Teorema de Transporte de Reynolds e Leis Integrais

EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO NA FORMA INTEGRAL

Prof. Marcos Tadeu Pereira

PME3230 – 2019

2ª Lei de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext}\Big|_{sist} = m\vec{a}\Big|_{sist} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_{sist} = \frac{dm\vec{v}}{dt}\Big|_{sist}$$

$$\left(pois\,\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}\ \ ,e\ \frac{dm}{dt} = 0\right)$$

∴ *2ª lei de Newton:* "a "soma das forças externas que atuam no sistema = taxa de variação temporal da quantidade de movimento χ no sistema" :

$$\sum \vec{F}_{ext}\Big|_{sist} = \frac{d\chi}{dt}\Big|_{sist}$$

Como $m\vec{v} = \vec{\chi}$, pode-se usar no Teorema de Transporte de Reynolds:

$$N = \vec{\chi} = m\vec{v} \quad e \;\; \eta = \frac{N}{m} = \frac{\vec{\chi}}{m} = \vec{v}$$

e resulta na **Equação Integral da Quantidade de Movimento**:

$$\left.\frac{dm\vec{v}}{dt}\right|_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{v}\rho d\boldsymbol{V} + \int_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

Para usar o TTR, o volume de controle deve ser coincidente com o sistema em um dado instante, então as forças que atuam no sistema e as forças que atuam no volume de controle são iguais, neste instante:

$$\vec{F}_{ext}\Big|_{sist} = \vec{F}_{ext}\Big|_{VC}$$

o que gera a **Equação Geral** da Quantidade de Movimento:

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{ext}}_{sistema} = \underbrace{\sum \vec{F}_d + \sum \vec{F}_c}_{\substack{\Sigma \text{ das forças externas} \\ \text{à distância } (g,\beta,E) \text{ e de} \\ \text{contato (pressão e atrito)} \\ \text{atuando sobre o VC}}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\vec{v}\,dV}_{\substack{\text{taxa de variação} \\ \text{da QDM no VC}}} + \underbrace{\int_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}.\vec{n}\,dS}_{\substack{\text{fluxo da QDM} \\ \text{através da SC}}}$$

Equação geral, restrita a um VC inercial, qdo VC≡Sistema

Observações importantes:

1) A velocidade $\vec{v}$ é referida a um sistema de coord. inercial
2) O fluxo da QDM através de elemento de área ds é um vetor $(\vec{v}\rho\vec{v}.\vec{n}ds)$, onde:

2.1) $\rho\vec{v}.\vec{n}ds$ tem o sinal de $\vec{v}.\vec{n}$:

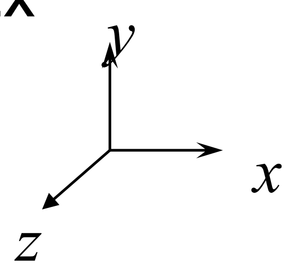
>0 nas saídas

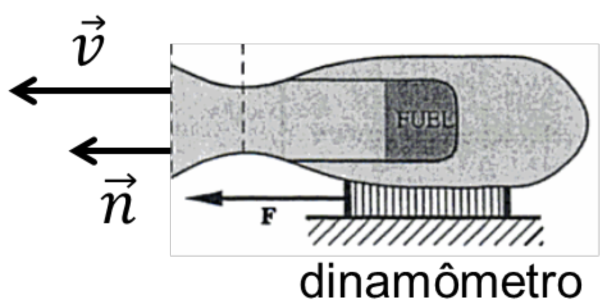
<0 nas entradas

$\equiv 0$ quando $\vec{v} = 0 \; ou \; \vec{v} \perp \vec{n}$

2.2) a direção da QDM é dada por $\vec{v}$, que depende só do sistema de coordenadas escolhido

Ex





$\rho\vec{v}.\vec{n}ds > 0 \; e$

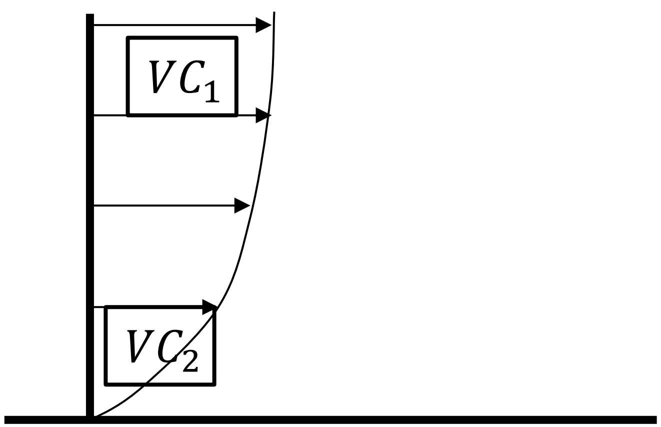
$\vec{\chi} = (-v)(\rho v S)\vec{i}$

Cuidado com o termo de fluxo $\int_{SC} \vec{v}\rho\vec{v}.\vec{n}dS$.

Podem-se obter forças bem diferentes com soluções diferentes e específicas para cada situação.

Observe que a **QDM é completamente diferente** nos volumes de controle tomados na figura abaixo.

Use o VC para obter as forças de interesse.



3) Como a QDM é vetorial, pode ser escrita na forma de equações escalares das componentes x, y e z

$$\sum F_{ext_x} = \sum F_{d_x} + \sum F_{c_x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\boldsymbol{V}C} v_x\,\rho d\boldsymbol{V} + \int_{SC} v_x\,\rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

$$\sum F_{ext_y} = \sum F_{d_y} + \sum F_{c_y} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\boldsymbol{V}C} v_y\,\rho d\boldsymbol{V} + \int_{SC} v_y\,\rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

$$\sum F_{ext_z} = \sum F_{d_z} + \sum F_{c_z} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\boldsymbol{V}C} v_z\,\rho d\boldsymbol{V} + \int_{SC} v_z\,\rho\vec{v}.\vec{n}dS$$

Casos particulares

Hipótese 1. As **forças de campo** se restringem à força peso

$$\sum \vec{F}_d = \vec{G} = \int_m \vec{g}\, dm = \int_{\boldsymbol{V}} \vec{g} \rho\, d\boldsymbol{V} \qquad (\mathbf{1})$$

e as **forças de contato** são as viscosas e as de pressão

$$\sum \vec{F}_c = \int_{SC} \vec{\tau}\, dS - \int_S p \vec{n}\, dS \qquad (\mathbf{2})$$

o sinal é negativo por causa da convenção de $\vec{n}$ apontar sempre para fora da SC

$SC = \sum S_e + \sum S_s + \Sigma$,onde Σ é a soma das superfícies laterais do corpo

Com a hipótese de forças de campo e de contato, pode-se reescrever a equação geral da QDM:

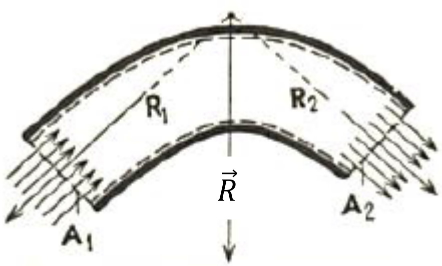
$$\sum \vec{F}_{ext} = \underbrace{\int_{\sum S_e} -p_e \vec{n} dS_e + \int_{\sum S_s} -p_s \vec{n} dS_s + \int_{\sum S_e + \sum S_s} \vec{\tau} dS}_{\substack{forças\ atuando\ em\ \sum S_e\ e\ \sum S_s \\ (entradas\ e\ saidas\ de\ fluidos)}} + \underbrace{\int_{\Sigma} -p_{\Sigma} \vec{n} dS_{\Sigma} + \int_{\Sigma} \vec{\tau}_{\Sigma} dS_{\Sigma}}_{\substack{atuando\ em\ \Sigma \\ (paredes)}}$$

Pode-se definir ainda:

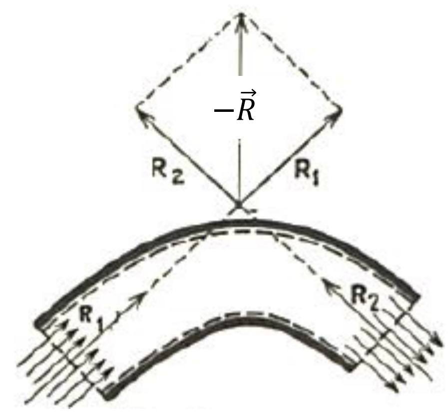
$$\vec{R} = \int_{\Sigma} -p_{\Sigma} \vec{n} dS_{\Sigma} + \int_{\Sigma} \vec{\tau}_{\Sigma} dS_{\Sigma} \qquad \mathbf{(3)}$$

onde $\vec{R}$ é *a resultante das forças do* ***duto sobre o fluido***

Observe que, normalmente, o projetista está interessado em descobrir o valor da força do fluido sobre a tubulação, ou seja, em $-\vec{R}$:

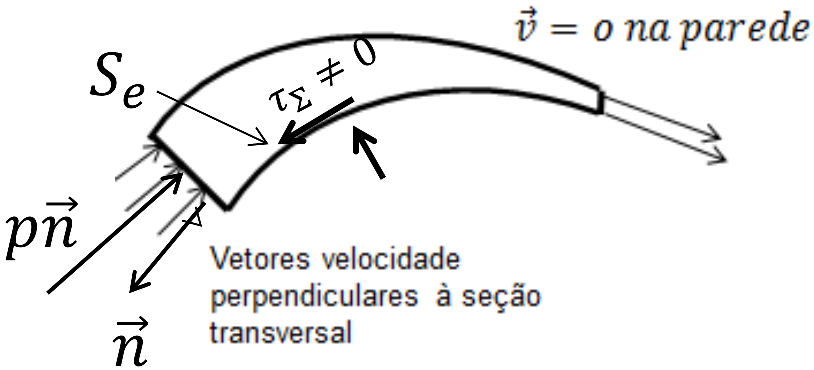


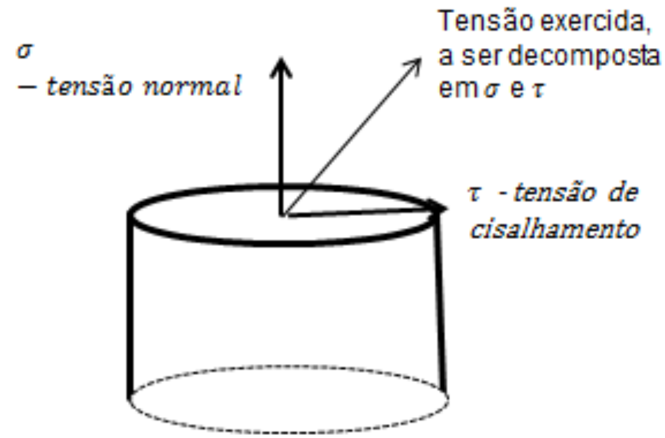
$\overrightarrow{R}$: $força\ do\ duto$ $sobre\ o\ fluido$



$-\overrightarrow{R}$: $força\ do\ fluido$ $sobre\ o\ duto$

Hipótese 2: trajetórias retilíneas e paralelas em todas $S_e e\ S_s$





Trajetórias retilíneas e paralelas nas entradas e saídas ⟶ as tensões nas superfícies $\sum S_e\ e\ \sum S_s$ se reduzem apenas às tensões normais devidas às forças de pressão. Isto ocorre quando se considera a distribuição de velocidades uniforme, o que ocorre **aproximadamente** nos escoamentos turbulentos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \cong 0 \ \rightarrow \int_{\sum S_e} \tau dS = \int_{\sum S_s} \tau dS = 0 \qquad \mathbf{(4)}$$

Pela hipótese 2 podem-se escrever os termos da equação geral da QDM em termos dos valores médios (equações 5)

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_{\sum S_e} -p_e \vec{n}\, dS_e = \sum -p_e \vec{n}_e S_e \\
&\int_{\sum S_s} -p_s \vec{n}\, dS_s = \sum -p_s \vec{n}_s S_s \\
&\int_{\sum S_e} \vec{v} \rho \vec{v}.\vec{n}\, dS = \sum \beta_e \vec{v}_e \dot{m}_e \vec{n}_e \\
&\int_{\sum S_s} \vec{v} \rho \vec{v}.\vec{n}\, dS = \sum \beta_s \vec{v}_s \dot{m}_s \vec{n}_s \\
&\int_{\Sigma} \vec{v} \rho \vec{v}.\vec{n}\, dS = 0 \qquad (\vec{v} = 0 \; ou \; \vec{v} \perp \vec{n})
\end{aligned}
\right] \rightarrow \quad (5)
$$

$$\beta = \frac{1}{s} \int_{s} \left(\frac{v}{V}\right)^2 dS$$

Substituindo as equações (1) a (5) na Equação Geral da QDM, resulta

$$\vec{G} + \vec{R} - \sum p_e \vec{n}_e S_e - \sum p_s \vec{n}_s S_s =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{VC} \rho \vec{v} dV + \sum \beta_e \vec{v}_e \dot{m}_e \vec{n}_e + \sum \beta_s \vec{v}_s \dot{m}_s \vec{n}_s$$

Ou

$$\boldsymbol{\vec{G} + \vec{R} = \sum (p_e S_e + \beta_e V_e \dot{m}_e)\overrightarrow{n}_e + \sum (p_s S_s + \beta_s V_s \dot{m}_s)\overrightarrow{n}_s + \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{VC} \rho \vec{v} dV}$$

Alguns definem ainda a Função Impulso: $\emptyset = pS + \beta \dot{m} v$, com dimensão de força.