Análise Com Volumes de Controle Finitos: Conservação da Quantidade de Movimento Linear

PME 3222 - Mecânica dos Fluidos para Eng. Civil

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

1° Semestre de 2020

Conteúdo da Aula

Introdução

Neste tópico estuda-se a conservação da quantidade de movimento (linear) via análise integral para volumes de controle (VC). O objetivo é o desenvolvimento matemático da Segunda Lei de Newton que seja adequado e aplicável a um VC.

A Segunda Lei de Newton foi formulada da seguinte maneira, para um sistema: *a variação temporal (taxa) da quantidade de movimento é igual à massa vezes a aceleração do corpo*. Designando por $\vec{P}$ a quantidade de movimento linear e recordando que, para sistemas, a massa, m, é fixa, segue-se que:

$$\vec{P} = m.\vec{V} \therefore \frac{d\vec{P}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = m.\vec{a} = \vec{F}_R$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{F}_R$ são a aceleração e a força resultante sobre o sistema, respectivamente.

Volumes de Controle Inerciais

Para um VC inercial (não acelerado) em relação a um sistema de referência estacionário (inercial), tomado num instante t_0 para o qual VC e sistema coincidem:

$$\vec{F}_R = \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \right)_{sist} \tag{1}$$

onde,

$$(\vec{P})_{sist} = \int_{massa} \vec{V} dm = \int_{V_{sist}} \vec{V}.\rho.d\mathcal{V} \tag{2}$$

$\vec{F}_R$ é a soma das forças atuantes sobre o sistema (ou VC no instante t_0). Neste curso consideramos que ela é dada pela soma das forças de superfície, $\vec{F}_S$, sobre todos os fluidos e sólidos delimitados pela SC, mais todas as forças de campo, $\vec{F}_B$, atuando sobre o VC. O único campo que será considerado neste curso será o gravitacional. Portanto, $\vec{F}_B$ atua sobre a massa no interior do VC.

Volumes de Controle Inerciais

Assim,

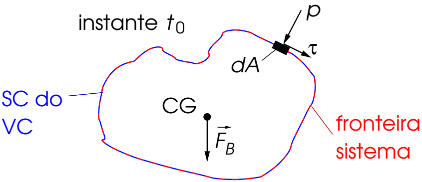
$$\vec{F}_R = \vec{F}_S + \vec{F}_B \quad (3)$$

onde,

$$\vec{F}_B = \int_{VC} \vec{g}.\rho.d\mathcal{V} \quad (4)$$

e,

$$\vec{F}_S = \vec{F}_{pres} + \vec{F}_{cis} = \int_A -p.d\vec{A} + \int_A \tau.d\vec{A} \quad (5)$$



OBS: quando houver outras forças de superfície agindo sobre o VC além da–quelas devidas à tensão de cisalhamento ou pressão, estas deverão ser contabili–zadas em $\vec{F}_S$

Volumes de Controle Inerciais

Aplicando o TTR com $N = \vec{P}$ e $\eta = \vec{V}$, obtém-se:

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} \vec{V}.\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A} \tag{6}$$

Substituindo a Eq. (3) na Eq. (6) resulta:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} \vec{V}.\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A} \tag{7}$$

Assim, a soma de todas as forças atuando no VC sem aceleração, é igual à variação temporal da quantidade de movimento no interior do VC, somada com o fluxo de quantidade de movimento através da SC.

Volumes de Controle Inerciais: Considerações

- Fixar os limites do VC e indicar as direções convenientes das coordenadas;
- $\vec{V}$ é medida em relação ao VC;
- Componentes direcionais (escalares). Exemplo para direção x:

$$F_{S,x} + F_{B,x} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} u.\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A}$$

- Determinação do sinal de $\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A} = \rho.|\vec{V}|.|d\vec{A}|.\cos\alpha$, onde α é o ângulo entre $\vec{V}$ e $\vec{A}$;
- Os sinais de u, v e w (componentes de $\vec{V}$ nas direções x, y z, respectivamente) devem ser cuidadosamente avaliados com base no esquema do VC e do sistema de coordenadas adotado. Direções desconhecidas implicarão em resultados negativos (se a escolha foi errada - no sentido do vetor), ou positivos (se a escolha foi correta). O mesmo vale para F_x, F_y e F_z.

Volume de Controle Dotado de Velocidade Constante

Na formulação precedente considerou-se apenas VC's estacionários. Supondo, agora, que o VC possua movimento com velocidade constante, deve-se especificar dois sistemas de coordenadas: o referencial *XYZ* das coordenadas estacionárias original (inercial); e o referencial *xyz* das coordenadas fixas ao VC (neste caso, também inercial, pois o VC está se movendo com velocidade constante).

Vale a Eq. (7) para este caso também, tomando cuidado apenas em referenciar corretamente as velocidades do sistema *xyz*:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}.\rho.\vec{V}_{xyz} \bullet d\vec{A} \qquad (8)$$

$\vec{V}_{xyz}$ seria a velocidade percebida por um observador situado na SC do VC.

Volume de Controle Dotado de Aceleração Retilínea

Nem todos os VC's são inerciais. Por exemplo, um foguete, ao elevar-se do solo deve possuir aceleração. As expressões,

$$\vec{F}_R = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sist} \quad \text{em que } (\vec{P})_{sist} = \int_{m_{sist}} \vec{V}.dm = \int_{V_{sist}} \vec{V}.\rho.d\mathcal{V}$$

são válidas somente para velocidades medidas em relação a um sistema de referência inercial, que anteriormente foi designado por XYZ. Logo $\vec{F}_R = (d\vec{P}_{XYZ}/dt)_{sist}$.

Deste modo, como $(d\vec{P}_{XYZ}/dt)_{sist} \neq (d\vec{P}_{xyz}/dt)_{sist}$, para um sistema dotado de aceleração as Eqs. (7) e/ou (8) não são mais válidas. Na verdade, para o sistema deve-se escrever:

$$\vec{F}_R = \left(\frac{d\vec{P}_{XYZ}}{dt}\right)_{sist} = \frac{d}{dt}\int_{m_{sist}} \vec{V}_{XYZ}.dm = \int_{m_{sist}} \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt}\cdot dm = \int_{m_{sist}} \vec{a}_{XYZ}.dm \tag{9}$$

Volume de Controle Dotado de Aceleração Retilínea

Como,

$$\vec{V}_{XYZ} = \vec{V}_{xyz} + \vec{V}_{rf} \tag{10}$$

onde $\vec{V}_{rf}$ é a velocidade do referencial do volume de controle (velocidade do sistema xyz em relação a XYZ). Assim,

$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} = \vec{a}_{XYZ} = \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{rf}}{dt} = \vec{a}_{xyz} + \vec{a}_{rf} \tag{11}$$

Especificamente:

- $\vec{a}_{XYZ} \equiv$ aceleração retilínea do sistema relativa ao sistema inercial de referência XYZ;
- $\vec{a}_{xyz} \equiv$ aceleração retilínea do sistema relativa ao sistema não-inercial de referência xyz;
- $\vec{a}_{rf} \equiv$ aceleração retilínea do sistema não-inercial de referência xyz em relação ao sistema inercial XYZ.

Volume de Controle Dotado de Aceleração Retilínea

A força resultante que atua sobre o sistema pode ser escrita e desenvolvida da seguinte maneira:

$$\vec{F}_{R_{sist}} = \int_{m_{sist}} \vec{a}_{XYZ}.dm = \int_{m_{sist}} \left(\vec{a}_{xyz} + \vec{a}_{rf}\right).dm$$

$$\vec{F}_{R_{sist}} - \int_{m_{sist}} \vec{a}_{rf}.dm = \int_{m_{sist}} \vec{a}_{xyz}.dm \tag{12}$$

Como,

$$\vec{a}_{xyz} = \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt}$$

segue-se que:

$$\vec{F}_{R_{sist}} - \int_{m_{sist}} \vec{a}_{rf}.dm = \int_{m_{sist}} \frac{d\vec{V}_{xyz}}{dt} \cdot dm = \frac{d}{dt}\int_{m_{sist}} \vec{V}_{xyz}.dm = \left(\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{sist} \tag{13}$$

Volume de Controle Dotado de Aceleração Retilínea

Uma vez que $dm = \rho.d\mathcal{V}$, segue-se que:

$$\vec{F}_{R_{sist}} - \int_{m_{sist}} \vec{a}_{rf}.dm = \vec{F}_{R_{sist}} - \int_{VC} \vec{a}_{rf}.\rho.d\mathcal{V} \qquad (14)$$

onde a integral no VC na Eq. (14) deve ser entendida como tomada no instante t_0 em que sistema e VC coincidem. Portanto a Eq. (13) pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{sist} = \vec{F}_{R_{sist}} - \int_{VC} \vec{a}_{rf}.\rho.d\mathcal{V} \qquad (15)$$

Do TTR:

$$\left(\frac{d\vec{P}_{xyz}}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}.\rho.\vec{V}_{xyz} \bullet d\vec{A} \qquad (16)$$

Substituindo a Eq. (15) na Eq. (16) e recordando que

$$\vec{F}_{R_{sist}} = \left(\vec{F}_S + \vec{F}_B\right)_{sist}$$

resulta:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_B - \int_{VC} \vec{a}_{rf}.\rho.d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}_{xyz}.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} \vec{V}_{xyz}.\rho.\vec{V}_{xyz} \bullet d\vec{A} \tag{17}$$

Valem as mesmas considerações levantadas para VC inercial com relação a sinais e decomposição vetorial.

Fator de Correção do Fluxo de Quantidade de Movimento

Para escoamentos em dutos, a velocidade axial normalmente não é uniforme. Neste caso o cálculo do fluxo de quantidade de movimento,

$$\int_{SC} \vec{V}_{xyz}.\rho.\vec{V}_{xyz} \bullet d\vec{A} = \overline{V}.\dot{m} = \rho.A.\overline{V}^2$$

é relativamente impreciso e deve ser corrigido por $\beta.\rho.A.\overline{V}^2$, onde β é um fator adimensional de correção do fluxo de quantidade de movimento ($\beta \geqslant 1$). Este fator leva em consideração a variação de V^2 ao longo da seção do duto.

$$\rho \cdot \int_{SC} V^2.dA = \beta.\dot{m}.\overline{V} = \beta.\rho.A.\overline{V}^2$$

$$\beta = \frac{1}{A} \cdot \int_{A} \left[\frac{V(r)}{\overline{V}}\right]^2 \cdot dA \tag{18}$$

Fator de Correção do Fluxo de Quantidade de Movimento

Aplicando o conceito de fator de correção do fluxo de quantidade de movimento aos perfis de velocidade dos escoamentos laminares e turbulentos:

Escoamento Laminar:

$$V(r) = V_c \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \therefore \beta = \frac{4}{3}$$

Escoamento Turbulento:

$$V(r) = V_c \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n \therefore \beta = \frac{(1+n).(2+n)^2}{4.(1+2.n)}$$

n	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
β	1,037	1,027	1,020	1,016	1,013

Como os valores de $\beta \approx 1$, na prática, para escoamento turbulento, costuma-se desprezar esta correção.

Função Impulso

Da Eq. (5):

$$\vec{F}_S = \int_A -p.d\vec{A} + \int_A \tau.d\vec{A}$$

onde $\vec{F}_R = \vec{F}_S + \vec{F}_B$.

Usando a conservação da quantidade de movimento para VC inercial:

$$\int_{SC} -p.d\vec{A} + \int_{SC} \tau.d\vec{A} + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} \vec{V}.\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A}$$

Note que o termo $-\int p.d\vec{A}$ pode ser agregado ao termo $\int \vec{V}.\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A}$, resultando em:

$$\int_{SC} \tau.d\vec{A} + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}.\rho.d\mathcal{V} + \int_{SC} \left(\vec{V} + \frac{p}{\rho.|\vec{V}|}\right).\rho.\vec{V} \bullet d\vec{A}$$

Função Impulso

Para escoamentos em regimente permanente em VC's dotados de apenas uma entrada e uma saída:

$$\int_{SC} \left(\vec{V} + \frac{p}{\rho . |\vec{V}|} \right) . \rho . \vec{V} \bullet d\vec{A} = (\dot{m}_2 . V_2 + p_2 . A_2) - (\dot{m}_1 . V_1 + p_1 . A_1)$$

Introduzindo o fator β e generalizando, chama-se $\phi(A, t)$ à **função impulso**, dada por:

$$\phi(A, t) = \beta . \dot{m} . \overline{V} + p . A \tag{19}$$

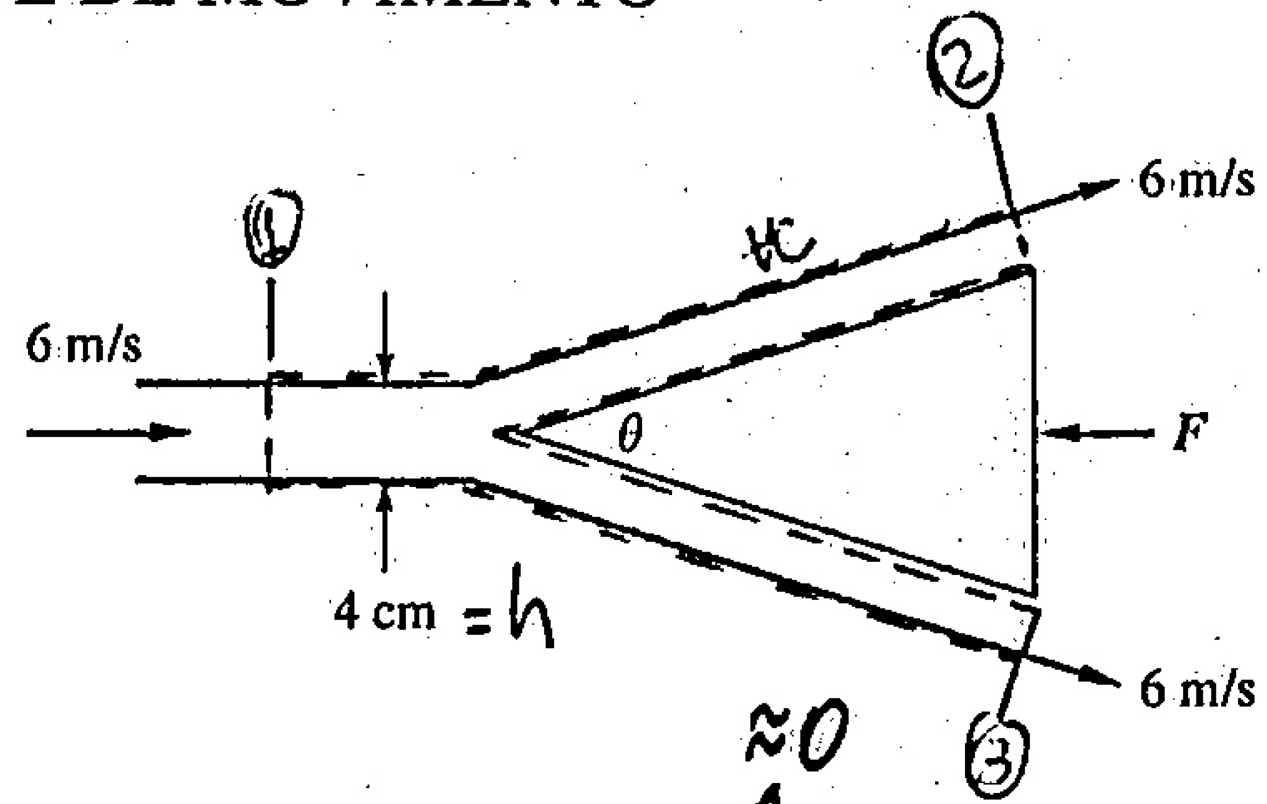
Referências Bibliográficas

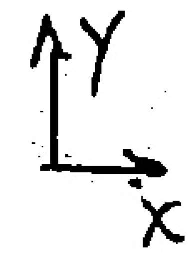
FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. ISBN 978-85-216-1468-5.

WHITE, F. M. *Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. Rio de Janeiro: McGraw Hill, 2002. ISBN 978-85-868-0424-3.

ANÁLISE COM VOLUMES DE CONTROLE FINITOS
CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Uma cunha divide uma lâmina d'água a 20 °C, como mostra a figura ao lado. Tanto a cunha quanto a lâmina de água são muito longas na direção normal ao papel. Se a força necessária para manter a cunha estacionária for F = 124 N por metro de largura, qual é o ângulo θ da cunha?





$$\vec{F}_R = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \cancel{\vec{V}}\cdot\rho\cdot d\forall}_{=0\,(RP)} + \int_{SC} \vec{V}\cdot\rho\cdot\vec{V}\cdot d\vec{A} \quad ; \quad \vec{F}_R = \underbrace{\cancel{\vec{F}_{pres.}}}_{=0\,(p\ \text{uniforme})} + \underbrace{\cancel{\vec{F}_{fis.}}}_{\approx 0} + \vec{F}_B + \vec{F}_{outros}$$

<u>Direção X</u>, RP, FI

$F_{Bx} = 0$; $F_{outros,x} = -F$; $u_1 = V_1$; $u_2 = V_2\cdot\cos(\theta/2)$; $u_3 = V_3\cdot\cos(\theta/2)$

$$-F = u_2\cdot\dot{m}_2 + u_3\cdot\dot{m}_3 - u_1\cdot\dot{m}_1$$

$$-F = V_2\cdot\cos(\theta/2)\cdot\dot{m}_2 + V_3\cdot\cos(\theta/2)\cdot\dot{m}_3 - V_1\cdot\dot{m}_1$$

<u>CM</u>: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$; $V_2 = V_3$; $A_2 = A_3$ (razões de simetria)

$\therefore \dot{m}_2 = \dot{m}_3$

OBS: Da Eq. Energia => desprezando termos relativos á pressão (pois todo VC está à mesma pressão); desprezando termos os termos relativos à cota(pois a

$$-F = 2\cdot V_2\cdot\cos(\theta/2)\,\frac{\dot{m}_1}{2} - V_1\cdot\dot{m}_1$$

$$\cos(\theta/2) = \frac{V_1}{V_2} - \frac{F}{V_2\cdot\dot{m}_1}$$

$$\cos(\theta/2) = \frac{6}{6} - \frac{124\cdot\cancel{b}}{6\cdot 239{,}52\cdot\cancel{b}} = 0{,}9137$$

$$\theta/2 = 24° \;\therefore\; \boxed{\theta = 48°}$$

$\dot{m}_1 = \rho_1\cdot V_1\cdot A_1$

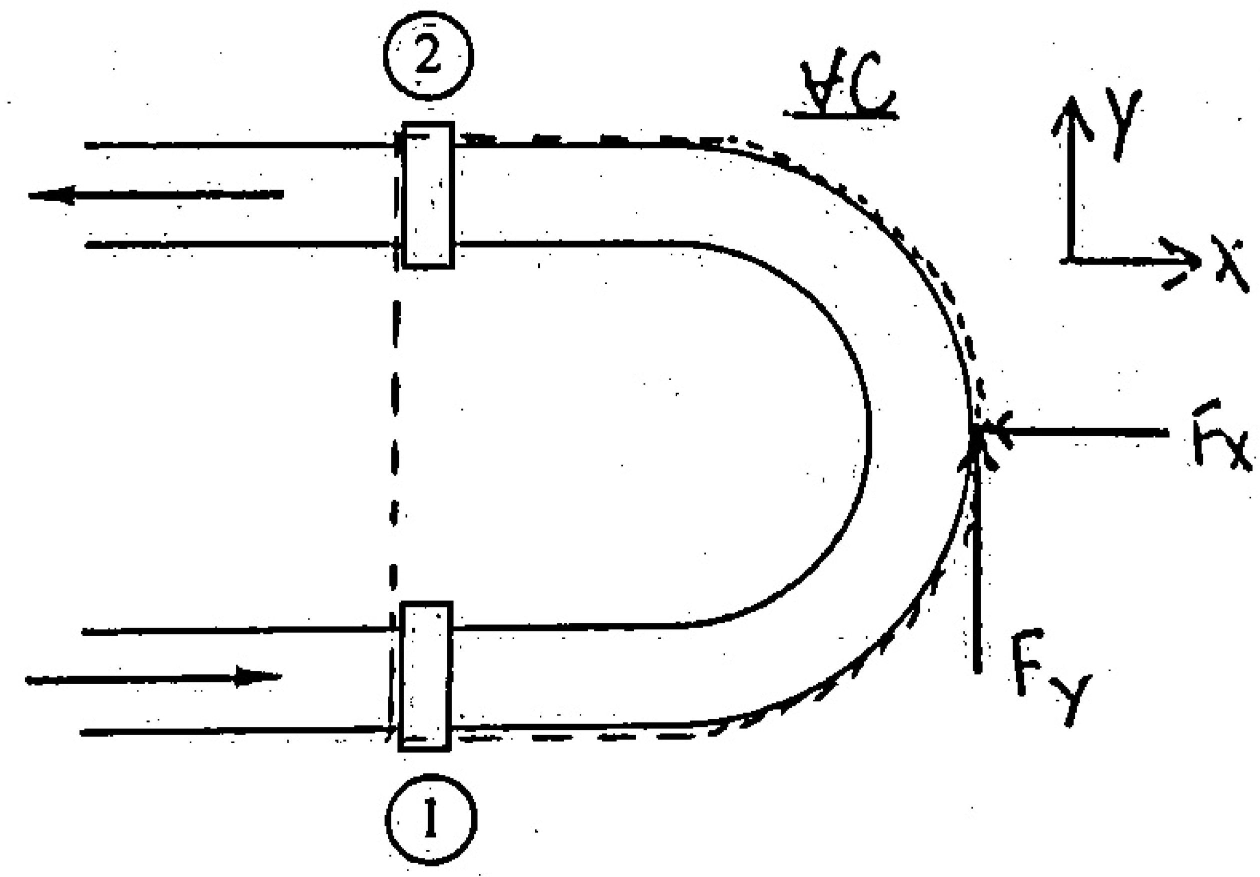
$\dot{m}_1 = \rho\cdot V_1\cdot h\cdot b$ (b = largura ortog. papel)

$\dot{m}_1 = 998\cdot 6\cdot 0{,}04\cdot b$

$\dot{m}_1 = 239{,}52\cdot b$

ANÁLISE COM VOLUMES DE CONTROLE FINITOS
CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Água a 20 °C escoa através de um tubo de 5 cm de diâmetro com uma curva vertical de 180°, como na figura ao lado. O comprimento total do tubo entre os flanges 1 e 2 é 75 cm. Quando a vazão em peso é de 230 N/s, tem-se p_1 = 165 kPa e p_2 = 134 kPa. Desprezando o peso do tubo, determine a força total que os flanges devem suportar para esse escoamento.



$$\dot{m} = \frac{230}{9{,}81} = 23{,}4455 \ kg/s$$

Só interessa avaliar forças devido à pressão em seções onde $p_{man} \neq 0$!

Direção x

$$-F_x + p_1 . A_1 + p_2 . A_2 = -u_2 . \dot{m}_2 - u_1 . \dot{m}_1$$

$$A = A_1 = A_2 \ ; \ \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \ ; \ u_1 = u_2 = u$$

$$-F_x + A(p_1 + p_2) = -2u.\dot{m}$$

$$-F_x + \frac{\pi}{4}(0{,}05)^2(165+134).10^3 = -2.11{,}9646.23{,}4455$$

$$\therefore \boxed{F_x = 1148{,}1 \ N}$$

$$\dot{m}_1 = \rho_1 . u_1 . A_1$$

$$23{,}4455 = 998.V_1.\frac{\pi}{4}(0{,}05)^2$$

$$V_1 = 11{,}9646 \ m/s$$

$$u_1 = V_1 = u_2$$

Direção y

$$F_y - m.g = 0 \Rightarrow F_y = \rho.\forall_{H_2O}.g = 998.\ 0{,}75.\frac{\pi}{4}(0{,}05^2).9{,}81$$

$$\boxed{F_y = 14{,}4 N}$$

→ F_x e F_y são as reações no ∀C.