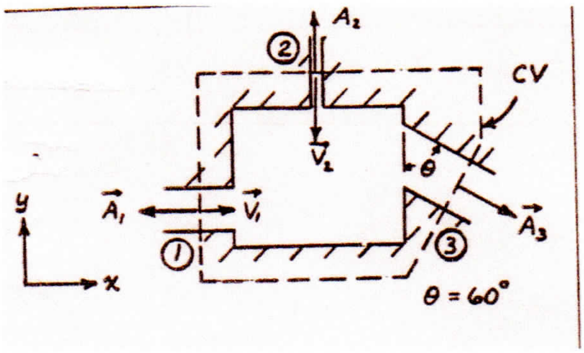
PME 3222 – MECÂNICA DOS FLUIDOS PARA ENGENHARIA CIVIL
AULA: EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE NA FORMA INTEGRAL
EXERCÍCIOS

PROF. JAYME. P. ORTIZ 27/04/20

1. Fox & McDonald Ex. 4.28 - 4ºedição: Um fluido com massa específica de 1050 kg/m^3, flui em regime permanente através da caixa retangular mostrada na figura. Determinar a velocidade $\vec{V}_3$.

Dados: $A_1 = 0{,}05\ m^2; A_2 = 0{,}01\ m^2;$ $A_3 = 0{,}06\ m^2;$

$\vec{V}_1 = 4\vec{i}\ (m/s);$ $\vec{V}_2 = -8\vec{j}\ (m/s).$



Solução :

1) Escolha do VC → entradas (1,2) e saída (3)

2) Equação Básica : $\cancel{\dfrac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall}^{\,0} + \int_{SC}\rho\, \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA$

3) Hipóteses : Esc. Permanente, Incompressível e uniforme nas seções.

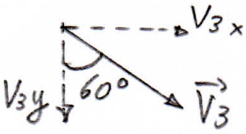
$$\rho\int_{SC}\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA \Rightarrow \rho\int_{A_1}\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA_1 + \rho\int_{A_2}\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA_2 + \rho\int_{A_3}\vec{V}\cdot\vec{n}\,dA_3$$

$$-\rho V_1 A_1 - \rho V_2 A_2 + \rho V_3 A_3 = 0$$

$$V_3 A_3 = V_1 A_1 + V_2 A_2$$

$$V_3 = \frac{V_1 A_1}{A_3} + \frac{V_2 A_2}{A_3} = \frac{4 \times 0{,}05}{0{,}06} + \frac{8 \times 0{,}01}{0{,}06}$$

$$V_3 = 4{,}67\ m/s$$

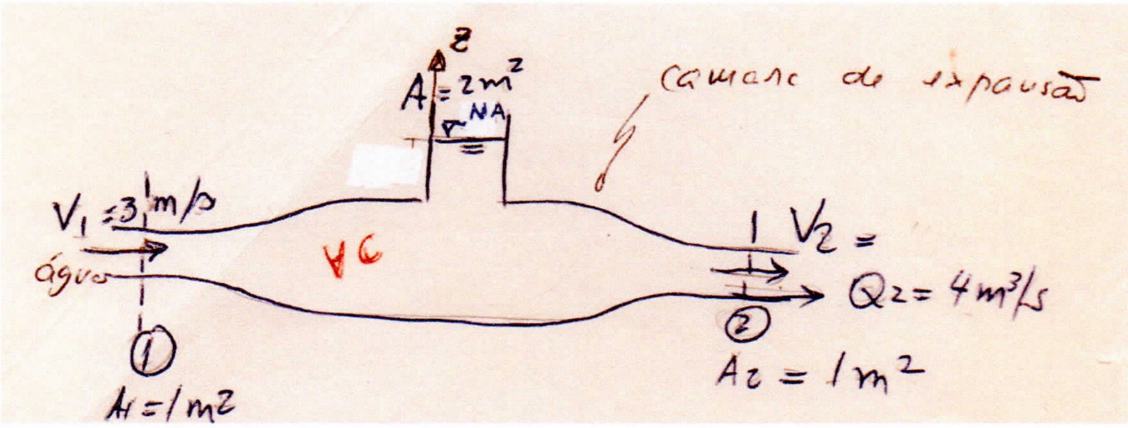


$$\begin{cases} V_{3x} = V_3 \operatorname{sen} 60° = 4{,}04 \\ V_{3y} = V_3 \cos 60° = -2{,}33 \end{cases}$$

Portanto: $\boxed{\vec{V}_3 = 4{,}04\,\vec{i} - 2{,}33\,\vec{j}\ (m/s)}$

2. **Fox & McDonald. Ex. 4.38 - 4ºedição:** Água escoa através de uma câmara de expansão, conforme representado na figura. Pede-se determinar a variação no tempo do nível d´água na câmara de expansão para os dados do problema.

Dados: $V_1 = 3\ m/s$; $Q_2 = 4\ m^3/s$; $A_1 = 1\ m^2$; $A_2 = 1\ m^2$; $A = 2\ m^2$;



Solução:

1) VC → câmara de expansão com uma entrada (1), uma saída (2) e NA variando na chaminé.

2) Equação Básica: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = 0$

3) Hipóteses: Esc. Incompressível com vazões constantes nas seções (1) e (2).

$$\rho \frac{\partial \forall}{\partial t} + \rho \int_{SC} \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = 0$$

$$\frac{\partial \forall}{\partial t} - \underbrace{\int_{A_1} V_1\, dA_1}_{Q_1} + \underbrace{\int_{A_2} V_2\, dA_2}_{Q_2} = 0$$

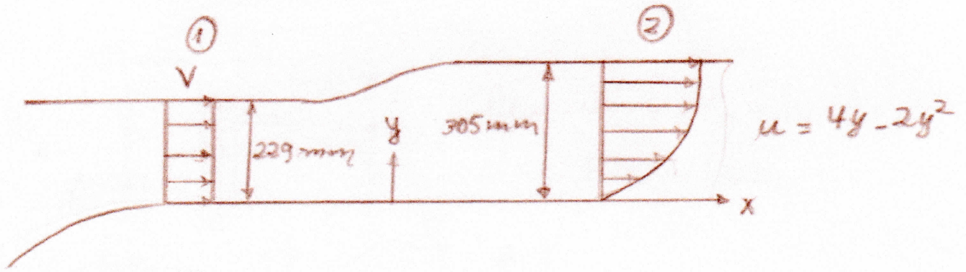
$$\frac{\partial \forall}{\partial t} = Q_1 - Q_2$$

$$A\frac{dz}{dt} = Q_1 - Q_2 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{Q_1 - Q_2}{A} = \frac{3-4}{2}$$

$$\begin{cases} Q_1 = 3 \times 1 = 3\ m^3/s \\ Q_2 = 4\ m^3/s \end{cases}$$

$\therefore$ $\boxed{\frac{dz}{dt} = -0{,}5\ m/s}$ (NA caindo na câmara de expansão).

3. **Munson Ex. 5.19 - 4ºedição:** A figura mostra a vista lateral da região de entrada de um canal que apresenta largura igual a 0,91 m. Observe que o perfil de velocidade na seção de entrada do canal é uniforme e que, ao longe, o perfil de velocidade é dado por $u = 4y - 2y^2$, onde u está especificado em *m/s* e *y* em *m*. Nestas condições, determinar o valor de *V*.



Solução:

1) $\forall C \rightarrow$ entrada em (1), saída em (2).

2) Equação Básica: $\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall}^{\,0} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$

3) Escoamento Incompressível, Permanente
Entrada (1) Uniforme
Perfil de Velocidades em canal - saída (2)

$$-\rho \int_{A_1} V \, dA_1 + \rho \int_{A_2} u \, dA_2 = 0$$

$$-V A_1 + \int_0^{h_2} (4y - 2y^2) \, B \, dy = 0$$

onde: $\begin{cases} B = 0{,}91 \text{ m (largura do canal)} \\ A_1 = B \times h_1 = 0{,}91 \times 0{,}229 \end{cases}$

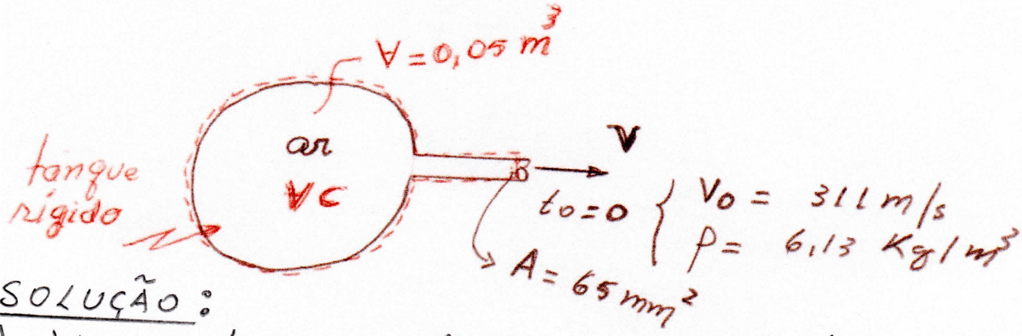
$$V \times 0{,}91 \times 0{,}229 = \int_0^{0{,}305} (4y - 2y^2) \times 0{,}91 \, dy$$

$$0{,}229 \, V = \left[4\frac{y^2}{2} - 2\frac{y^3}{3} \right]_0^{0{,}305}$$

$$0{,}229 \, V = 0{,}186 - 0{,}019$$

$$\boxed{V = 0{,}73 \text{ m/s}}$$

4. Fox & McDonald Exemplo 4.3 - 4ºedição: Um tanque com um volume 0,05 m^3, contém ar a 800 kPa (absoluta) e 15 ºC, Em t = 0, o ar começa a escapar do tanque por meio de uma válvula com área de escoamento de 65 mm^2, O ar passando pela válvula tem velocidade de 311 m/s e massa específica de 6,13 kg/m^3. Determine a taxa instantânea de variação da massa específica do ar no tanque em t = 0.



SOLUÇÃO:

1) ∀C → tanque rígido com uma única saída de ar através da válvula.

2) Equação Básica: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\, d\forall + \int_{SC}\rho\, \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA$

3) Hipóteses: Propriedades no tanque uniformes, porém dependentes do tempo.
Escoamento uniforme na saída.

Como as propriedades são uniformes no ∀C:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\rho\int_{\forall C} d\forall = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall)$$

Aplicando a regra de cadeia de derivação:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\forall) = \rho\underbrace{\frac{\partial\forall}{\partial t}}_{0} + \forall\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

0 (∀C Indeformável → tanque rígido)

Voltando a Equação Básica:

$$\forall\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\int_A V\, dA = 0$$

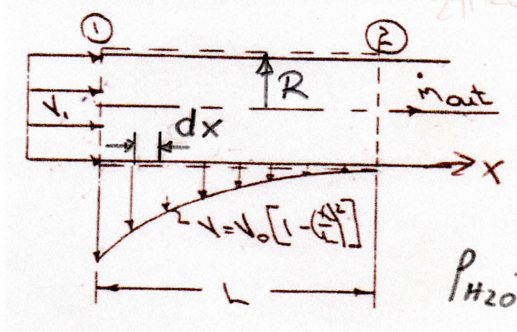
$$\forall\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho V A = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{t_0} = -\frac{\rho V A}{\forall}$$

No instante t_0 $\begin{cases} V = 311 \text{ m/s} \\ \rho = 6{,}13 \text{ kg/m}^3 \end{cases}$

$$\therefore \left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{t_0} = -\frac{6{,}13\times 311\times 65\times 10^{-6}}{0{,}05} = \boxed{-2{,}48\ \frac{\text{kg/m}^3}{\text{s}}}$$

5. **Fox & McDonald Ex. 4.36 - 4ºedição:**=Água escoa em uma tubulação cilíndrica porosa de diâmetro $D = 60\ mm$. NA entrada da tubulação o escoamento é uniforme com $V_1 = 7\ m/s$. O escoamento através da parede porosa é radial e axissimétrico com distribuição de velocidades dada por: $V = V_0[1 - (\frac{x}{L})^2]$, onde $V_0 = 0,03\ m/s$ e $L = 0,95\ m$.

Determinar a vazão em massa $\dot{m}_2$ na posição 2 da tubulação, onde $x = L$.



$\rho_{H_2O} = 999\ \frac{kg}{m^3}$

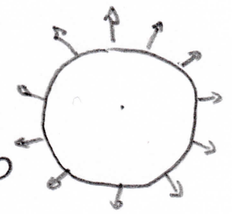
Solução:

1) $\forall C \rightarrow$ tubulação porosa: entrada (1) saídas (2) e lateral (L).

2) Equação Básica: $\cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\, d\forall} + \int_{SC}\rho\, \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = 0$

3) Hipóteses: Escoamento Permanente
Incompressível (água)
Entrada (1) Uniforme
Saída Lateral (L) radial

$$-\int_{A_1}\rho V_1 dA_1 + \int_{A_2}\rho V_2 dA_2 + \int_{A_L}\rho V_0\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] dA_L = 0$$



parede porosa

$$\therefore\ -\rho V_1 A_1 + \dot{m}_2 + \rho V_0\int_0^L\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]2\pi R\, dx = 0$$

$$\dot{m}_2 = \rho V_1 A_1 - 2\pi R \rho V_0 \int_0^L\left[1-\frac{x^2}{L^2}\right]dx = 0$$

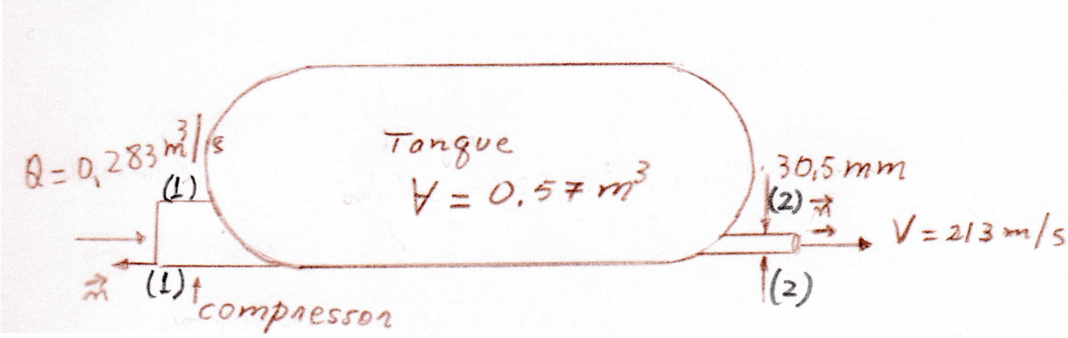
$$\dot{m}_2 = \rho V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} - 2\pi R \rho V_0\left[x - \frac{x^3}{3L^2}\right]_0^L$$

Numericamente: $\boxed{\dot{m}_2 = 16,2\ kg/s}$

6. **Munson Ex. 5.15 - 4ºedição:** O compressor indicado na figura é alimentado com *0,283 m³/s* de ar na condição padrão. O ar é descarregado do tanque através de uma tubulação que apresenta diâmetro igual a 30,5 mm. A velocidade e a massa específica do ar que escoa no tubo de descarga são iguais a *213 m/s e 1,80 kg/m³*. Pede-se:

b) Determinar a taxa de variação da massa de ar contido no tanque em *kg/s*.

a) Determinar a taxa média de variação de massa específica do ar contido no tanque.



Solução:

$\forall C \longrightarrow$ tanque indeformável
entrada (1); saída (2)

Equação Básica: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = 0$

3) Hipóteses: Propriedades no tanque uniformes, porém dependentes do tempo.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\forall - \rho\int_{A_1} V_1\, dA_1 + \rho\int_{A_2} V_2\, dA_2 = 0$$

a) $\forall \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho_1 Q_1 + \rho_2 V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 0$

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(1,23 \times 0,283 - 1,80 \times 213 \times \frac{\pi \times (0.0305)^2}{4}\right)\frac{1}{0,57}$$

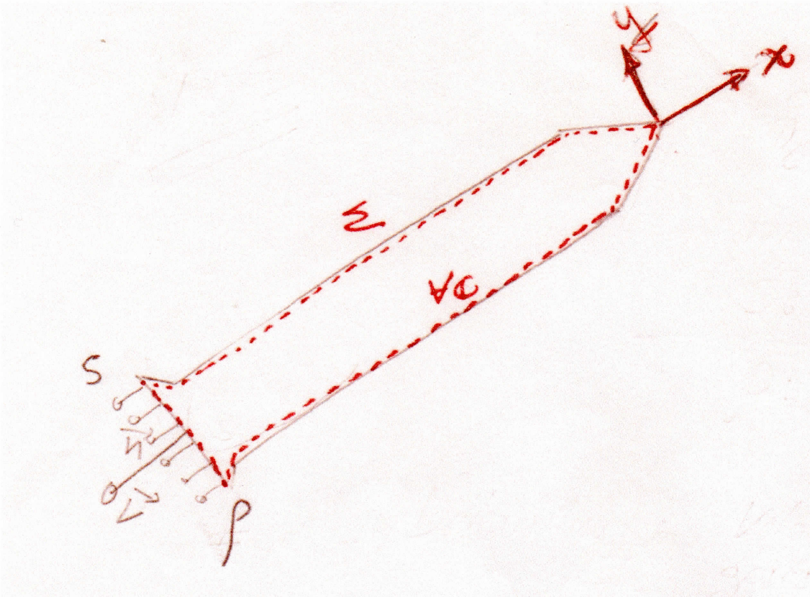
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.119\ \frac{kg/m^3}{s}}$$

b) $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\rho\forall = \dot{m}_{tanque}$

$$\dot{m}_{tanque} = \forall \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,57 \times 0,119$$

$$\boxed{\dot{m}_{tanque} = 0,068\ kg/s}$$

7. **Apostila Ex. 3.3.3:** Um foguete queima fluido combustível na taxa $\boldsymbol{\beta}$ (kg/s). Sendo m_0 a massa inicial do foguete, S a área da boca de exaustão do foguete, ρ a massa específica dos gases na boca de exaustão, determinar a velocidade de saída dos gases de exaustão.



1) $\forall C \rightarrow$ Neste caso $\forall C$ (foguete) é móvel e indeformável. O sistema de coordenadas (x, y) está amarrado ao $\forall C$.

2) Equação Básica: $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\forall C} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = 0$

3) Hipótese: Taxa de queima de combustível (β) é cte. A variação da massa de combustível segue a relação: $m = m_0 - \beta t$

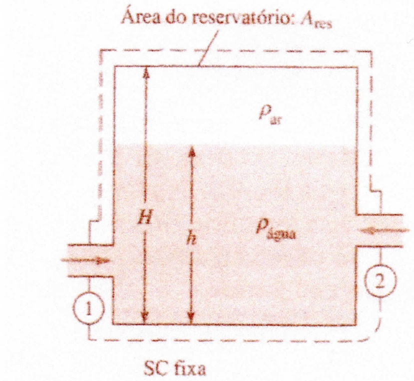
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \, d\forall = \left.\frac{\partial m}{\partial t}\right)_{\forall C} = -\beta$$

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = \int_S \rho v \, dA = \rho V S$$

$$\therefore \quad -\beta + \rho V S = 0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{\beta}{\rho S}}$$

Velocidade relativa ao $\forall C$

8. **White – Exemplo 3.6:** O reservatório da figura se enche de água por meio de duas entradas unidimensionais. Ar é aprisionado no topo do reservatório. A altura da água é *h*. (a) Encontre uma expressão para a variação da altura da água no tempo, *dh/dt*. *(b)* Calcule *dh/dt* para $D_1 = 25$ *mm*, $D_2 = 75$ *mm*, $V_1 = 0{,}9$ *m/s*, $V_1 = 0{,}6$ *m/s* e $A_{res} = 0{,}18\ m^2$, considerando água a 20^0C.



Solução :

1) VC → reservatório de água (contendo água e ar) 2 entradas (1 e 2).

2) Equação Básica : $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall}_{(I)} + \underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA}_{(II)} = 0$

a) Expressão literal dh/dt

Considerando que o reservatório de área A_{res} contém dois fluidos (água e ar), com duas entradas de água (1 e 2) :

(III) $\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\, d\forall = \frac{d}{dt}\left(\rho_{H_2O} A_{res}\, h\right) + \frac{d}{dt}\left[\rho_{ar} A_{res} (H-h)\right]$

A taxa de variação de massa de ar é nula ⟸ 0
Ar confinado no reservatório

(IV) $\int_{SC} \rho \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = -\rho_1 A_1 V_1 - \rho_2 A_2 V_2$

Substituindo (III) e (IV) na Equação Básica :

$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2}{\rho_{H_2O} A_{res}}}$, onde $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{H_2O}$

b) Numericamente $\begin{cases} Q_1 = 0{,}442 \times 10^{-3}\ m^3/s \\ Q_2 = 2{,}651 \times 10^{-3}\ m^3/s \end{cases}$

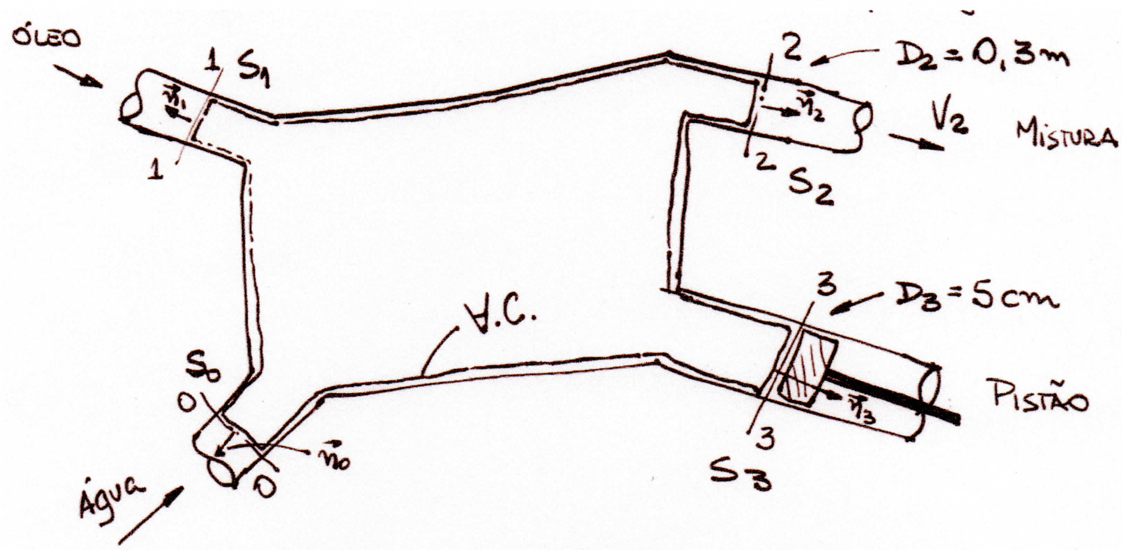
$\boxed{dh/dt = 0{,}017\ m/s}$

9. Apostila Ex. 3.2.9: A figura é uma representação esquemática de um misturador de água e óleo. Água entra através da seção S_0 com vazão Q_0 = 0,3 L/s e óleo entra através da seção S_1 com vazão Q_1 = 0,06 L/s. Pede-se determinar a velocidade média da mistura, admitida homogênea na seção 2-2 de diâmetro D_2 = *30 cm* nas seguintes condições:

a) Pistão da seção 3-3 imóvel.

b) Pistão da seção 3-3 com velocidade V_3 = *30 cm/s*, movendo-se para dentro do cilindro.

Dados: $\gamma_{óleo} = 8000\ N/m^3$; : $\gamma_{H2O} = 10000\ N/m^3$.



Solução: a) Pistão Imóvel na seção 3

$\forall C$ caixa de mistura fixa e indeformável.

Equação Básica: $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = 0$

Hipóteses: - escoamento unidimensional e uniforme nas seções de entrada e de saída;
- escoamento permanente, incompressível;
- mistura homogênea.

Sendo ~~o~~ escoamento incompressível além da conservação da massa, vale também a conservação de volume (Lei dos Nós).

$$\frac{\partial \forall}{\partial t} + \int_{SC} \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA = 0$$

Sendo $\frac{\partial \forall}{\partial t} = 0 \Rightarrow -Q_0 - Q_1 + Q_2 = 0$

$$Q_2 = Q_0 + Q_1 = (0{,}30 + 0{,}06)\,10^{-3} = V_2 \frac{\pi D^2}{4}$$

$$V_2 = \frac{4(0{,}30+0{,}06)10^{-3}}{\pi \times (0{,}30)^2} = 0{,}0051\, m/s = \boxed{0{,}51\, cm/s}$$

- Massa Específica da Mistura:

$$-\dot{m}_0 - \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0$$

$$\therefore \dot{m}_2 = \rho_0 Q_0 + \rho_1 Q_1 = 0{,}348\, kg/s$$

$$Q_2 = Q_0 + Q_1 = 0{,}36 \times 10^{-3}\, m^3/s$$

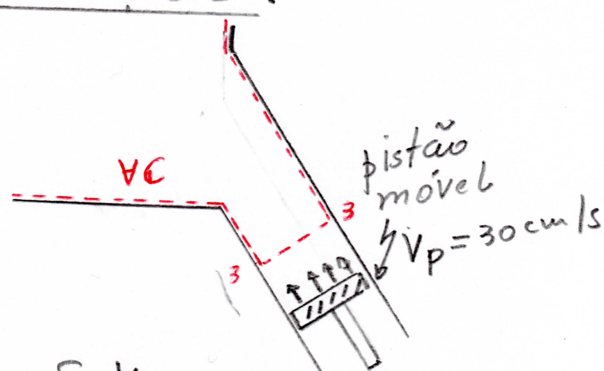
$$\rho_2 = \frac{\dot{m}_2}{Q_2} = \frac{0{,}348}{0{,}36 \times 10^{-3}} = \boxed{967\, kg/m^3}$$

b) Pistão Móvel na seção 3:

p/ SCI

Não Permanente:

$$\frac{\partial \forall}{\partial t} - Q_0 - Q_1 + Q_2 = 0$$



$$\forall = \forall_0 - S_3 x$$

$$\frac{\partial \forall}{\partial t} = -S_3 \frac{dx}{dt} = -S_3 V_3$$

↳ vazão fictícia introduzida pelo pistão.

$$Q_2 = Q_0 + Q_1 + S_3 V_3$$

$$Q_2 = 0{,}3 \times 10^{-3} + 0{,}06 \times 10^{-3} + \frac{\pi \times (0{,}05)^2}{4} \times 0{,}30$$

$$Q_2 = 0{,}948 \times 10^{-3}\, m^3/s$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{0{,}948 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \times (0{,}30)^2}{4}} = 0{,}0134\, m/s = \boxed{1{,}34\, cm/s}$$

Obs.: Adotando-se SCD tem-se uma condição de Escoamento Permanente Instantâneo, devendo-se levar em conta a V_{fluido} e a V_{bordo} na seção 3.

Resultado: $\boxed{V_2 = 1{,}34\, cm/s}$

10. Exercício Proposto Para Entrega: Um fluido incompressível de massa específica *1500 kg/m³* e viscosidade *1,5 x 10⁻³ Pa.s* escoa em um recipiente com uma entrada e duas saídas, conforme esquematizado na figura. O escoamento numa das saídas é uniforme, com velocidade $V_3 = 0{,}6\ m/s$. Na entrada 2 o escoamento tem um perfil de velocidade cujo campo é dado pela seguinte equação: $\vec{V} = \left[4\left(\frac{r}{D}\right)^2 - 1\right]\vec{j}$. Pedem-se:

a) Escrever a equação da continuidade na forma integral, dando o significado de cada um de seus termos. Simplifique essa equação para o problema em questão.

b) Determinar a velocidade V_1 na seção 1.

c) Determinar a vazão em massa na seção 2.

Dados: $D_1 = 0{,}8\ m$; $D_2 = 1{,}0\ m$; $D_3 = 0{,}5\ m$.