

# **Formas integrais das leis fundamentais**

## **O Teorema de Transporte de Reynolds**

Prof. Marcos Tadeu Pereira

PME 3222 -2020

Aplicar as **Leis Básicas** a um **Volume de Controle (VC)** fixo no espaço (Euler), ao invés da formulação para um **Sistema** (Lagrange).

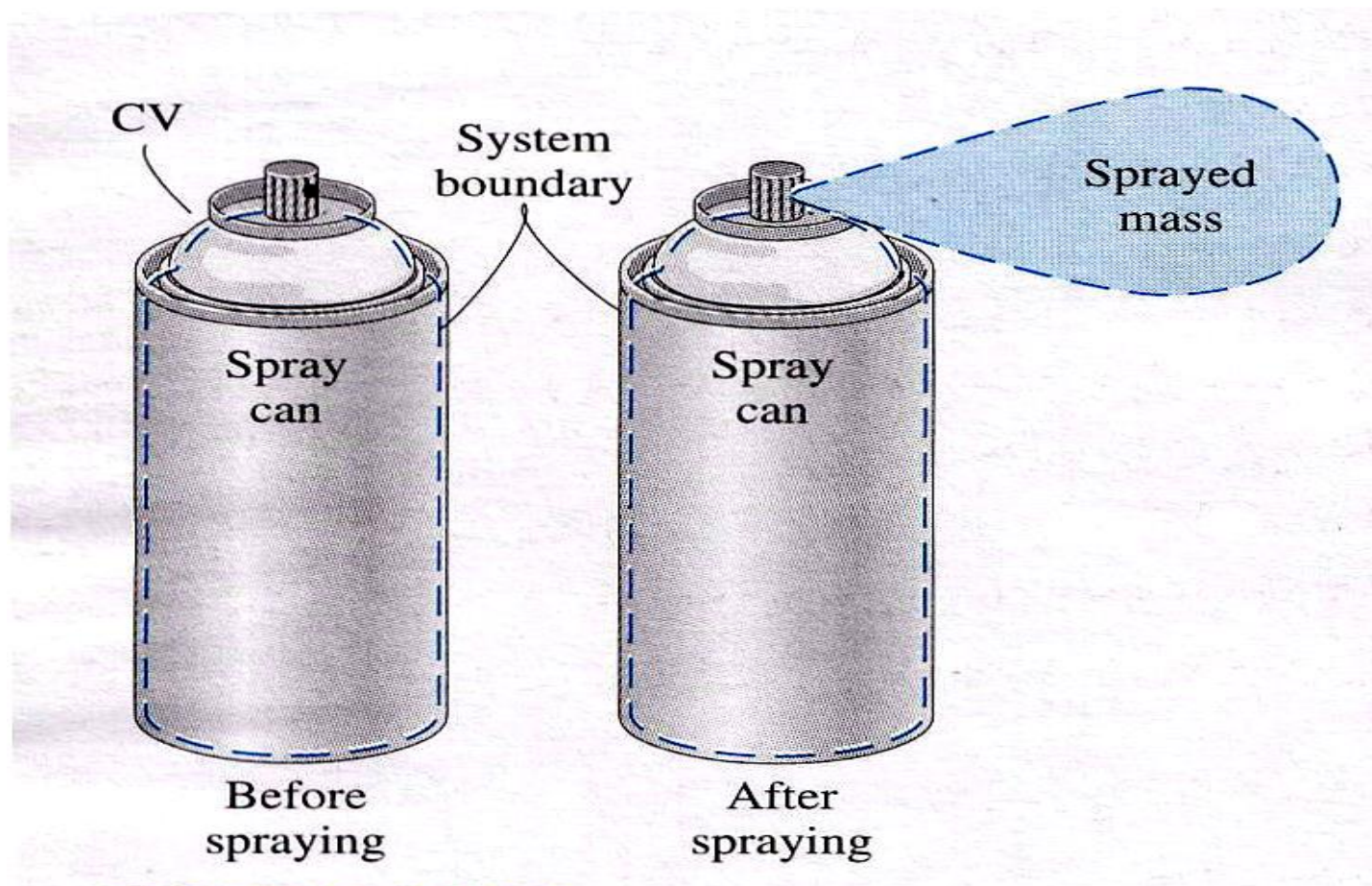
As **Leis Básicas** (de conservação) se aplicam diretamente a **sistemas**:

- 1) Conservação da Massa, ou Eq. da Continuidade
- 2) 2ª Lei de Newton
- 3) 1ª Lei da Termodinâmica (conservação de energia)
- 4) Quantidade de Movimento (conservação da QDM)
- 5) 2ª Lei da Termodinâmica (variação da entropia, irreversibilidade)

Será desenvolvida uma formulação geral, universalmente aplicável (por meio do Teorema de Transporte de Reynolds) às 5 leis básicas para aplicação em um **VC**.

Observações introdutórias:

- 1) Um sistema é uma quantidade de matéria de identidade fixada. Massa não atravessa a fronteira de um sistema (Lagrange).
- 2) Um Volume de Controle (**VC**) é uma região do espaço escolhida para observação/estudo. Massa pode atravessar a Superfície de Controle (**SC**) do **VC**. (Euler)



Uma lata de spray pode ser analisada de duas formas: acompanhando o conteúdo da lata (Lagrange- sistema fechado: massa não varia, ou seja, após spray a fronteira do sistema inclui a massa fora da lata) ou monitorando o volume da lata (Euler - volume de controle: só a lata, antes e depois)

3) Passamos de Lagrange a Euler para uma partícula fluida em uma **LC** ( $\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)N$ ), e vamos fazer a mesma passagem para uma massa de fluido, na forma integral

4) É necessário passar a formulação das leis de conservação válidas para um sistema para a formulação de **VC (Volume de Controle)**, o que é conseguido com o **Teorema de Transporte de Reynolds**.

5) Um **VC** refere-se a uma região do espaço onde podem ocorrer escoamentos para fora e para dentro do VC. A fronteira de um **VC** é sua superfície de controle (**SC**)

6) O tamanho e a forma do **VC** são totalmente arbitrários, escolhidos de acordo com a conveniência. O **VC** também pode ser chamado de sistema aberto.

7) **Propriedades extensivas e intensivas.** As leis básicas, escritas na forma de taxa de variação, envolvem derivadas em relação ao tempo de alguma propriedade extensiva do sistema.

Prop. **Extensiva (N)**: depende da extensão, da quantidade de matéria do sistema. Ex: massa, energia, QDM.

Prop. **Intensiva** ( $\eta$  letra grega "eta") : por unidade de massa

$$\eta = \frac{N}{m} \text{ ou melhor: } N_{sist} = \int_{m_{sist}} \eta dm = \int_{V_{sist}} \eta \rho d\forall$$

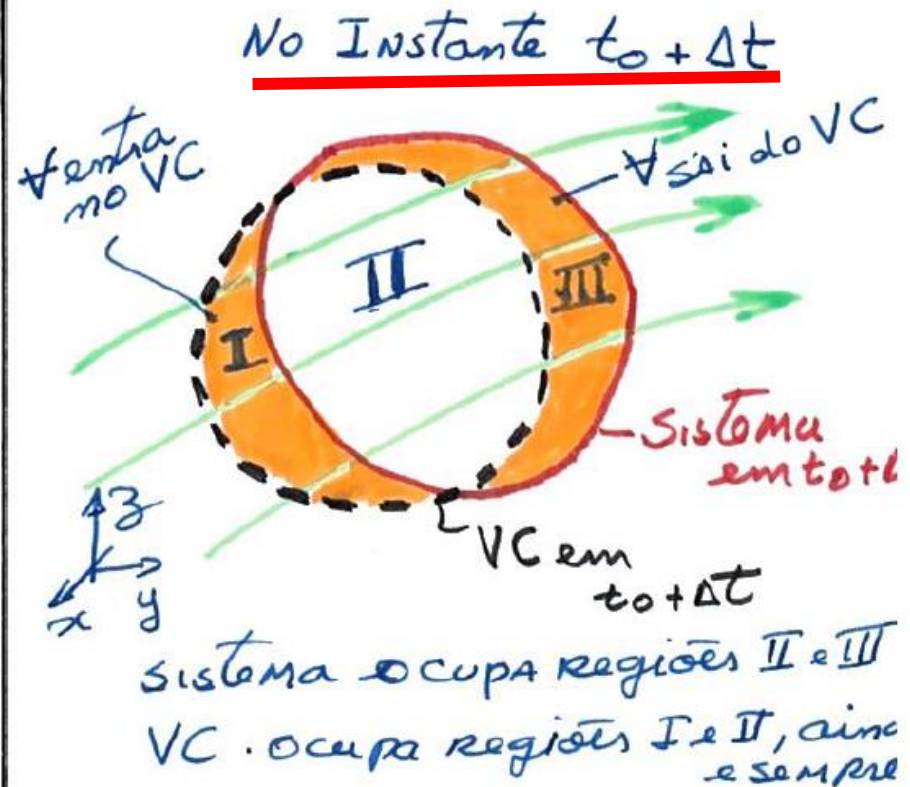
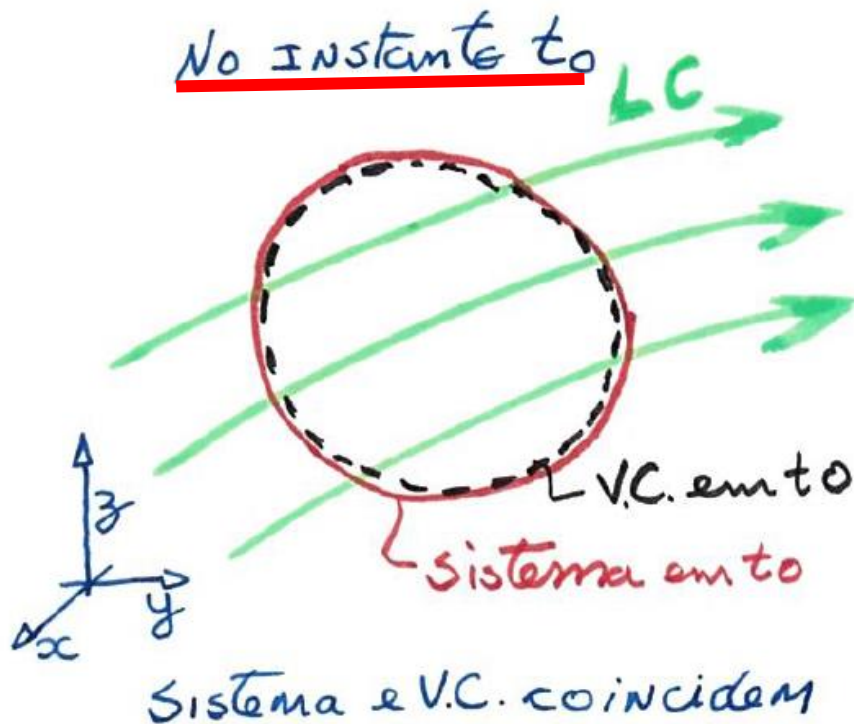
onde  $\forall$  é o volume.

$$\text{se } N = m \rightarrow \eta=1$$

## Hipóteses:

- Campo de escoamento arbitrário  $\vec{V}(x, y, z, t)$  em relação a sistema de coordenadas  $xyz$
- **VC** fixo no espaço
- Sistema movimenta-se no campo de escoamento (por definição mantendo sempre as mesmas partículas de fluido)

# Sistema e Volume de Controle propriedade N



Massa nova entra no VC, região I em  $\Delta t$   
Massa deixa o VC, região III, em  $\Delta t$



Definição de derivada de propriedade extensiva:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sist} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{sist}(t_0 + \Delta t) - N_{sist}(t_0)}{\Delta t} \quad (1)$$

**No instante  $t_0 + \Delta t$ :** sistema  $\equiv$  região II + região III

$$\therefore N_{sist}(t_0 + \Delta t) = (N_{II} + N_{III})_{t_0 + \Delta t} = (N_{VC} - N_I + N_{III})_{t_0 + \Delta t} =$$

$$\left[ \int_{V_{VC}} \eta \rho d \forall \right]_{t_0 + \Delta t} - \left[ \int_{V_I} \eta \rho d \forall \right]_{t_0 + \Delta t} + \left[ \int_{V_{III}} \eta \rho d \forall \right]_{t_0 + \Delta t}$$

$$(\text{propriedade extensiva } N \rightarrow N_{sist} = \int_{\forall_{sist}} \eta \rho d \forall)$$

**No instante  $t_0$**

$$\therefore N_{sist})_{t_0} = N_{VC})_{t_0} = \left[ \int_{VC} \eta \rho d \forall \right]_{t_0}$$

e, substituindo em (1), resulta:

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{sist} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ \int_{VC} \eta \rho d \forall \right]_{t_0+\Delta t} - \left[ \int_{V_I} \eta \rho d \forall \right]_{t_0+\Delta t} + \left[ \int_{V_{III}} \eta \rho d \forall \right]_{t_0+\Delta t} - \left[ \int_{VC} \eta \rho d \forall \right]_{t_0}}{\Delta t}$$

e, como o limite da soma é a soma dos limites:

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{sist} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ \int_{VC} \eta \rho d \forall \right]_{t_0+\Delta t} - \left[ \int_{VC} \eta \rho d \forall \right]_{t_0}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ \int_{V_{III}} \eta \rho d \forall \right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ \int_{V_I} \eta \rho d \forall \right]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

*termo A*

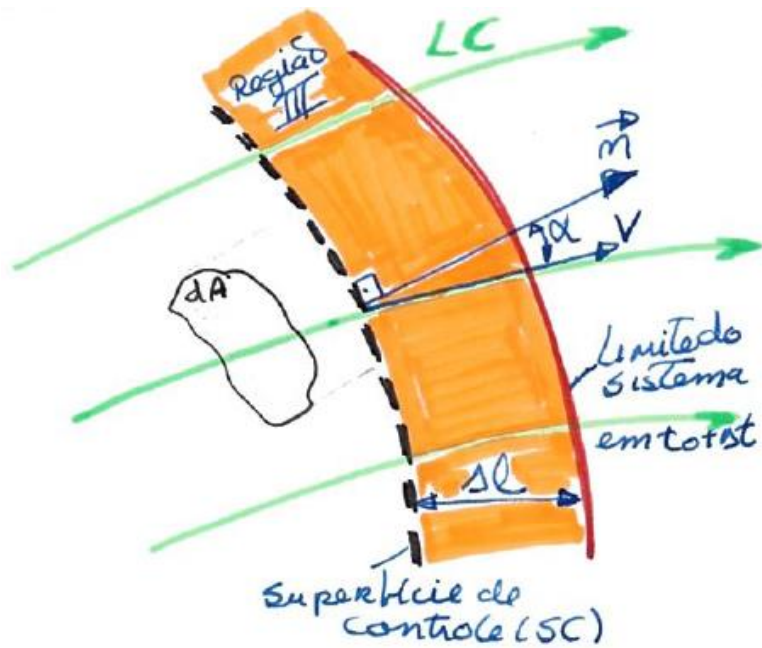
*termo B*

*termo C*

*termo A :*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{VC}(t_0 + \Delta t) - N_{VC}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\partial N_{VC}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV \quad \forall$$

e representa a taxa de variação com o tempo da propriedade  
N dentro do VC



$$\text{termo } B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{III}|_{t_0 + \Delta t}}{\Delta t}$$

$\vec{n}$  - normal para fora  
em relação ao VC

Observar que  $d\vec{A}$  deve ser um vetor para  
podermos calcular um volume e uma massa

dm flui para fora do VC  $\rightarrow \alpha < \pi/2$  sobre toda a região III

$$dV = dA \cdot \Delta l \cdot \cos \alpha$$

$$d N_{III}|_{t_0 + \Delta t} = \eta \rho dV|_{t_0 + \Delta t} = \eta \rho dA \cdot dl \cdot \cos \alpha|_{t_0 + \Delta t}$$

*termo B*

$$N_{III}]_{t_0+\Delta t} = \left[ \int_{SC_{III}} \eta \rho \cdot \Delta \ell \cdot \cos \alpha \cdot dA \right]_{t_0+\Delta t}$$

$SC_{III}$  : superfície de controle comum à região III e ao VC

$\Delta \ell$  : distância percorrida por uma partícula na superfície do sistema, durante  $\Delta t$ , ao longo de uma linha de corrente que existia em  $t_0$

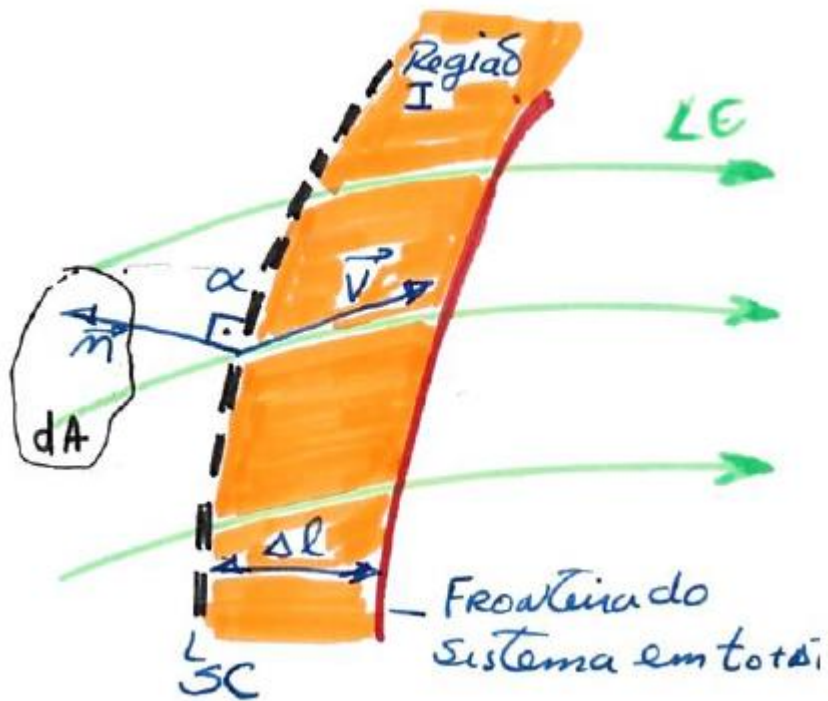
*termo B*

$\therefore$  termo  $b =$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{III}(t_0 + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{SC_{III}} \eta \rho \cdot \Delta \ell \cdot \cos \alpha \cdot dA}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{SC_{III}} \eta \rho \cdot \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \cdot \cos \alpha \cdot dA = \int_{SC_{III}} \eta \rho \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \alpha \cdot dA$$

$$\text{pois } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \ell}{\Delta t} = |\vec{V}|$$



$$\text{termo C: } - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_I)_{t_0 + \Delta t}}{\Delta t}$$

$n \rightarrow$  - normal para fora em relação ao VC

dm fluid para fora do VC  $\rightarrow \alpha > \pi/2$  sobre toda a região I, já que a massa da região I flui para dentro do VC em toda a região I

$$d N_I]_{t_0 + \Delta t} = \eta \rho d \forall)_{t_0 + \Delta t} = \eta \rho \Delta l. (-\cos \alpha) dA.)_{t_0 + \Delta t}$$

(-) porque o volume  $d\forall$  é escalar e positivo

$$N_I]_{t_0+\Delta t} = \left[ \int_{SC_I} -\eta\rho \cdot \Delta\ell \cdot \cos\alpha \cdot dA \right]_{t_0+\Delta t}$$

onde  $SC_I$  = superfície comum à região I e o VC  
 $\Delta\ell$  = distância percorrida por uma partícula na superfície do sistema durante  $\Delta t$ , ao longo de uma linha de corrente que existia em  $t_0$

$$\therefore \textit{termo C} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ \int_{V_I} \eta\rho dV \right]}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_I]_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{SC_I} -\eta\rho \cdot \Delta\ell \cdot \cos\alpha \cdot dA}{\Delta t} = \int_{SC_I} \eta\rho \cdot |\vec{V}| \cdot \cos\alpha \cdot dA$$



substituindo as expressões dos **termos A, B e C** em 1:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho d \forall + \int_{SC_{III}} \eta \rho \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \alpha \cdot dA + \int_{SC_I} \eta \rho \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \alpha \cdot dA$$

Como  $SC \equiv SC_I + SC_{III} + SC_{Lateral}$

onde  $SC_{Lateral}$  é caracterizada por  $\alpha = \pi/2$  ou  $\vec{V} = 0$ , i.e.,  
ausência de fluxo

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho d \forall + \int_{SC} \eta \rho \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \alpha \cdot dA$$

e, como se sabe que  $|\vec{V}| \cdot \cos \alpha \cdot dA = \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ ,  $\therefore$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho d \forall + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

# *Teorema do Transporte, de Reynolds*

$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho d\forall + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA$$

Taxa de variação total de uma propriedade extensiva N qualquer num sistema no instante  $t_0$

Taxa de variação em relação ao tempo da propriedade extensiva N dentro do volume de controle, que coincide com o sistema no instante  $t_0$

Taxa resultante do efluxo da propriedade extensiva N, através da superfície de controle no instante  $t_0$

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) N$$

*Esta fórmula de Reynolds relaciona as taxas de variação de uma propriedade extensiva  $N$  qualquer de um sistema, e as variações com o tempo desta propriedade  $N$  associada ao volume de controle*

*é a fórmula integral, correspondente à fórmula diferencial relacionando as derivadas de Lagrange e Euler:*

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)N$$

***Obs.  $\vec{V}$  na equação é medida em relação ao VC e  $\therefore$  a taxa de variação de  $N$  deve ser avaliada por um observador fixo no VC.***

# Equação da continuidade, ou da conservação da massa

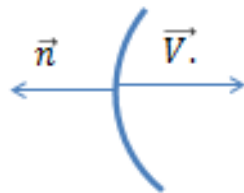
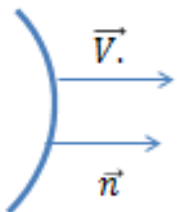
$$\left. \frac{dN}{dt} \right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho d\forall + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA, \text{ e como } N = m \rightarrow \eta = 1$$

$$\left. \frac{dm}{dt} \right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Definição de sistema: massa não varia

Taxa de variação de massa no sistema = Taxa de variação de massa no VC + Fluxo de massa através da SC

$\vec{V} \cdot \vec{n} \rightarrow$  sinal depende de  $\vec{V}$  e de  $\vec{n}$



$\vec{n}$  sempre aponta para fora do VC, na SC

# Caso particulares da Equação da continuidade

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sist} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

## 1) Regime Permanente

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\forall = 0 \text{ e portanto } \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

só interessa  
o fluxo  
entre  
fronteiras

## 2) Fluido incompressível

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\forall = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} d\forall \text{ e, se o VC for indeformável } \dot{\int_{VC} d\forall} = 0$$

$$\text{e } \therefore \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$\therefore$  PODEROSO: não  
precisa ser regime  
permanente

## Lei dos Nós (Kirchoff)

Da continuidade:  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$

Onde  $SC = \sum S_e + \sum S_s + \sum S_{Lateral}$ , onde  $S_{Lateral}$  tem fluxo=0

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \frac{\partial m}{\partial t} \quad (\text{variação da massa com o tempo no VC})$$

$$e, \therefore, \frac{\partial m}{\partial t} = \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_s$$

Hipótese 1 – Regime permanente  $\rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} = 0$  e  $\therefore \sum \dot{m}_e - \sum \dot{m}_s = 0$

$\sum \dot{m}_i = 0$  Lei dos Nós

Hipótese 2- Fluido incompressível ( $\rho = constante$ )  $\rightarrow \sum Q_i = 0$