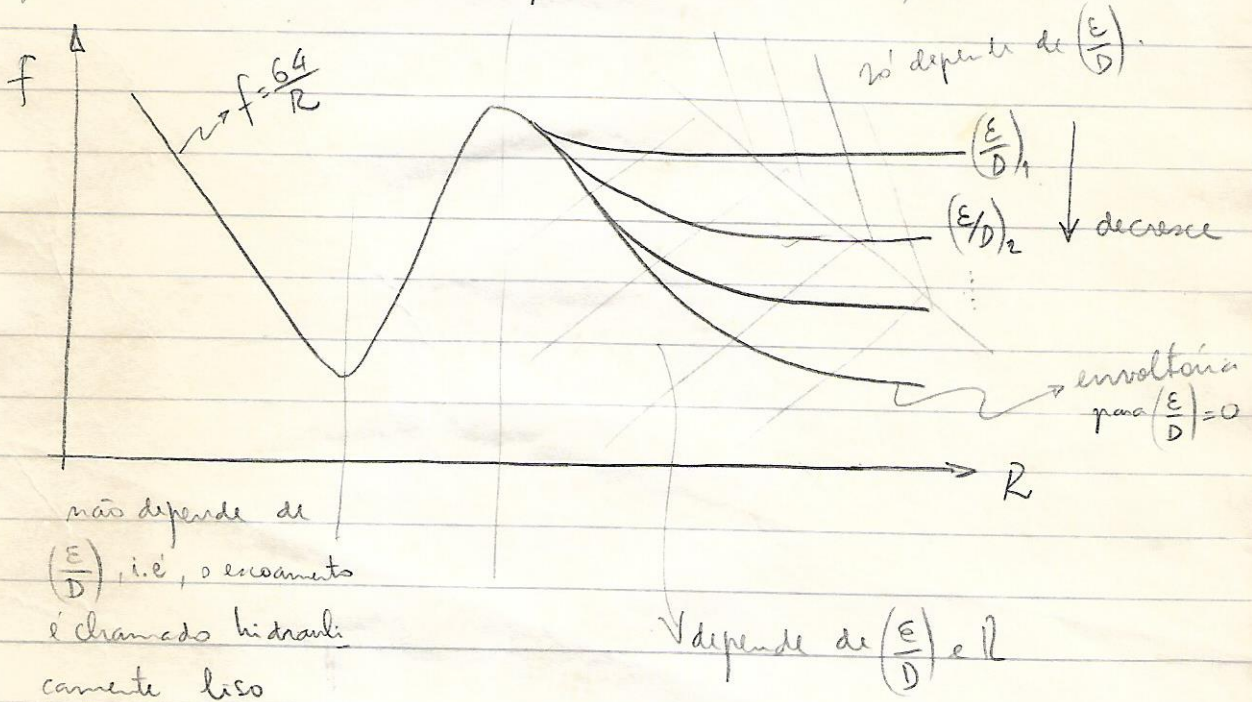
16/16

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{l}{D} \frac{V^2}{g} \Phi \left(R, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

$$\text{ou} \quad \frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} \underbrace{2 \Phi \left(R, \frac{\epsilon}{D} \right)}_{f}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\Delta P}{\gamma} = f \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g}}$$

graficamente, o comportamento da função f é:



Nikuradse ensaiou para tubos de rugosidade programada
Reuze ensaiou para tubos reais, passando a chamar ϵ de K , sendo o comportamento dos gráficos idênticos para regime laminar e condicional de tubo liso; no restante é diferente.