

Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo



---

# Análise Dimensional



## Ferramentas utilizadas na Mecânica dos Fluidos:

- Análise integral;
- Análise diferencial;
- **Análise dimensional.**



Toda equação que envolve variáveis físicas deve ter a mesma unidade de medida em ambos os lados do sinal de igualdade.

Exemplo:  $\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = cte$

$$\frac{N / m^2}{kg / m^3 \cdot m / s^2} + \frac{m^2 / s^2}{m / s^2} + m = cte$$

$$\frac{kg \cdot m / s^2}{kg / s^2} + m + m = cte$$

$$m + m + m = cte$$

Qual a unidade da constante?



Melhor e mais elegante teria sido trabalharmos com dimensões (MLT: **M**, massa; **L**, comprimento e T, tempo ou **FLT**: **F**, força; **L**, comprimento e T, tempo) e não com unidades:

Exemplo (MLT): 
$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = cte$$

$$\frac{M \cdot L / T^2 / L^2}{M / L^3 \cdot L / T^2} + \frac{L^2 / T^2}{L / T^2} + L = cte$$

$$L + L + L = cte$$



| Quantity              | Symbol           | Dimensions             |                        |
|-----------------------|------------------|------------------------|------------------------|
|                       |                  | $MLT\Theta$            | $FLT\Theta$            |
| Length                | $L$              | $L$                    | $L$                    |
| Area                  | $A$              | $L^2$                  | $L^2$                  |
| Volume                | $\mathcal{V}$    | $L^3$                  | $L^3$                  |
| Velocity              | $V$              | $LT^{-1}$              | $LT^{-1}$              |
| Acceleration          | $dV/dt$          | $LT^{-2}$              | $LT^{-2}$              |
| Speed of sound        | $a$              | $LT^{-1}$              | $LT^{-1}$              |
| Volume flow           | $Q$              | $L^3T^{-1}$            | $L^3T^{-1}$            |
| Mass flow             | $\dot{m}$        | $MT^{-1}$              | $FTL^{-1}$             |
| Pressure, stress      | $p, \sigma$      | $ML^{-1}T^{-2}$        | $FL^{-2}$              |
| Strain rate           | $\dot{\epsilon}$ | $T^{-1}$               | $T^{-1}$               |
| Angle                 | $\theta$         | None                   | None                   |
| Angular velocity      | $\omega$         | $T^{-1}$               | $T^{-1}$               |
| Viscosity             | $\mu$            | $ML^{-1}T^{-1}$        | $FTL^{-2}$             |
| Kinematic viscosity   | $\nu$            | $L^2T^{-1}$            | $L^2T^{-1}$            |
| Surface tension       | $\Upsilon$       | $MT^{-2}$              | $FL^{-1}$              |
| Force                 | $F$              | $MLT^{-2}$             | $F$                    |
| Moment, torque        | $M$              | $ML^2T^{-2}$           | $FL$                   |
| Power                 | $P$              | $ML^2T^{-3}$           | $FLT^{-1}$             |
| Work, energy          | $W, E$           | $ML^2T^{-2}$           | $FL$                   |
| Density               | $\rho$           | $ML^{-3}$              | $FT^2L^{-4}$           |
| Temperature           | $T$              | $\Theta$               | $\Theta$               |
| Specific heat         | $c_p, c_v$       | $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ | $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ |
| Specific weight       | $\gamma$         | $ML^{-2}T^{-2}$        | $FL^{-3}$              |
| Thermal conductivity  | $k$              | $MLT^{-3}\Theta^{-1}$  | $FT^{-1}\Theta^{-1}$   |
| Expansion coefficient | $\beta$          | $\Theta^{-1}$          | $\Theta^{-1}$          |

# Introdução: exemplo 1



Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

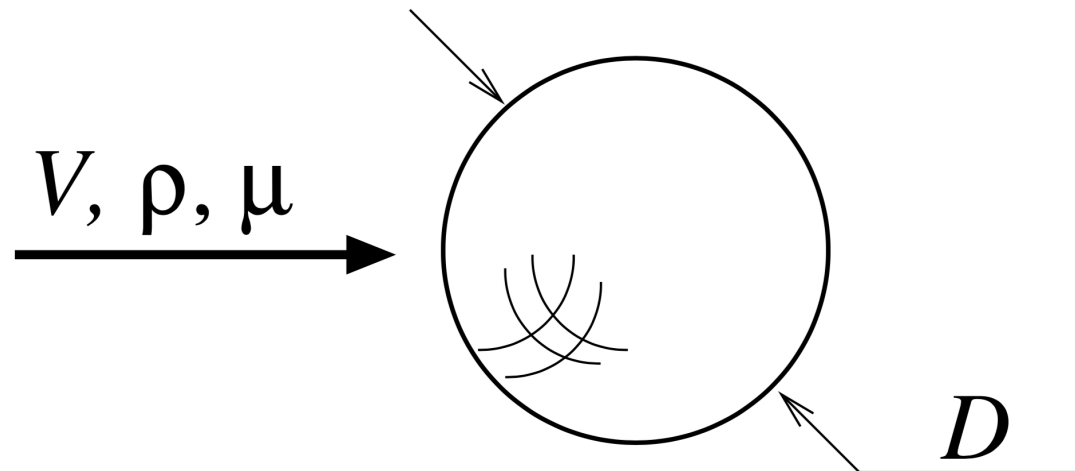


Quais regras devemos respeitar para construir um modelo da mosca?

# Introdução: exemplo 2



Considere o escoamento ao redor de uma esfera. Deseja-se saber como a força de arrasto aerodinâmico é influenciada pelas variáveis: velocidade,  $V$ , massa específica,  $\rho$ , e viscosidade,  $\mu$ , do fluido e pelo diâmetro,  $D$ , da esfera.



- Quantos experimentos serão necessários?
- Quanto tempo para realizá-los?
- Quais serão as principais dificuldades para sua realização?
- Qual o custo?



- Cerca de 10 pontos experimentais são necessários para definir uma curva;
- 10 comprimentos diferentes definem o efeito do diâmetro sobre a força de arrasto;
- Para cada  $D$ , precisamos de 10 valores de  $V$ , 10 valores de  $\rho$  e 10 valores de  $\mu$ , totalizando  $10^4$  experimentos;
- Estima-se 2 anos de trabalho;
- Estima-se US\$ 50 por experiência.

Com análise dimensional, os 5 parâmetros podem ser agrupados em apenas dois:

$$\frac{F}{\rho V^2 L^2} = g \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right)$$



Se uma equação envolvendo  $k$  variáveis for dimensionalmente homogênea, ela pode ser reduzida a uma relação entre  $k - r$  produtos dimensionais independentes, sendo  $r$  o número mínimo de dimensões básicas necessárias para descrever as variáveis (Munson).

É comum em análise dimensional usar o símbolo  $\Pi$  (pi grego maiúsculo) para representar um produto de variáveis dimensionais cujo resultado seja adimensional.

# Teorema de Buckingham para Termos $\Pi$



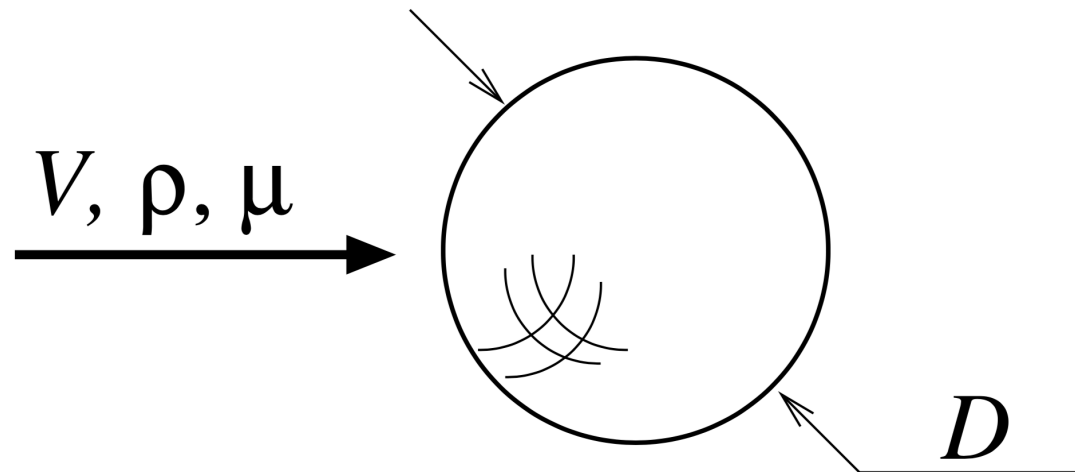
1. Liste todas as variáveis que estão envolvidas no problema (determinação de  $k$ );
2. Selecione um conjunto de dimensões fundamentais, MLT ou FLT;
3. Liste as dimensões de todas as variáveis em termo das dimensões primárias. Seja  $r$  o número de dimensões primárias;
4. Selecione  $r$  variáveis que, em conjunto, incluam todas as dimensões primárias. Essas variáveis serão combinadas com as remanescentes, uma por vez, e serão chamadas de variáveis de repetição;
5. Estabeleça equações dimensionais combinando as variáveis selecionadas do passo 4 com cada uma das demais para formar grupos adimensionais. Haverá  $k - r$  equações. Resolva-as para obter os grupos adimensionais;
6. Verifique se cada grupo obtido é adimensional;
7. Represente a forma final como uma relação entre os termos  $\Pi$  e pense sobre o que isso significa.

Geralmente:  $\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r})$

## Exemplo 2



Considere o escoamento ao redor de uma esfera. Deseja-se saber como a força de arrasto aerodinâmico é influenciada pelas variáveis: velocidade,  $V$ , massa específica,  $\rho$ , e viscosidade,  $\mu$ , do fluido e pelo diâmetro,  $D$ , da esfera.



# Exemplo 2



**Passo 1 – Parâmetros envolvidos:**  $F_D = f(\rho, V, D, \mu)$

$F_D, \rho, V, D, \mu \Rightarrow k = 5$  parâmetros (variáveis) dimensionais.

**Passo 2 – Sistema:** Vamos usar o sistema MLt

**Passo 3 – Dimensões:**

$$F_D \rightarrow \text{M.L.t}^{-2}$$

$$D \rightarrow \text{L}$$

$$\rho \rightarrow \text{M.L}^{-3}$$

$$\mu \rightarrow \text{M.L}^{-1}.\text{t}^{-1}$$

$$V \rightarrow \text{M.t}^{-1}$$



## Exemplo 2



**Passo 4 – Parâmetros de repetição:**  $\rho, V, D$

**Passo 5 – Grupos adimensionais:**  $k - r = 5 - 3 = 2$  grupos  $\Pi$

$$\Pi_1 = \rho^a \cdot V^b \cdot D^c \cdot F_D \therefore \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^b \cdot (L)^c \cdot \frac{M \cdot L}{t^2} = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\rho \cdot V^2 \cdot D^2} : \begin{cases} M: a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \\ L: -3 \cdot a + b + c + 1 = 0 \rightarrow c = -2 \\ t: -b - 2 = 0 \rightarrow b = -2 \end{cases}$$

## Exemplo 2



**Passo 5 – Grupos adimensionais:**  $k - r = 5 - 3 = 2$  grupos  $\Pi$

$$\Pi_2 = \rho^d \cdot V^e \cdot D^f \cdot \mu \therefore \left( \frac{M}{L^3} \right)^d \cdot \left( \frac{L}{t} \right)^e \cdot (L)^f \cdot \frac{M}{L \cdot t} = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} : \begin{cases} M: d + 1 = 0 \rightarrow d = -1 \\ L: -3 \cdot d + e + f - 1 = 0 \rightarrow f = -1 \\ t: -e - 1 = 0 \rightarrow e = -1 \end{cases}$$

## Exemplo 2



### Passo 6 – Verificação:

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\rho \cdot V^2 \cdot D^2} \equiv \frac{M \cdot L}{t^2} \cdot \frac{L^3}{M} \cdot \frac{t^2}{L^2} \cdot \frac{1}{L^2} \equiv 1 \text{ OK!}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} \equiv \frac{M}{L \cdot t} \cdot \frac{L^3}{M} \cdot \frac{t}{L} \cdot \frac{1}{L} \equiv 1 \text{ OK!}$$

### Passo 7 – Relação:

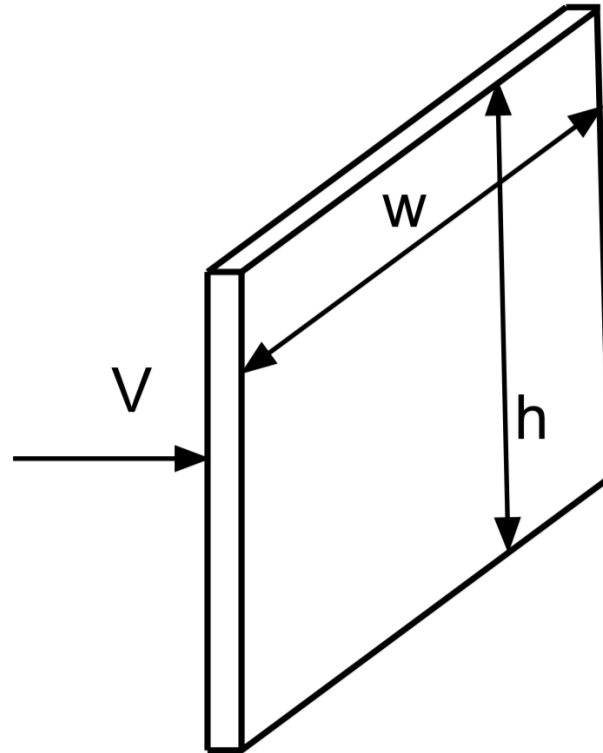
$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2) \therefore \frac{F_D}{\rho \cdot V^2 \cdot D^2} = \phi \left( \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} \right)$$

# Exemplo 3

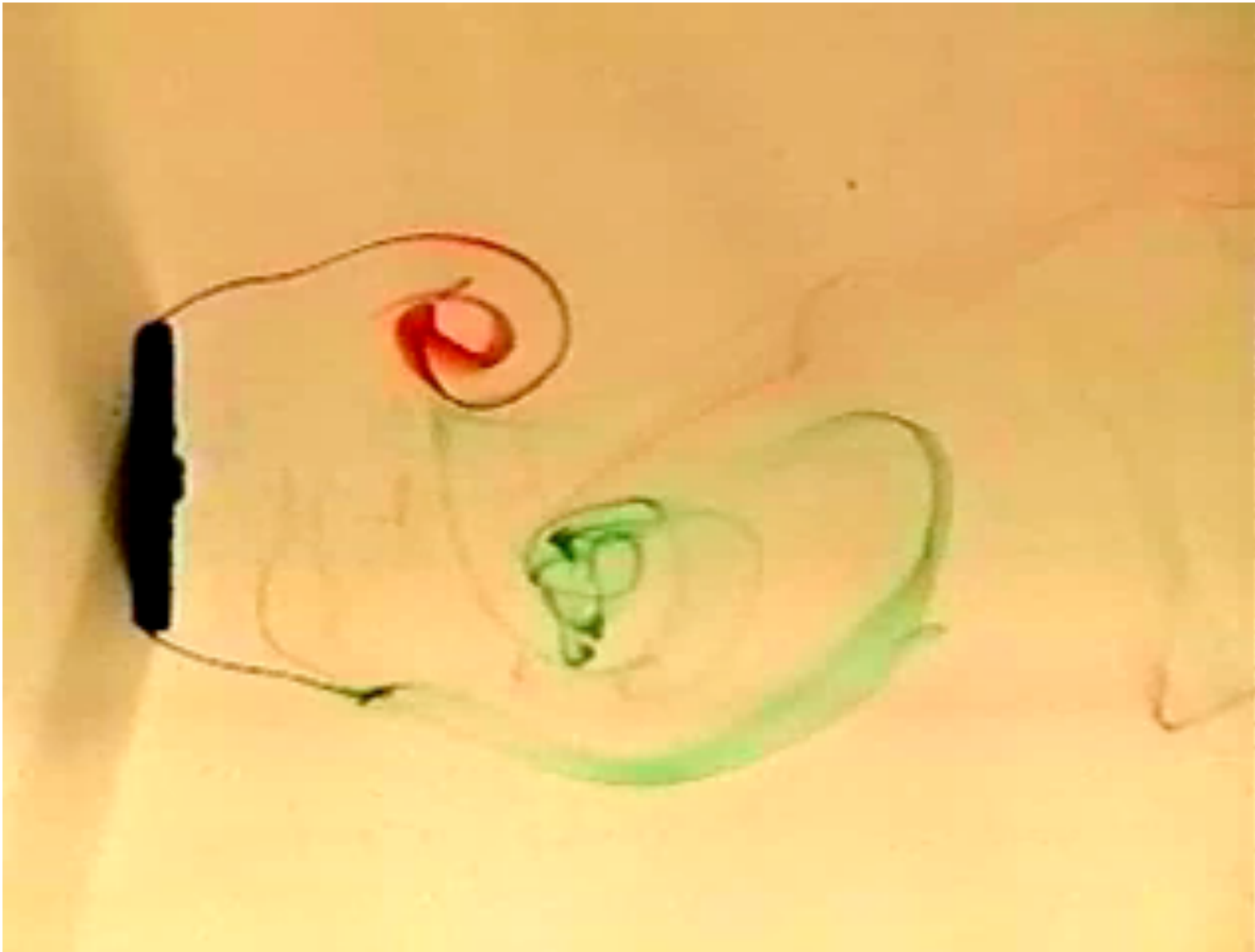


Uma fina placa retangular de largura  $w$  e altura  $h$  é colocada normal com relação a uma corrente de fluido. A força de arrasto  $F_D$  que o fluido exerce sobre a placa é função de  $w$  e  $h$ , da viscosidade e massa específica,  $\mu$  e  $\rho$ , e da velocidade  $V$  com que o fluido se aproxima da placa.

Determine um conjunto de grupos adimensionais pertinente ao problema.



# Exemplo 3



A flat plate oriented normal to the upstream flow direction is the ultimate blunt body. Since the viscous (shear) forces on the plate are directed along the plate, normal to the upstream flow, any drag force on the plate is due entirely to pressure forces.

The flow past the plate shown here is made visible by injecting dye at the edges of the plate. The region directly behind the plate is a "dead", low-pressure region with irregular, unsteady fluid motion associated with it. Hence, the relatively high pressure on the front of the plate (the center of the front of the plate is a stagnation point) combined with the low pressure on the back side results in a considerable drag force in the direction of the upstream flow. For the flow shown, the Reynolds number is  $Re = \rho Vh/\mu = 1,000$

# Exemplo 3



**Passo 1 – Parâmetros envolvidos:**  $F_D = f(w, h, \rho, V, \mu)$

$k = 6$  parâmetros (variáveis) dimensionais.

**Passo 2 – Sistema:** Vamos usar o sistema MLt

**Passo 3 – Dimensões:**

$$F_D \rightarrow M.L.t^{-2}$$

$$\mu \rightarrow M.L^{-1}.t^{-1}$$

$$\rho \rightarrow M.L^{-3}$$

$$w \rightarrow L$$

$$V \rightarrow L.t^{-1}$$

$$h \rightarrow L$$



**Passo 4 – Parâmetros de repetição:  $\rho$ ,  $w$  e  $V$**

**por que não escolher  $h$ ,  $w$  e  $\rho$ ?**

**Passo 5 – Grupos adimensionais:  $k - 6 = 6 - 3 = 3$  grupos**

$$\Pi_1 = F_D \cdot w^a \cdot V^b \cdot \rho^c = (M \cdot L \cdot t^{-2}) \cdot (L)^a \cdot (L \cdot t^{-1})^b \cdot (M \cdot L^{-3})^c = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$M: 1 + c = 0 \rightarrow c = -1$$

$$L: 1 + a + b - 3c = 0 \rightarrow a = -2$$

$$t: -2 - b = 0 \rightarrow b = -2$$

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{w^2 V^2 \rho}$$



**Passo 5 – Grupos adimensionais:  $k - r = 6 - 3 = 3$  grupos  $\Pi$**

$$\Pi_2 = h \cdot w^a \cdot V^b \cdot \rho^c = (L) \cdot (L)^a \cdot (L \cdot t^{-1})^b \cdot (M \cdot L^{-3})^c = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$M: c = 0$$

$$L: 1 + a + b - 3c = 0 \rightarrow a = -1$$

$$t: -b = 0 \rightarrow b = 0$$

$$\Pi_2 = \frac{h}{w}$$





**Passo 5 – Grupos adimensionais:  $k - r = 6 - 3 = 3$  grupos  $\Pi$**

$$\Pi_3 = \mu \cdot w^a \cdot V^b \cdot \rho^c = (M \cdot L^{-1} \cdot t^{-1}) \cdot (L)^a \cdot (L \cdot t^{-1})^b \cdot (M \cdot L^{-3})^c = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$M: 1 + c = 0 \rightarrow c = -1$$

$$L: -1 + a + b - 3c = 0 \rightarrow a = -1$$

$$t: -1 - b = 0 \rightarrow b = -1$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho V w}$$

## Passo 6 – Verificação:

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{w^2 V^2 \rho} = \frac{M.L}{t^2} \cdot \frac{1}{L^2} \cdot \frac{t^2}{L^2} \cdot \frac{L^3}{M} = 1$$

$$\Pi_2 = \frac{h}{w} = \frac{L}{L} = 1$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{\rho V w} = \frac{M}{L.t} \cdot \frac{L^3}{M} \cdot \frac{t}{L} \cdot \frac{1}{L} = 1$$

## Passo 7 – Relação:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3) \therefore \frac{F_D}{w^2 V^2 \rho} = \phi\left(\frac{h}{w}, \frac{\mu}{\rho V w}\right)$$



**Número de Reynolds, Re:** Importante na maioria dos problemas de mecânica dos fluidos. É uma medida da razão entre as forças de inércia de um elemento fluido e os efeitos viscosos no elemento. Em homenagem a Osborne Reynolds (1842 a 1912).

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot V \cdot L}{\mu}$$

**Número de Froude, Fr:** Utilizado em escoamento com superfície livre (rios, oceanos, canais abertos...). Indica a razão entre forças de inércia e o peso do elemento fluido. Em homenagem a William Froude (1810 a 1879).

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{g \cdot L}}$$



**Número de Euler, Eu:** Utilizado em problemas onde a pressão, ou diferença de pressão, são importantes. É uma medida da razão entre as forças de pressão e forças de inércia um elemento fluido. Em homenagem a Leonhard Euler (1707 a 1783).

$$Eu = \frac{p}{\rho \cdot V^2}$$

**Números de Cauchy, Ca, e de Mach, Ma:** Utilizados em situações onde a compressibilidade do fluido é importantes. É uma medida da razão entre as forças de inércia e as de compressibilidade. Em homenagem a Augustin Louis de Cauchy (1789 a 1857) e Ernst Mach (1838 a 1916).

$$Ca = \frac{\rho \cdot V^2}{E_v} ; Ma = \frac{V}{c} ; Ma^2 = Ca$$



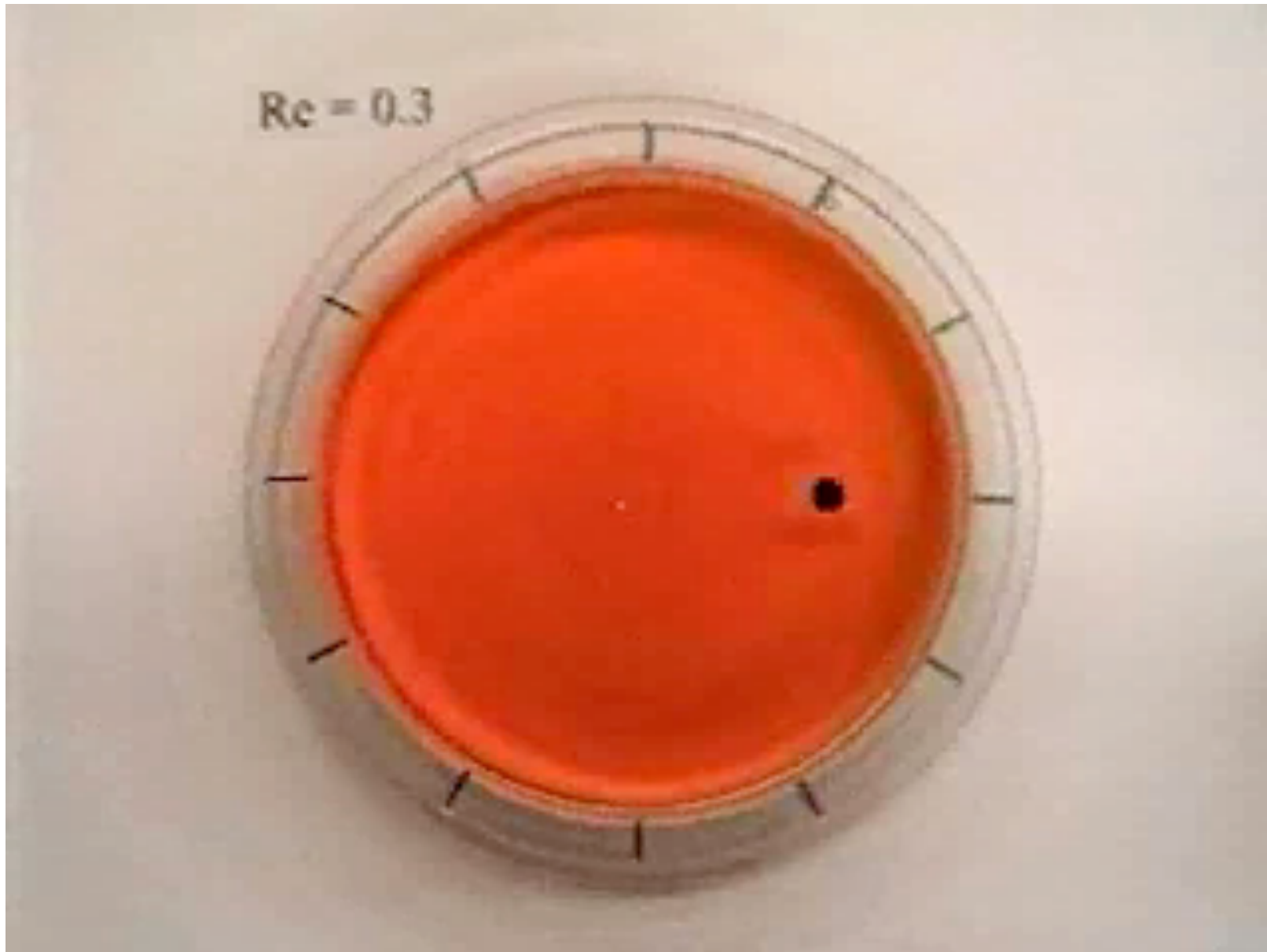
**Número de Strouhal, St:** Utilizado em escoamentos transitórios ou com frequência de oscilação característica. É uma medida da relação entre as forças de inércia devidas a transitoriedade do escoamento (aceleração local) e as forças de inércia devidas a variação da velocidade de ponto a ponto do campo de escoamento (aceleração convectiva). Em homenagem a Vicenz Strouhal (1850 a 1922).

$$St = \frac{f \cdot L}{V}$$

**Número de Weber, We:** Utilizado em problemas onde os efeitos da tensão superficial são importantes. Indica a razão entre forças de inércia e força devida a tensão superficial que atuam num elemento fluido. Em homenagem a Moritz Weber (1871 a 1951).

$$We = \frac{\rho \cdot V^2 \cdot L}{\sigma}$$

# Principais grupos adimensionais



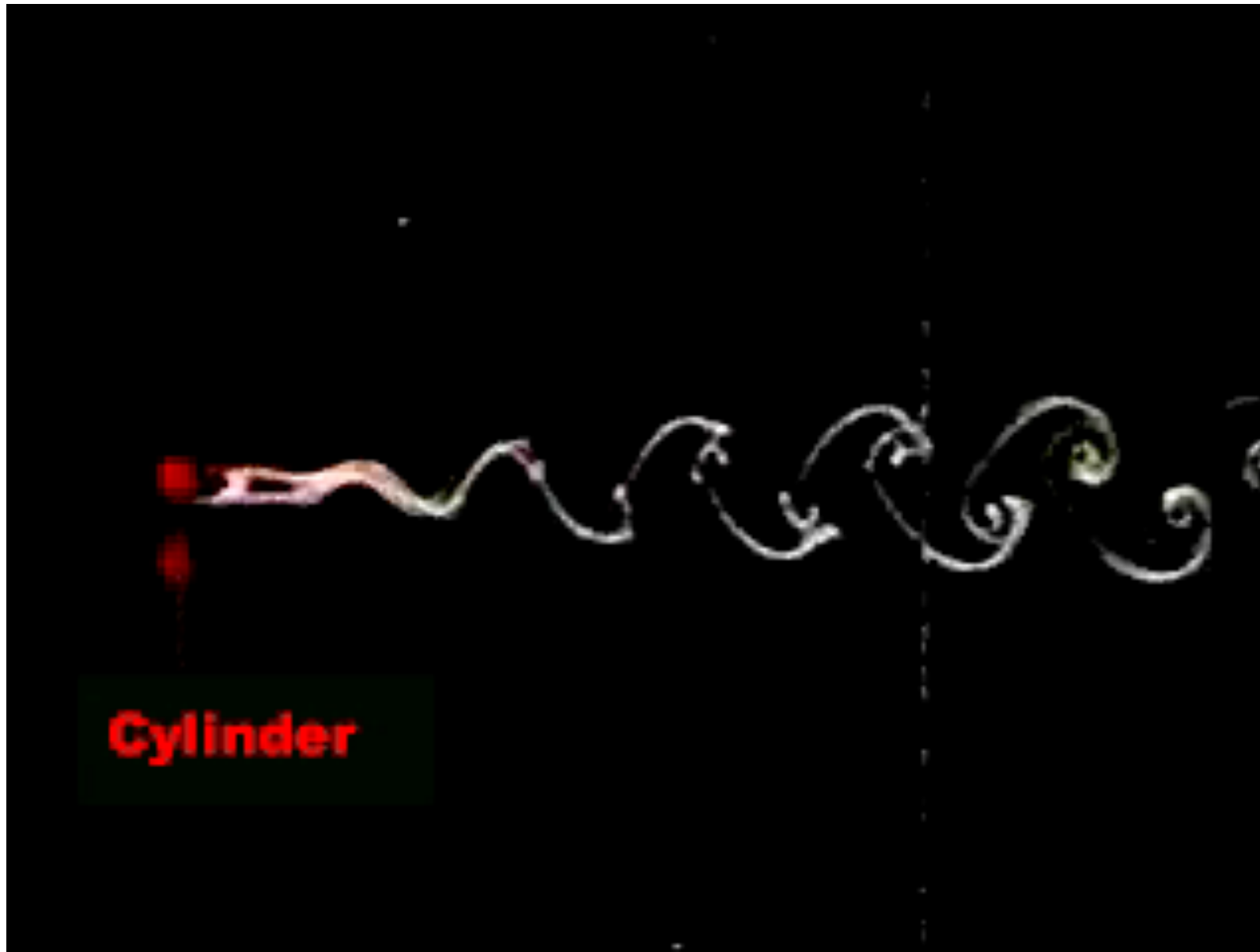
For a rotating tank containing a very viscous fluid, which gives a small Reynolds number, viscous forces are dominant. Thus, when the tank is suddenly stopped fluid particles also suddenly stop due to the dominance of viscous forces over inertia forces. Correspondingly, when a low viscosity fluid is in the tank, which gives a much higher Reynolds number, inertia forces are dominant. When the tank suddenly stops the fluid particles continue to move.

# Principais grupos adimensionais



The character of the sloshing of a liquid in a partially filled container is a function of the Froude number. Gravity and inertia are important parameters that affect the amplitude, shape, and frequency of the free surface motion in the oscillating container shown. Gravity tends to "flatten" any distortions of the otherwise flat surface. Once the surface is distorted, inertia allows the fluid to go past the horizontal, flat configuration and continue oscillating. The Reynolds number (the ratio of inertia and viscous forces) can also play an important part in sloshing flows such as this.

# Principais grupos adimensionais



In a certain Reynolds number range, the flow past a circular cylinder generates a periodic, unsteady flow downstream of the cylinder. The flow shown at a Reynolds number of 200 produces a well-defined trail of vortices that is formed by vortices shed from alternate sides of the cylinder. The frequency of the shedding for this Karman vortex trail can be given in terms of the Strouhal number.



| Parameter                           | Definition  | Qualitative ratio of effects                                | Importance                  |
|-------------------------------------|---|---|-----------------------------|
| Reynolds number                     | $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$                        | $\frac{\text{Inertia}}{\text{Viscosity}}$                   | Always                      |
| Mach number                         | $Ma = \frac{U}{a}$                                | $\frac{\text{Flow speed}}{\text{Sound speed}}$              | Compressible flow           |
| Froude number                       | $Fr = \frac{U^2}{gL}$                             | $\frac{\text{Inertia}}{\text{Gravity}}$                     | Free-surface flow           |
| Weber number                        | $We = \frac{\rho U^2 L}{\gamma}$                  | $\frac{\text{Inertia}}{\text{Surface tension}}$             | Free-surface flow           |
| Cavitation number<br>(Euler number) | $Ca = \frac{p - p_v}{\rho U^2}$                   | $\frac{\text{Pressure}}{\text{Inertia}}$                    | Cavitation                  |
| Prandtl number                      | $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$                          | $\frac{\text{Dissipation}}{\text{Conduction}}$              | Heat convection             |
| Eckert number                       | $Ec = \frac{U^2}{c_p T_0}$                        | $\frac{\text{Kinetic energy}}{\text{Enthalpy}}$             | Dissipation                 |
| Specific-heat ratio                 | $k = \frac{c_p}{c_v}$                             | $\frac{\text{Enthalpy}}{\text{Internal energy}}$            | Compressible flow           |
| Strouhal number                     | $St = \frac{\omega L}{U}$                         | $\frac{\text{Oscillation}}{\text{Mean speed}}$              | Oscillating flow            |
| Roughness ratio                     | $\frac{\epsilon}{L}$                              | $\frac{\text{Wall roughness}}{\text{Body length}}$          | Turbulent, rough walls      |
| Grashof number                      | $Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\mu^2}$  | $\frac{\text{Buoyancy}}{\text{Viscosity}}$                  | Natural convection          |
| Temperature ratio                   | $\frac{T_w}{T_0}$                                 | $\frac{\text{Wall temperature}}{\text{Stream temperature}}$ | Heat transfer               |
| Pressure coefficient                | $C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2}$ | $\frac{\text{Static pressure}}{\text{Dynamic pressure}}$    | Aerodynamics, hydrodynamics |
| Lift coefficient                    | $C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$          | $\frac{\text{Lift force}}{\text{Dynamic force}}$            | Aerodynamics, hydrodynamics |
| Drag coefficient                    | $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$          | $\frac{\text{Drag force}}{\text{Dynamic force}}$            | Aerodynamics, hydrodynamics |



**Modelo** é uma representação de um sistema físico que pode ser utilizada para prever o comportamento de um sistema com relação a algum aspecto desejado. O sistema físico para o qual as estimativas são feitas é denominado protótipo.

Se  $\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n)$  para um **protótipo**, então:

para o **modelo**: a função  $\phi$  é a mesma,  $\Pi_{1m} = \phi(\Pi_{2m}, \Pi_{3m}, \dots, \Pi_{nm})$ .

Assim diz-se que  $\Pi_1 = \Pi_{1m}$  é a equação de predição,

enquanto  $\Pi_2 = \Pi_{2m}$ ,  $\Pi_3 = \Pi_{3m}$ , ...,  $\Pi_n = \Pi_{nm}$  são as leis de modelagem (ou condições de similaridade).



Plume dispersion in a building complex is studied using scale models located in a large environmental wind tunnel. Spires at the tunnel entrance and roughness elements on the floor of the tunnel are used to create the necessary flow similarity in the test section. The effect of wind speed and direction on the dispersion of a plume can be determined for the geometrically scaled model.



The unwanted collection of debris against bridge piers or at pipe inlets in rivers can cause considerable damage. Appropriate information obtained from carefully conducted model experiments can be used in the design of such structures to reduce the problems involved.

## Exemplo 4



O projeto de um modelo de um rio é baseado na similaridade do número de Froude, sendo o número de Froude,  $Fr = V / (g \cdot y)^{1/2}$ , uma função da velocidade,  $V$ , da água, da profundidade,  $y$ , e da aceleração da gravidade,  $g$ . Se a profundidade do rio for de 3 m e a profundidade do modelo for de 100 mm, que velocidade do protótipo corresponde à velocidade de 2 m/s do modelo?

# Exemplo 4



Para semelhança  $Fr = Fr_m$ :

$$\frac{V}{\sqrt{g \cdot y}} = \frac{V_m}{\sqrt{g \cdot y_m}}$$

$$\Rightarrow V = V_m \sqrt{\frac{y}{y_m}}$$

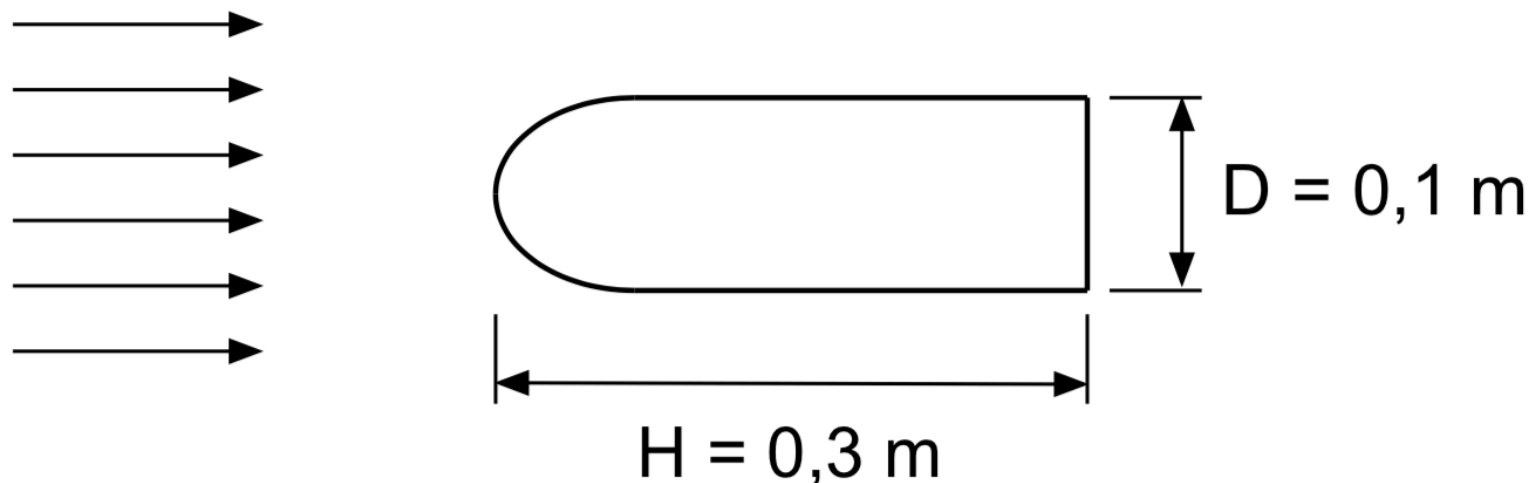
$$\Rightarrow V = 2 \sqrt{\frac{3}{0,1}} = 11,0 m / s$$



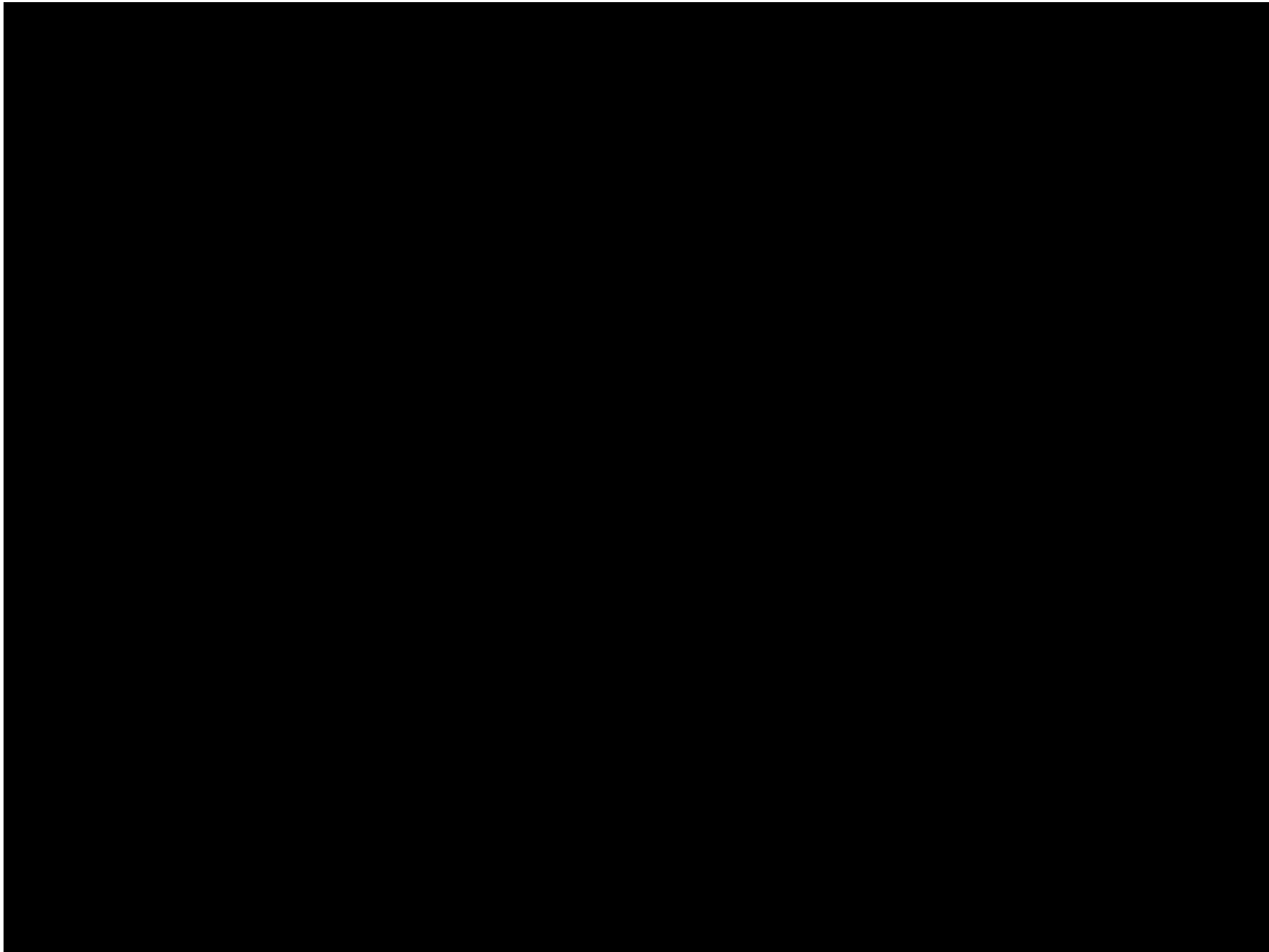
## Exemplo 5



Um longo componente estrutural de uma ponte tem seção transversal dada na figura. O vento gera vórtices no corpo rombudo; a velocidade do vento é de 50 km/h (13,9 m/s); o ar está a 20 °C, a umidade relativa é de 50% e a  $p_{atm}$  é de 760mmHg. A frequência de geração de vórtices vai ser determinada por meio de ensaio em água a 20 °C de um modelo com  $D_m = 20$  mm. Determine a velocidade do teste e  $H_m$ . Se a frequência de geração de vórtices no modelo é de 49,9 Hz, determine o valor correspondente no protótipo.



# Exemplo 5





# Exemplo 5



**Parâmetros envolvidos:**  $V, \rho, H, D, \mu$  e  $\omega$

$\rho, V$  e  $D$

$k = 6$  parâmetros (variáveis) dimensionais.

**MLt:**

|   | $\omega$ | $D$ | $H$ | $V$ | $\rho$ | $\mu$ |
|---|----------|-----|-----|-----|--------|-------|
| M | 0        | 0   | 0   | 0   | 1      | 1     |
| L | 0        | 1   | 1   | 1   | -3     | -1    |
| t | -1       | 0   | 0   | -1  | 0      | -1    |

$$\frac{\omega D}{V} = \phi \left( \frac{D}{H}, \frac{\rho V D}{\mu} \right)$$

## Exemplo 5



Para semelhança:  $D / H = D_m / H_m$

$$\Rightarrow H_m = \frac{D_m}{D} H = 0,06m$$

$$\frac{\rho_{ar} V D}{\mu_{ar}} = \frac{\rho_{\acute{a}gua} V_m D_m}{\mu_{\acute{a}gua}} \quad \Rightarrow V_m = \frac{\mu_{\acute{a}gua}}{\mu_{ar}} \frac{\rho_{ar}}{\rho_{\acute{a}gua}} \frac{D}{D_m} V = 4,65m / s$$

Precisamos determinar as propriedades da água e do ar!

$$\frac{\omega D}{V} = \frac{\omega_m D_m}{V_m} \quad \Rightarrow \omega = \frac{V}{V_m} \frac{D_m}{D} \omega_m = \frac{13,9}{4,65} \frac{0,02}{0,1} 49,9 = 29,8 Hz$$

# Exemplo 5



## Propriedades da água a 1 atm

| $T, ^\circ\text{C}$ | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $\mu, \text{N} \cdot \text{s/m}^2$ | $\nu, \text{m}^2/\text{s}$ |
|---------------------|-----------------------|------------------------------------|----------------------------|
| 0                   | 1000                  | 1.788 E-3                          | 1.788 E-6                  |
| 10                  | 1000                  | 1.307 E-3                          | 1.307 E-6                  |
| 20                  | 998                   | 1.003 E-3                          | 1.005 E-6                  |
| 30                  | 996                   | 0.799 E-3                          | 0.802 E-6                  |
| 40                  | 992                   | 0.657 E-3                          | 0.662 E-6                  |
| 50                  | 988                   | 0.548 E-3                          | 0.555 E-6                  |
| 60                  | 983                   | 0.467 E-3                          | 0.475 E-6                  |
| 70                  | 978                   | 0.405 E-3                          | 0.414 E-6                  |
| 80                  | 972                   | 0.355 E-3                          | 0.365 E-6                  |
| 90                  | 965                   | 0.316 E-3                          | 0.327 E-6                  |
| 100                 | 958                   | 0.283 E-3                          | 0.295 E-6                  |

## Propriedades do ar a 1 atm

| $T, ^\circ\text{C}$ | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $\mu, \text{N} \cdot \text{s/m}^2$ | $\nu, \text{m}^2/\text{s}$ |
|---------------------|-----------------------|------------------------------------|----------------------------|
| -40                 | 1.52                  | 1.51 E-5                           | 0.99 E-5                   |
| 0                   | 1.29                  | 1.71 E-5                           | 1.33 E-5                   |
| 20                  | 1.20                  | 1.80 E-5                           | 1.50 E-5                   |
| 50                  | 1.09                  | 1.95 E-5                           | 1.79 E-5                   |
| 100                 | 0.946                 | 2.17 E-5                           | 2.30 E-5                   |
| 150                 | 0.835                 | 2.38 E-5                           | 2.85 E-5                   |
| 200                 | 0.746                 | 2.57 E-5                           | 3.45 E-5                   |
| 250                 | 0.675                 | 2.75 E-5                           | 4.08 E-5                   |
| 300                 | 0.616                 | 2.93 E-5                           | 4.75 E-5                   |
| 400                 | 0.525                 | 3.25 E-5                           | 6.20 E-5                   |
| 500                 | 0.457                 | 3.55 E-5                           | 7.77 E-5                   |

$$\rho_{\text{água}} = 998 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$\mu_{\text{água}} = 1,003 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\rho_{\text{ar}} = 1,2 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$\mu_{\text{ar}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$V_m = \frac{1,003 \times 10^{-3}}{1,8 \times 10^{-5}} \frac{1,2}{998} \frac{0,1}{0,02} 13,9 = 4,65 \text{ m} / \text{s}$$

# Exercício 1



A elevação de pressão,  $\Delta p$ , por meio de uma bomba pode ser representada como  $\Delta p = f(D, \rho, \omega, Q)$  sendo  $D$ , o diâmetro do impelidor,  $\rho$  a massa específica do fluido,  $\omega$  a velocidade de rotação e  $Q$  a vazão volumétrica. Determine um conjunto de parâmetros adimensionais apropriados.

# Exercício 1



Parâmetros envolvidos:  $\Delta p = f(D, \rho, \omega, Q)$

$$k = 5$$

**MLt:**

|   | $\Delta p$ | D | $\rho$ | Q  | $\omega$ |
|---|------------|---|--------|----|----------|
| M | 1          | 0 | 1      | 0  | 0        |
| L | -1         | 1 | -3     | 3  | 0        |
| t | -2         | 0 | 0      | -1 | -1       |

**5 – 3 = 2 adimensionais**

**Variáveis de repetição: D,  $\omega$  e  $\rho$**

# Exercício 1



$$\Pi_1 = \Delta p \cdot D^a \cdot \omega^b \cdot \rho^c = (M \cdot L^{-1} t^{-2}) \cdot (L)^a \cdot (t^{-1})^b \cdot (M \cdot L^{-3})^c = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$M: 1 + c = 0 \rightarrow c = -1$$

$$L: -1 + a - 3c = 0 \rightarrow a = -2$$

$$t: -2 - b = 0 \rightarrow b = -2$$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho D^2 \omega^2}$$

# Exercício 1



$$\Pi_2 = Q \cdot D^a \cdot \omega^b \cdot \rho^c = (L^3 t^{-1}) \cdot (L)^a \cdot (t^{-1})^b \cdot (M \cdot L^{-3})^c = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$M: c = 0 \rightarrow c = -1$$

$$L: 3 + a - 3c = 0 \rightarrow a = -3$$

$$t: -1 - b = 0 \rightarrow b = -1$$

$$\Pi_2 = \frac{Q}{\omega D^3}$$

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2) \therefore \frac{\Delta p}{\rho D^2 \omega^2} = \phi\left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)$$

## Exercício 2



**Enunciado:** A queda de pressão por unidade de comprimento,  $\Delta p_l = \Delta p/l$ , ( $\text{N/m}^2$ )/m, para o escoamento do sangue através de um tubo horizontal de pequeno diâmetro é uma função da vazão volumétrica,  $\dot{V}$ , do diâmetro,  $D$ , e da viscosidade do sangue,  $\mu$ . Para uma série de testes no qual  $D = 2 \text{ mm}$  e  $\mu = 0,004 \text{ N.s/m}^2$ , foram obtidos os seguintes dados, onde os valores listados de  $\Delta p$  foram medidos ao longo do comprimento,  $l = 300 \text{ mm}$ :

| $\dot{V}$               | $\Delta p$        |
|-------------------------|-------------------|
| $[\text{m}^3/\text{s}]$ | $[\text{N/m}^2]$  |
| $3,6 \times 10^{-6}$    | $1,1 \times 10^4$ |
| $4,9 \times 10^{-6}$    | $1,5 \times 10^4$ |
| $6,3 \times 10^{-6}$    | $1,9 \times 10^4$ |
| $7,9 \times 10^{-6}$    | $2,4 \times 10^4$ |
| $9,8 \times 10^{-6}$    | $3,0 \times 10^4$ |

Desenvolva uma análise dimensional para este problema e utilize os dados fornecidos na Tabela acima para determinar uma relação geral entre  $\Delta p_l$  e  $\dot{V}$  que seja válida para outros valores de  $D$ ,  $l$  e  $\mu$ .



# Exercício 2



**Parâmetros envolvidos:**  $\Delta p_l = f(Q, D, \mu)$

$$k = 4$$

**FLt:**

|   | $\Delta p_l$ | D | $\mu$ | Q  |
|---|--------------|---|-------|----|
| F | 1            | 0 | 1     | 0  |
| L | -3           | 1 | -2    | 3  |
| t | 0            | 0 | 1     | -1 |

**4 – 3 = 1** adimensional

**Variáveis de repetição:** Q, D,  $\mu$

## Exercício 2



$$\Pi_1 = \Delta p_l \cdot D^a \cdot Q^b \cdot \mu^c = (F \cdot L^{-3}) \cdot (L)^a \cdot (L^3 \cdot t^{-1})^b \cdot (F \cdot L^{-2} \cdot t^{-1})^c = F^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$F: 1 + c = 0 \rightarrow c = -1$$

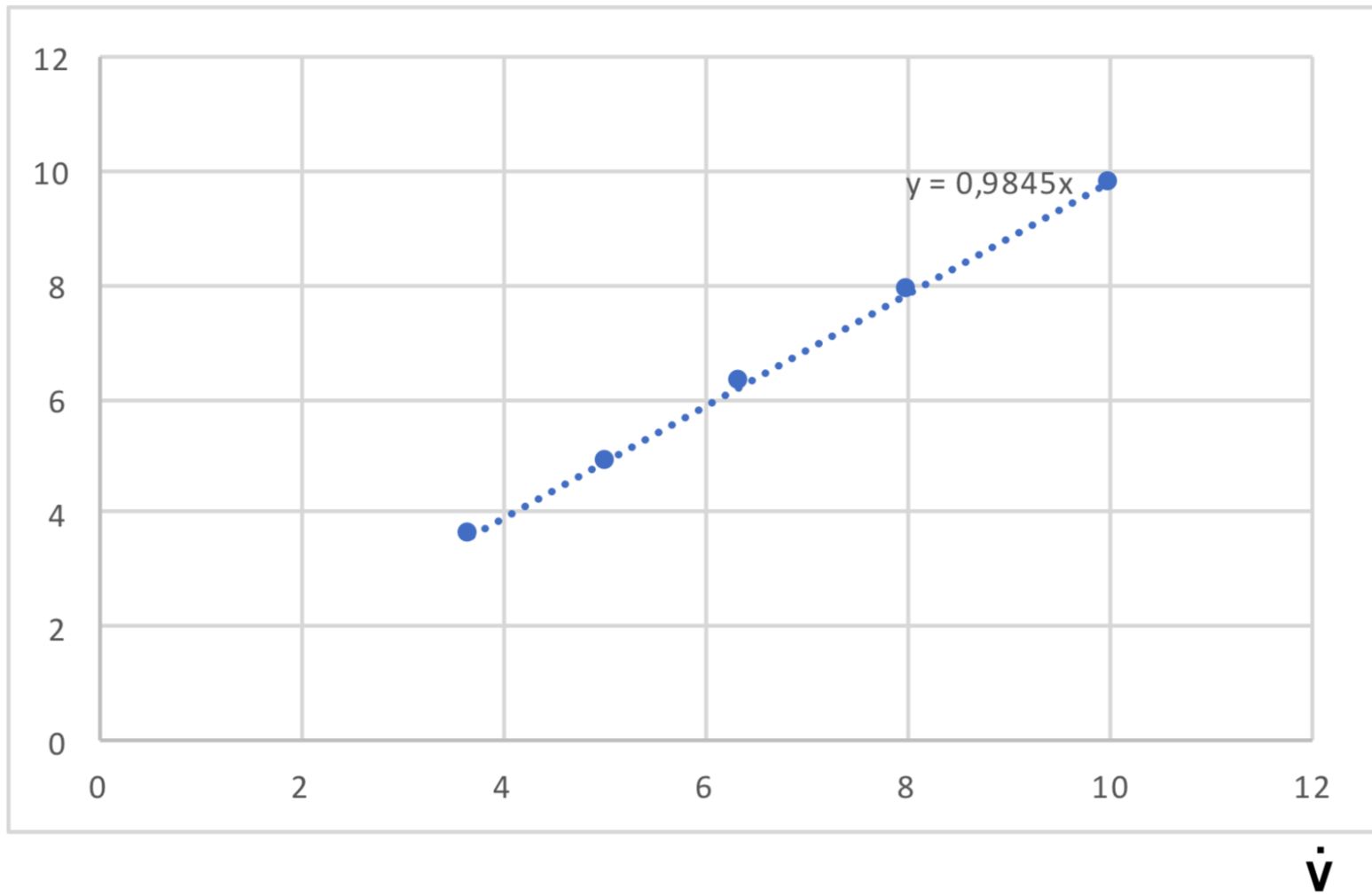
$$L: -3 + a + 3b - 2c = 0 \rightarrow a = 4$$

$$t: -b - c = 0 \rightarrow b = -1$$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_l D^4}{Q \mu} = cte$$

$$\Delta p_l = cte \cdot \frac{\mu}{D^4} Q \quad \Rightarrow \quad \alpha = cte \cdot \frac{\mu}{D^4}$$

$\Delta P_1 \cdot 10^{-4}$



| $\Delta P_1 \cdot 10^{-4}$ (Pa/m) | $V \cdot 10^6$ (m <sup>3</sup> /s) |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| 3,7                               | 3,6                                |
| 5,0                               | 4,9                                |
| 6,3                               | 6,3                                |
| 8,0                               | 7,9                                |
| 10,0                              | 9,8                                |

$$\Rightarrow cte = \frac{D^4}{\mu} \cdot 0,9845 = 3,938 \times 10^{-9}$$

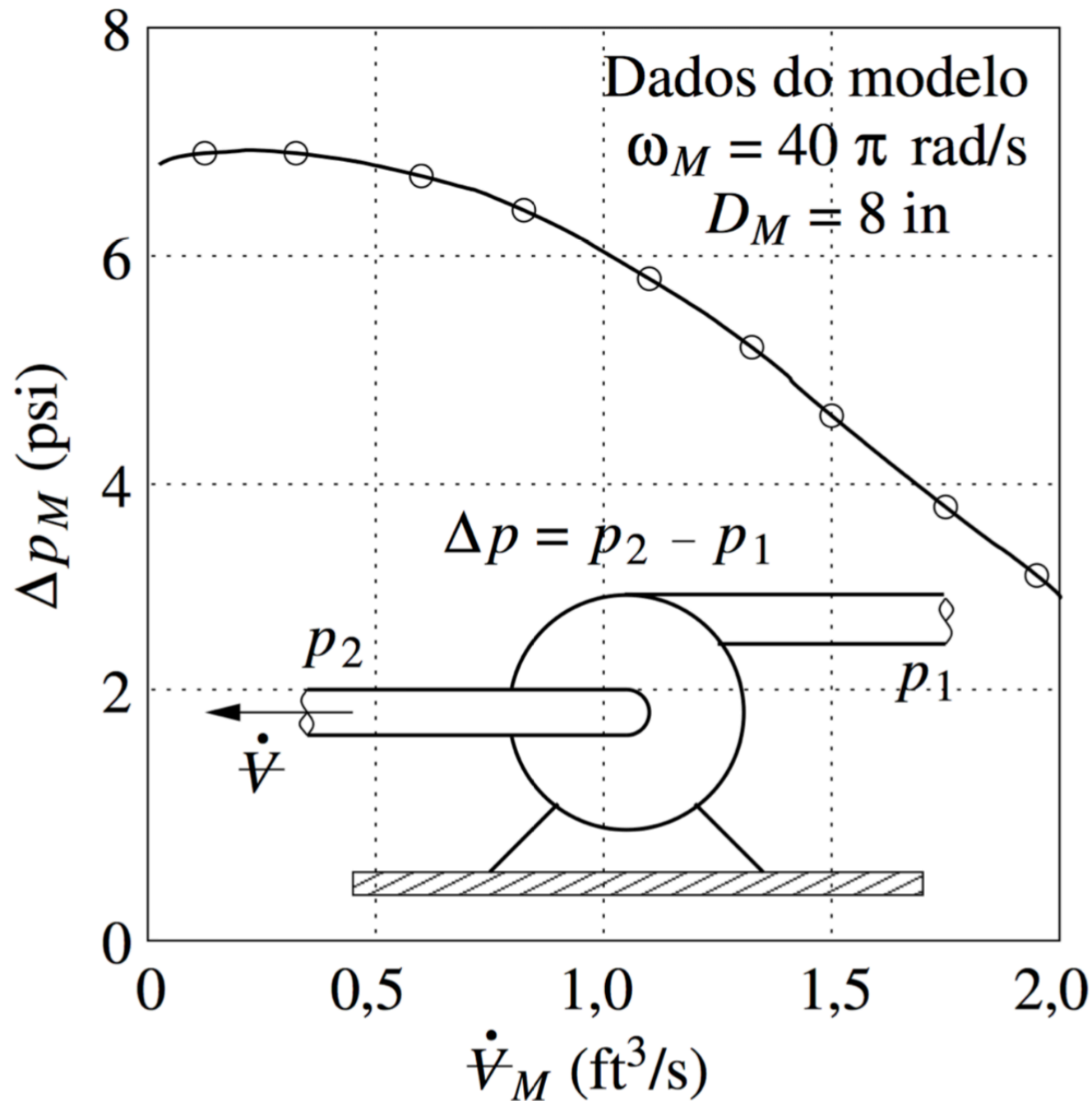
**Qual a unidade?**

## Exercício 3



**Enunciado:** A elevação de pressão,  $\Delta p$ , por meio de uma bomba centrífuga de uma dada forma (veja Figura a seguir) pode ser expressa por  $\Delta p = f(D, \omega, \rho, \dot{V})$  onde  $D$  é o diâmetro do impelidor,  $\omega$  é a velocidade angular do impelidor,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $\dot{V}$  é a vazão volumétrica através da bomba. Um modelo de bomba com um diâmetro de 8 in (= 0,2032 m) é testado em laboratório, utilizando água. Quando operando a uma velocidade angular de  $40\pi$  rad/s, a elevação da pressão no modelo em função de  $\dot{V}$  é mostrada na Figura a seguir. Utilize essa curva para estimar o aumento de pressão por meio de uma bomba geometricamente semelhante (protótipo) para uma vazão no protótipo de  $6 \text{ ft}^3/\text{s}$  (=  $0,17 \text{ m}^3/\text{s}$ ). O protótipo tem um diâmetro de 12 in (= 0,3048 m) e opera a uma velocidade angular de  $60\pi$  rad/s. O fluido do protótipo também é água.

# Exercício 3



# Exercício 3



Para semelhança:

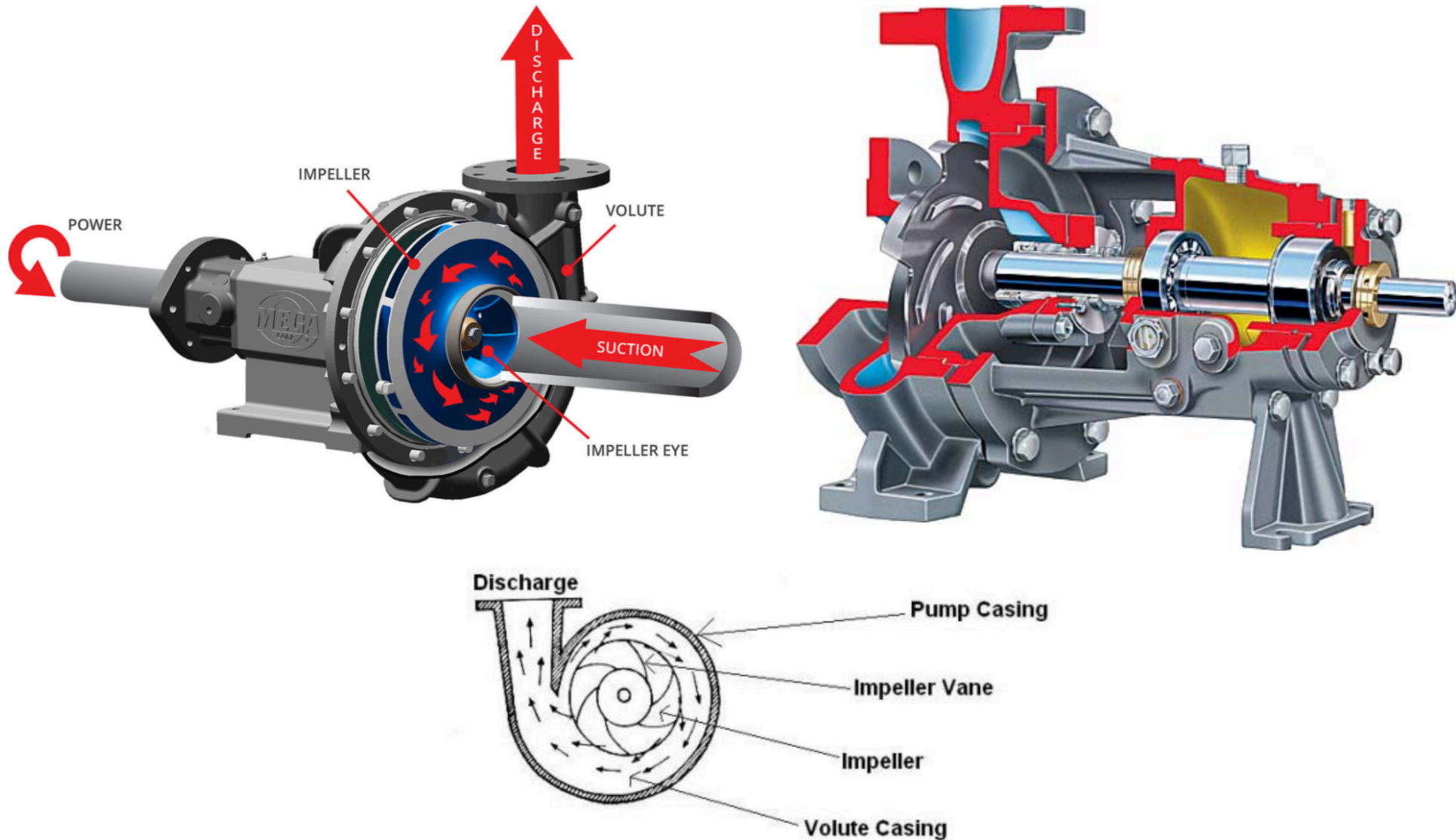
$$\frac{Q}{\omega D^3} = \frac{Q_m}{\omega_m D_m^3} \Rightarrow Q_m = \frac{\omega_m D_m^3}{\omega D^3} Q = \frac{40\pi}{60\pi} \frac{8^3}{12^3} 6 = 1,2 \text{ ft}^3 / \text{s}$$

$$\Rightarrow Q_m = 1,2 \text{ ft}^3 / \text{s}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho D^2 \omega^2} = \frac{\Delta p_m}{\rho_m D_m^2 \omega_m^2} \Rightarrow \Delta p = \left( \frac{D}{D_m} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \Delta p_m$$

$$\Rightarrow \Delta p = \left( \frac{12}{8} \right)^2 \left( \frac{60}{40} \right)^2 5,6 = 28 \text{ psi}$$

# Exercício 3



Fonte: <http://www.flexachem.com/cpx-iso-overhung-single-stage-process-pump/>



# Exercício proposto 1



**Enunciado:** A velocidade,  $V$ , de uma partícula esférica caindo lentamente em um líquido muito viscoso pode ser expressa por  $V = f(d, \mu, \gamma, \gamma_s)$  onde  $d$  é o diâmetro da partícula,  $\mu$  é a viscosidade do líquido e  $\gamma$  e  $\gamma_s$  são os pesos específicos do líquido e da partícula, respectivamente. Desenvolva um conjunto de parâmetros adimensionais que possam ser utilizados neste problema.

*Resposta:* 
$$\frac{V \cdot \mu}{d^2 \cdot \gamma} = \phi \left( \frac{\gamma_s}{\gamma} \right)$$



# Exercício proposto 2



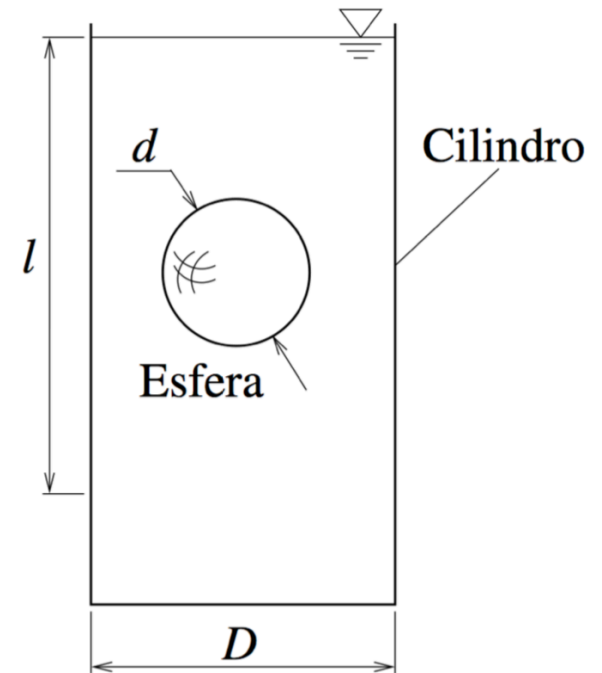
**Enunciado:** A sustentação e o arraste de um hidrofólio devem ser determinados através de teste em túnel de vento utilizando ar padrão. Se houver necessidade de realizar testes correspondentes à escala plana, qual a velocidade necessária no túnel de vento correspondente à velocidade do hidrofólio na água do mar de 20 mph (= 8,94 m/s)? Admita a similaridade do número de Reynolds.

*Resposta:*  $V_m \cong 111,6$  m/s.

# Exercício proposto 3



**Enunciado:** A viscosidade,  $\mu$ , de um líquido pode ser medida através da determinação do tempo,  $t$ , tomado por uma esfera de diâmetro,  $d$ , para cair lentamente através de uma distância,  $l$ , em um cilindro vertical de diâmetro,  $D$ , contendo o líquido (Figura ao lado). Admita que  $t = f(l, d, D, \mu, \Delta\gamma)$ , onde  $\Delta\gamma$  é a diferença entre os pesos específicos da esfera e do líquido. Utilize análise dimensional para mostrar como  $t$  é relacionado com  $\mu$  e descreva como esse instrumento pode ser utilizado para medir viscosidade.

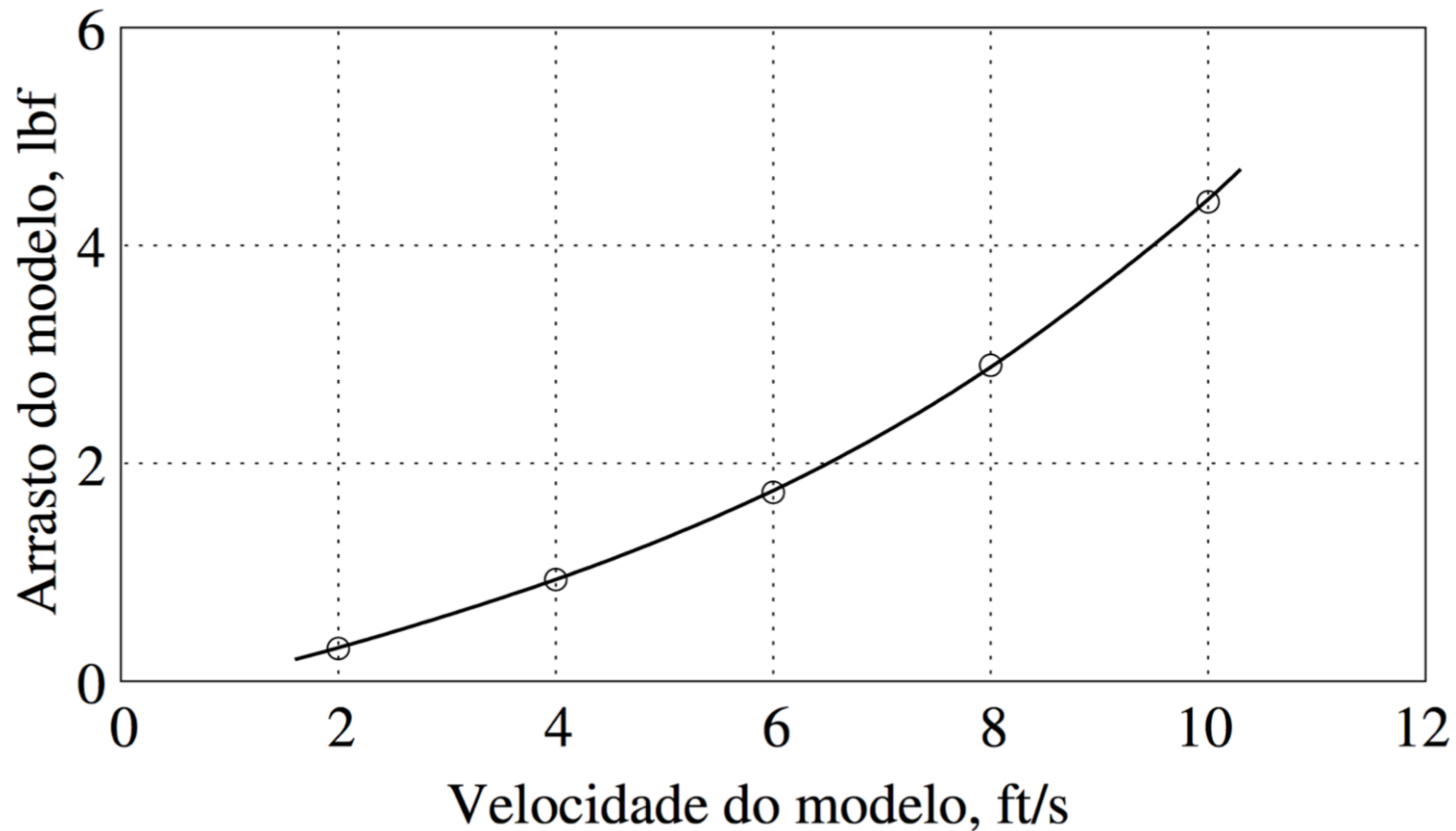


# Exercício proposto 4



**Enunciado:** O arraste sobre uma esfera em movimento no interior de um fluido é uma função do diâmetro, da velocidade da esfera, da viscosidade e da massa específica do fluido. Testes em laboratório com uma esfera de 4 in (= 0,1016 m) de diâmetro foram realizados em um túnel de água e alguns dados do modelo foram representados graficamente na Figura a seguir. Para esses testes a viscosidade da água foi de  $2,3 \times 10^{-5}$  lbf.s/ft<sup>2</sup> (=  $1,10124 \times 10^{-3}$  N.s/m<sup>2</sup>) e a massa específica da água foi de 1,94 slug/ft<sup>3</sup> (= 999,876 kg/m<sup>3</sup>). Estime o arraste em um balão de 8 ft (= 2,4384 m) de diâmetro movendo-se no ar com uma velocidade de 3 ft/s (= 0,9144 m/s). Admita o ar com uma viscosidade de  $3,7 \times 10^{-7}$  lbf.s/ft<sup>2</sup> (=  $1,7716 \times 10^{-5}$  N.s/m<sup>2</sup>) e uma massa específica de  $2,38 \times 10^{-3}$  slug/ft<sup>3</sup> (= 1,2267 kg/m<sup>3</sup>). Admita semelhança do número de Reynolds.

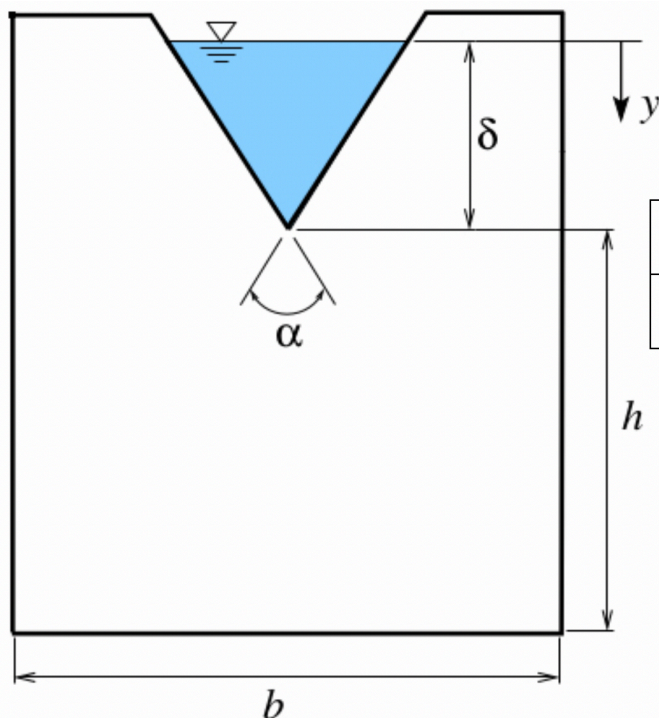
# Exercício proposto 4



*Resposta:* 1,22 N (o resultado deste exercício admite variações dentro de uma faixa de 10% em torno da resposta dada).

Um dispositivo simples para medir a vazão em cursos d'água e canais é um vertedouro triangular de ângulo  $\alpha$ , construído na parede de uma barragem. A vazão volumétrica,  $Q$ , depende somente de  $\alpha$ , do módulo da aceleração da gravidade,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , e da altura da superfície de água acima do vértice do triângulo,  $\delta$ . Os testes com um modelo de vertedouro triangular, de ângulo  $\alpha = 50^\circ$ , forneceram os dados tabelados. Pede-se:

- (a) encontrar a relação adimensional para as grandezas relevantes do problema;
- (b) usar os dados do modelo para prever a vazão de um protótipo de vertedouro triangular, também de ângulo  $\alpha = 50^\circ$ , quando a altura  $\delta$  for de 3 m.



|               |      |       |       |       |
|---------------|------|-------|-------|-------|
| $\delta$ [mm] | 100  | 200   | 300   | 400   |
| $Q$ [L/s]     | 2,22 | 13,06 | 35,00 | 73,06 |





(a)  $Q = f(\alpha, g, \delta)$ . Porém, o ângulo  $\alpha$  já é adimensional!

$Q \rightarrow L^3.t^{-1}$ ;  $g \rightarrow L.t^{-2}$ ;  $\delta \rightarrow L$ ;  $\alpha \rightarrow [ ]$ . São, portanto 4 variáveis e duas dimensões básicas, o que resulta em dois grupos adimensionais. Como  $\alpha$  já é um deles,  $\Pi_2 = \alpha$ , resulta:

$$\Pi_1 = Q.g^a.\delta^b : L^3.t^{-1} . (L.t^{-2})^a . L^b = L^0.t^0; \text{ de onde resultam } a = -1/2 \text{ e } b = -5/2: \quad \Pi_1 = \frac{Q}{\sqrt{g}.\delta^5}$$

Assim,

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2) \Rightarrow \frac{Q}{\sqrt{g}.\delta^5} = \phi(\alpha)$$

(b) Utilizando os dados tabelados (convertidos ao SI) para o modelo, obtém-se:

|               |        |        |        |        |
|---------------|--------|--------|--------|--------|
| $\delta$ [mm] | 100    | 200    | 300    | 400    |
| $Q$ [L/s]     | 2,22   | 13,06  | 35,00  | 73,06  |
| $\Pi_1$       | 0,2241 | 0,2331 | 0,2267 | 0,2305 |

Como se pode observar, os resultados sugerem que  $\Pi_1$  é constante para  $\alpha = 50^\circ$ . O valor médio de  $\Pi_1$  é 0,2286. Assim, para o protótipo pode-se utilizar este resultado.

$$Q_P = \Pi_1 . g_P^{1/2} . \delta_P^{5/2} = 0,2286 . 9,81^{1/2} . 3^{5/2}$$

$$Q_P = 11,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

# Links dos vídeos



[https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video\\_lib/chapter07/ch07\\_v7\\_1.html](https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video_lib/chapter07/ch07_v7_1.html)

[https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video\\_lib/chapter07/ch07\\_v7\\_2.html](https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video_lib/chapter07/ch07_v7_2.html)

[https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video\\_lib/chapter07/ch07\\_v7\\_3.html](https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video_lib/chapter07/ch07_v7_3.html)

[https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video\\_lib/chapter07/ch07\\_v7\\_4.html](https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video_lib/chapter07/ch07_v7_4.html)

[https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video\\_lib/chapter07/ch07\\_v7\\_5.html](https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video_lib/chapter07/ch07_v7_5.html)

[https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video\\_lib/chapter07/ch07\\_v7\\_9.html](https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video_lib/chapter07/ch07_v7_9.html)

[https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video\\_lib/chapter07/ch07\\_v7\\_17.html](https://www.wiley.com/college/munson/1118116135/video_lib/chapter07/ch07_v7_17.html)

<https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>