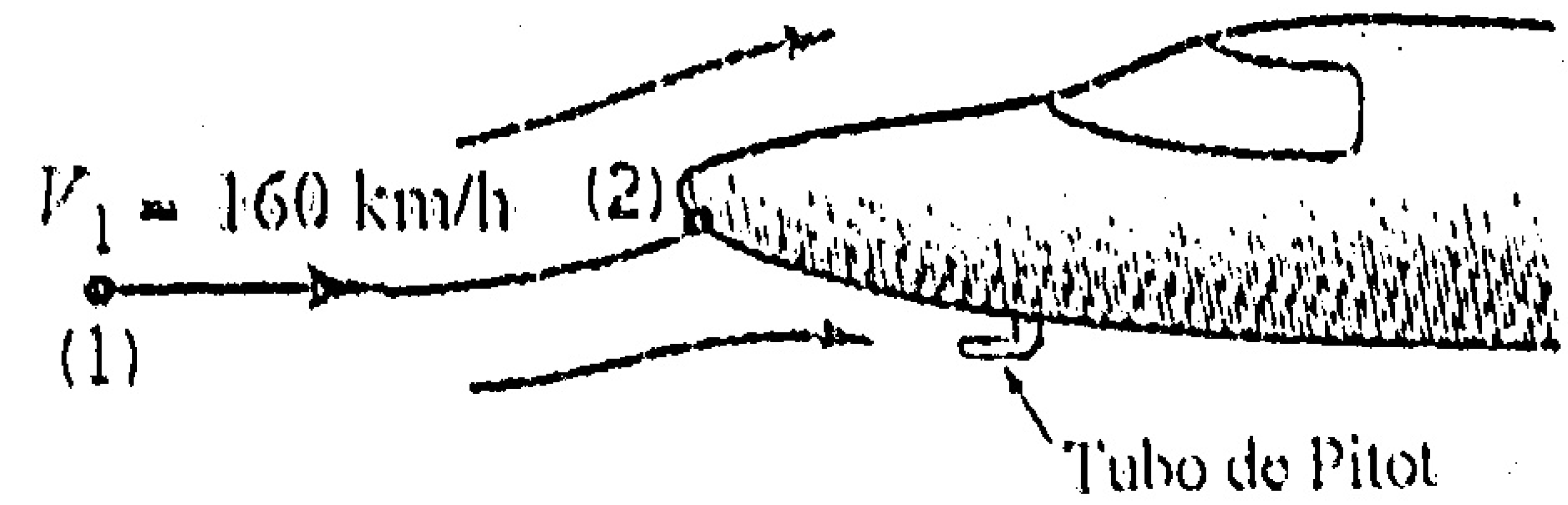
DINÂMICA DOS FLUIDOS ELEMENTAR E EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A figura abaixo mostra um avião voando a 160 km/h numa altitude de 3000 m. Admitindo que a atmosfera seja a padrão, determine a pressão ao longe do avião, ponto (1), a pressão no ponto de estagnação no nariz do avião, ponto (2), e a diferença de pressão indicada pelo tubo de Pitot que está instalado na fuselagem do avião. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exemplo 3.6]



Atmosfera padrão → Tabela C.1 do livro texto. Nela, a 3000 m: $\boxed{p_1 = 70{,}12 \text{ kPa}}$ e $\rho = 0{,}9093$ kg/m³

Considerando $z_1 \approx z_2$ e escoa/o em RP e respeitando todas as demais restrições da Eq. de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \cancel{\rho g z_1} = p_2 + \underbrace{\cancel{\frac{\rho V_2^2}{2}}}_{=0} + \cancel{\rho g z_2}$$

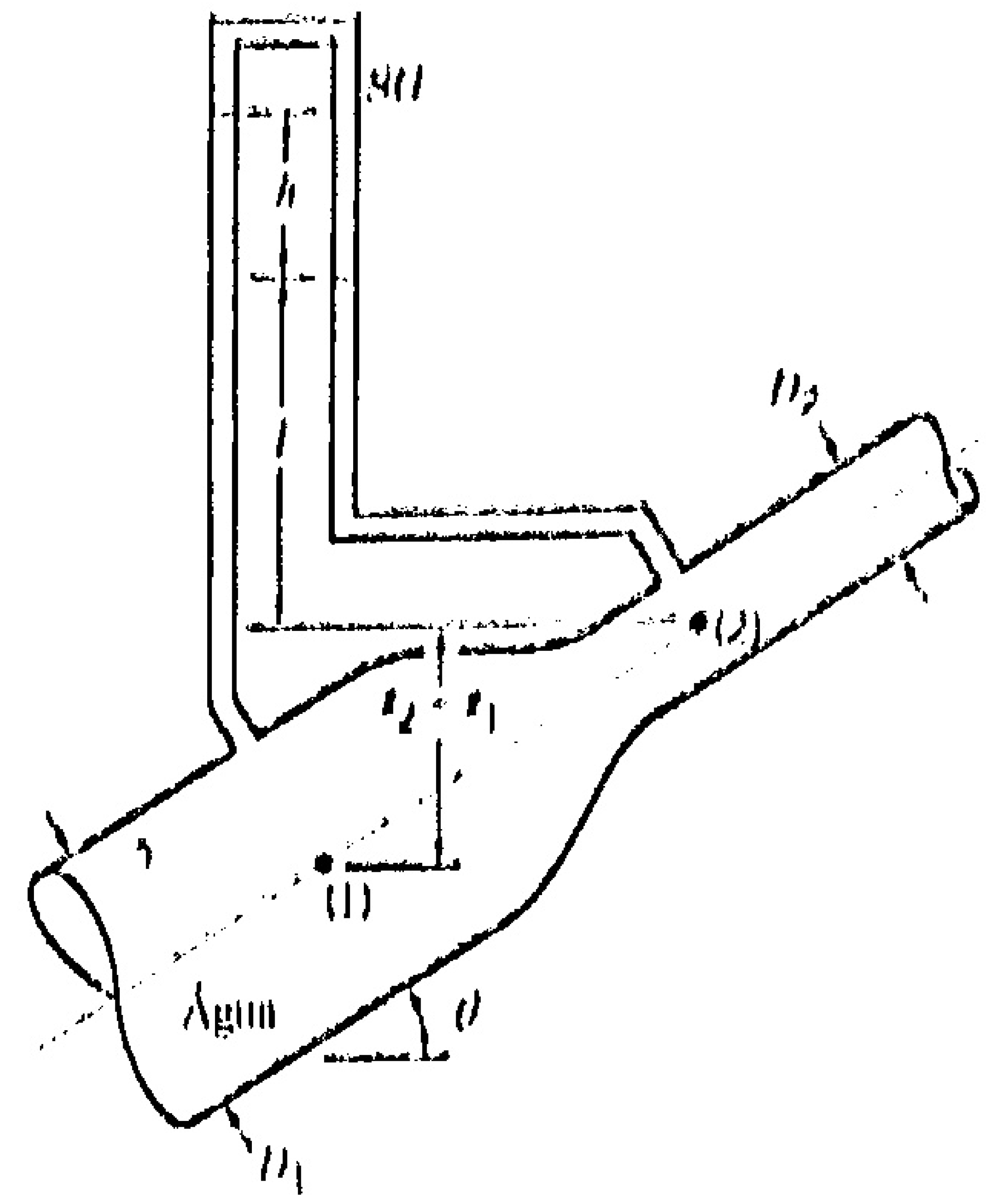
$$p_2 = 70{,}12 + \frac{0{,}9093 \cdot (160/3{,}6)^2}{2} \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{p_2 = 71{,}02 \text{ kPa} = p_{stag}}$$

$$p_2 - p_1 = 71{,}02 - 70{,}12 \Rightarrow \boxed{p_2 - p_1 = 0{,}9 \text{ kPa}}$$

mais precisa/e
896 Pa

A figura ao lado mostra o escoamento de água numa redução. As pressões estáticas em (1) e em (2) são medidas com um manômetro em *U* invertido que utiliza óleo, densidade igual a *SG*, como fluido de manométrico. Nestas condições, determine a leitura no manômetro (*h*). [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exemplo 3.9]



Admitindo todas as hipóteses para aplicação da equação de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{\rho . V_1^2}{2} + \rho . g . z_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho . g . z_2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + \rho g \left(z_2 - z_1\right) \quad (I)$$

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow V_1 = (A_2/A_1) . V_2 \quad (II)$$

(II) em (I): $$p_1 - p_2 = \frac{\rho V_2^2}{2}\left[1 - (A_2/A_1)^2\right] + \rho . (z_2 - z_1) \quad (III)$$

$$p_1 - \rho . (z_2 - z_1) - \cancel{\rho . \ell} - \rho . h + SG . \rho . h + \cancel{\rho . \ell} = p_2$$

$$p_1 - p_2 = \rho (z_2 - z_1) + (1 - SG) . \rho . h \quad (IV)$$

Igualando (III) e (IV), resulta:

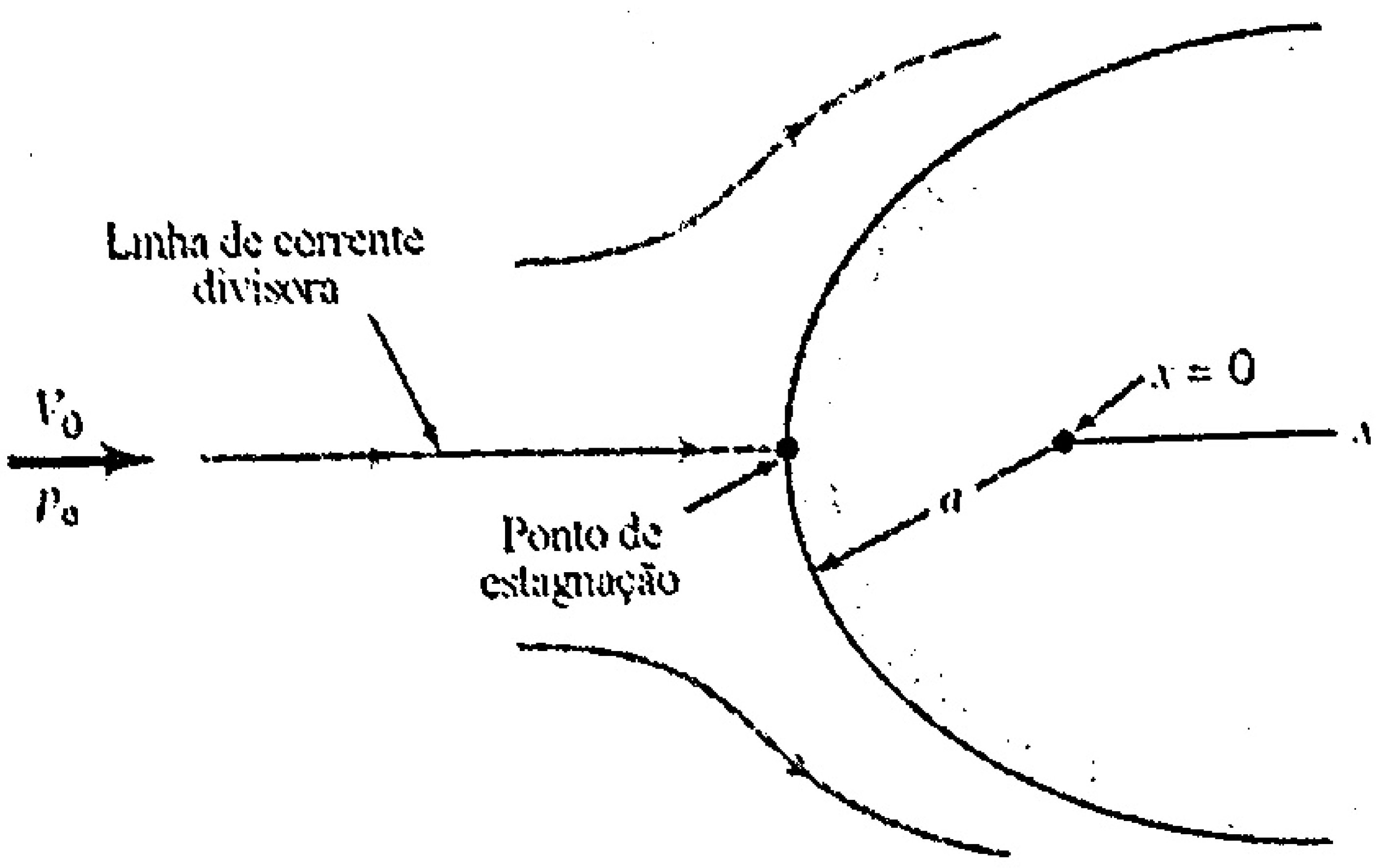
$$\cancel{\rho . (z_2 - z_1)} + (1 - SG) . \rho . h = \frac{\rho . V_2^2}{2}\left[1 - (A_2/A_1)^2\right] + \cancel{\rho (z_2 - z_1)}$$

Considerando $V_2 = Q/A_2$ ∴

$$\boxed{h = \left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 . \left[\frac{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{2g(1 - SG)}\right]}$$

DINÂMICA DOS FLUIDOS ELEMENTAR E EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A figura ao lado mostra o escoamento em regime permanente de um fluido incompressível em torno de um objeto (veja vídeo 3.3). A velocidade do escoamento ao longo da linha de corrente horizontal que divide o escoamento $(-\infty \leqslant x \leqslant -a)$ é dada por $V=V_0.(1+a/x)$ onde a é o raio de curvatura da região frontal do objeto e V_0 é a velocidade a montante (ao longe) do cilindro. (a) Determine o gradiente de pressão ao longo desta linha de corrente. (b) Se a pressão a montante do cilindro é p_0, integre o gradiente de pressão para obter $p(x)$ na faixa $-\infty \leqslant x \leqslant -a$. (c) Mostre, utilizando o resultado da parte (b), que a pressão no ponto de estagnação ($x = -a$) é igual a $p_0+\rho.V_0^2/2$. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.3]



(a) Em RP : $-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial s} - g\underbrace{\cancel{\dfrac{\partial z}{\partial s}}}_{=0} = V_s.\dfrac{\partial V_s}{\partial s}$; $V_s \equiv V$; $\dfrac{dp}{ds} = -\rho V\dfrac{dV}{ds}$

$S \equiv X$ e $V = V_0(1+a/x)$ $\therefore \dfrac{dV}{dx} = -\dfrac{V_0.a}{x^2}$

$$\frac{dp}{ds} = \frac{dp}{dx} = -\rho.V_0.\left(1+\frac{a}{x}\right).\left(-\frac{V_0.a}{x^2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dx} = \rho.a.V_0^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)}$$

(b) $$\int_{p_0}^{p} dp = \int_{x=-\infty}^{x} \rho.a.V_0^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)dx$$

$$p - p_0 = \rho.a\,V_0^2\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{a}{x^2}\right]_{-\infty}^{x} \therefore \boxed{p = p_0 - \rho a V_0^2\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{2x^2}\right)}$$

(c) Quando $x = -a$ (pto de estagnação)

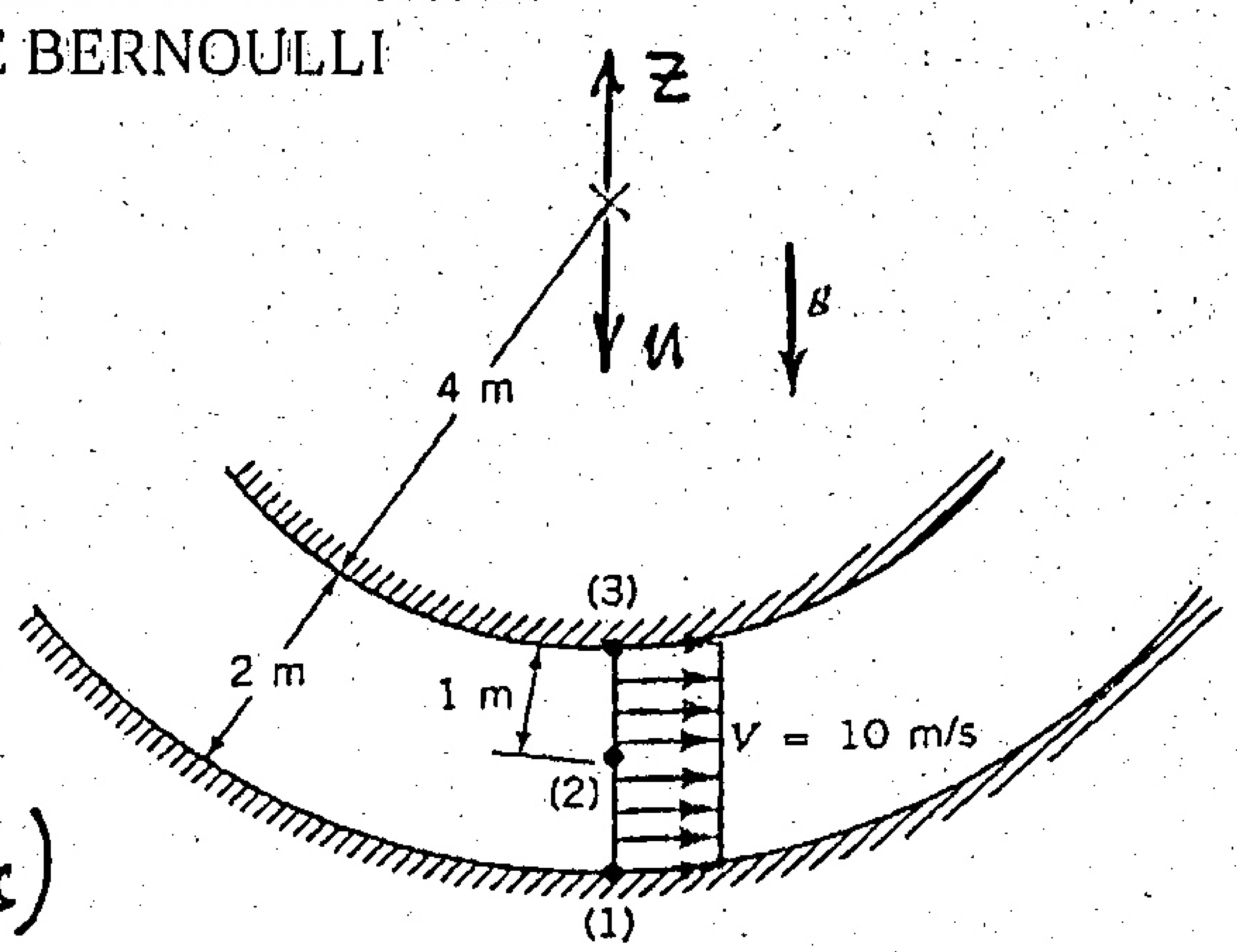
$$p = p_0 - \rho a V_0^2\left(-\frac{1}{a}+\frac{a}{2a^2}\right) \Rightarrow p = p_0 + \rho\frac{V_0^2}{2}$$

Da Equ. Bernoulli: $p_0 + \rho V_0^2/2 = p_1 + \rho V_1^2/2$

$V_1 = V)_{x=-a} = V_0(1+a/(-a)) = 0$ $\therefore$ $\underline{p_1 = p_0 + \rho V_0^2/2}$ c.q.d.

DINÂMICA DOS FLUIDOS ELEMENTAR
E EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Água escoa na curva bidimensional mostrada na figura ao lado. Note que as linhas de corrente são circulares e que a velocidade é uniforme no escoamento. Determine a pressão nos pontos (2) e (3) sabendo que a pressão no ponto (1) é igual a 40 kPa. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.10]



$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \qquad (V = V_s)$$

$$\gamma\frac{\partial z}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial n} = \rho\frac{V^2}{R} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial n} = -1 \quad ; \quad V = 10\,m/s$$

$$\frac{dp}{dn} = \rho\frac{V^2}{R} + \gamma = \rho\frac{V^2}{n} + \gamma$$

$$\int_4^n dp = \int_4^n \rho\frac{V^2}{n}\,dn + \int_4^n \gamma\,.\,dn \Rightarrow p(n) - p_3 = \rho V^2[\ln(n) - \ln 4] + \gamma(n-4)$$

$$p_1 - p_3 = \rho V^2(\ln 6 - \ln 4) + \gamma(6-4)$$

$$40000 - p_3 = 1000.10^2.(\ln 6 - \ln 4) + 9810(6-4)$$

$$p_3 = -20166{,}5\ Pa \Rightarrow \boxed{p_3 = -20{,}17\ kPa}$$

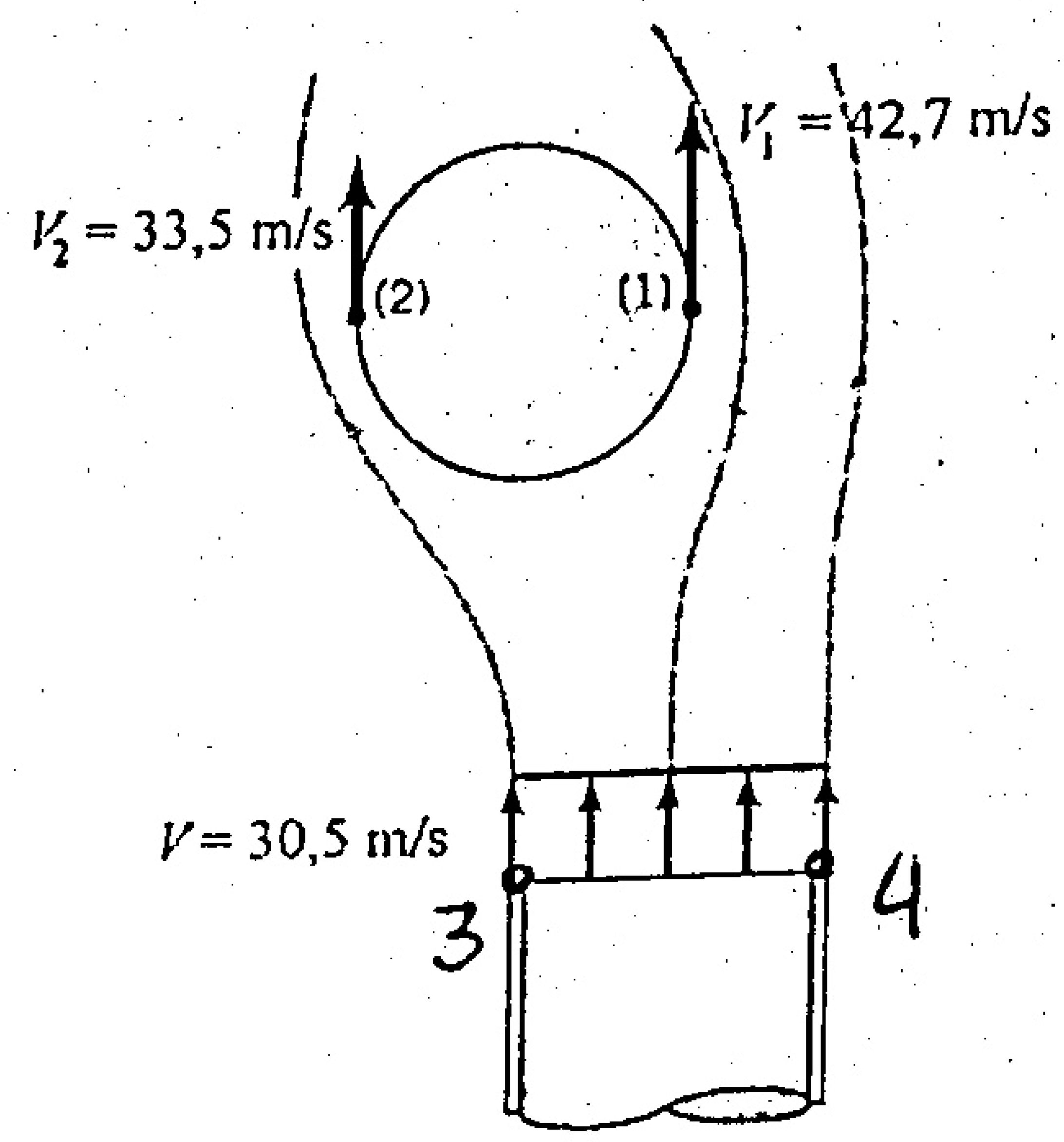
$$p_2 - p_3 = \rho V^2(\ln 5 - \ln 4) + \gamma(5-4)$$

$$p_2 - 20166{,}5 = 1000.10^2(\ln 5 - \ln 4) + 9810(5-4)$$

$$p_2 = 11957{,}8\ Pa \Rightarrow \boxed{p_2 = 11{,}96\ kPa}$$

DINÂMICA DOS FLUIDOS ELEMENTAR
E EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A figura ao lado mostra um jato de ar incidindo numa esfera (veja vídeo 3.1). Observe que a velocidade do ar na região na região próxima ao ponto 1 é maior que aquela da região próxima do ponto 2 quando a esfera não está alinhada com o jato. Determine, para as condições mostradas na figura, a diferença entre as pressões nos pontos 2 e 1. Despreze os efeitos viscosos e gravitacionais. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.16]



$$p_3 + \frac{\rho V_3^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} \quad (z_3 \approx z_2)$$

$$p_4 + \frac{\rho V_4^2}{2} = p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} \quad (z_4 \approx z_1)$$

$$p_3 = p_4 = 0 \ (\text{manométrica}); \ V_3 = V_4$$

Assim, mesmo que 1 e 2 não estejam na mesma LC, é possível escrever:

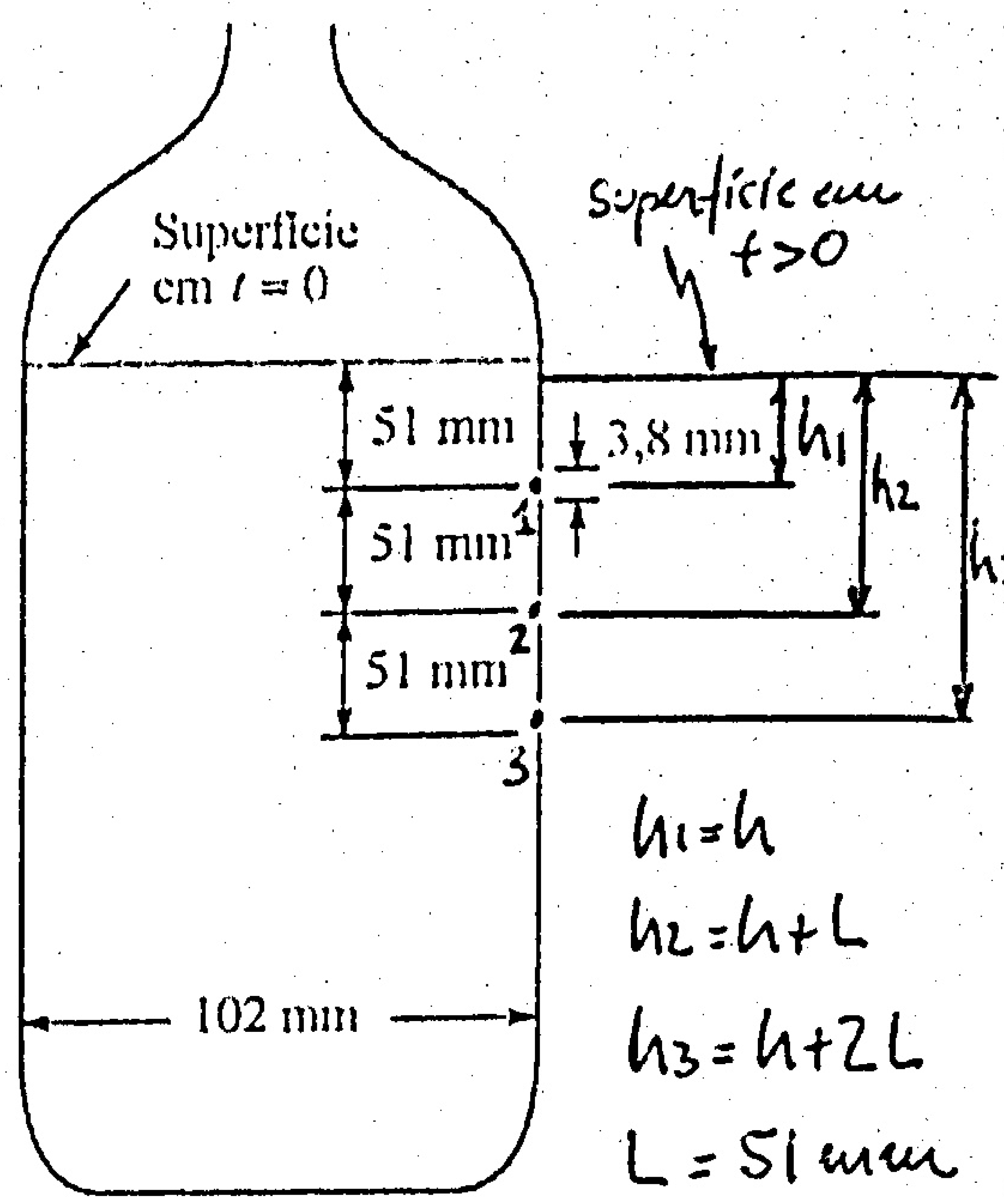
$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} \quad \therefore \quad p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,23 \cdot (33,5^2 - 42,7^2)$$

$$\boxed{p_1 - p_2 = -431,14 \text{ Pa}}$$

por isso a bolinha oscila no plano ortogonal ao eixo axial da saída do bocal.

A figura ao lado mostra um esboço de uma garrafa de refrigerante que contém água e apresenta três orifícios na sua superfície lateral. Os diâmetros dos orifícios são iguais a 3,8 mm, a distância entre as linhas de centro de orifícios adjacentes é 51 mm e o diâmetro da garrafa é 102 mm. No instante inicial, a superfície livre da água dista 51 mm da linha de centro do primeiro orifício. Admitindo que os efeitos viscosos são desprezíveis e que o regime de escoamento é próximo do permanente, determine o tempo necessário para que a vazão no primeiro orifício se torne nula. Compare seu resultado com aquele que pode ser obtido no vídeo 3.5. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.20]



$h_1 = h$

$h_2 = h + L$

$h_3 = h + 2L$

$L = 51$ mm

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -A_g \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$Q_i = V_i . A_i = \sqrt{2 g h_i} . A_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = (\pi/4)(3{,}8 \times 10^{-3})^2 = 11{,}34 \times 10^{-6} \, m^2$$

$$A_g = (\pi/4)(0{,}102)^2 = 8{,}171 \times 10^{-3} \, m^2$$

$$\sqrt{2g} . A_1 \left[\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{h_3}\right] = -A_g \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{A_1}{A_g} . \sqrt{2g} \int_0^t dt = \int_L^0 \frac{dh}{(\sqrt{h} + \sqrt{h+L} + \sqrt{h+2L})} \qquad p/ \; h_1 = h = L$$

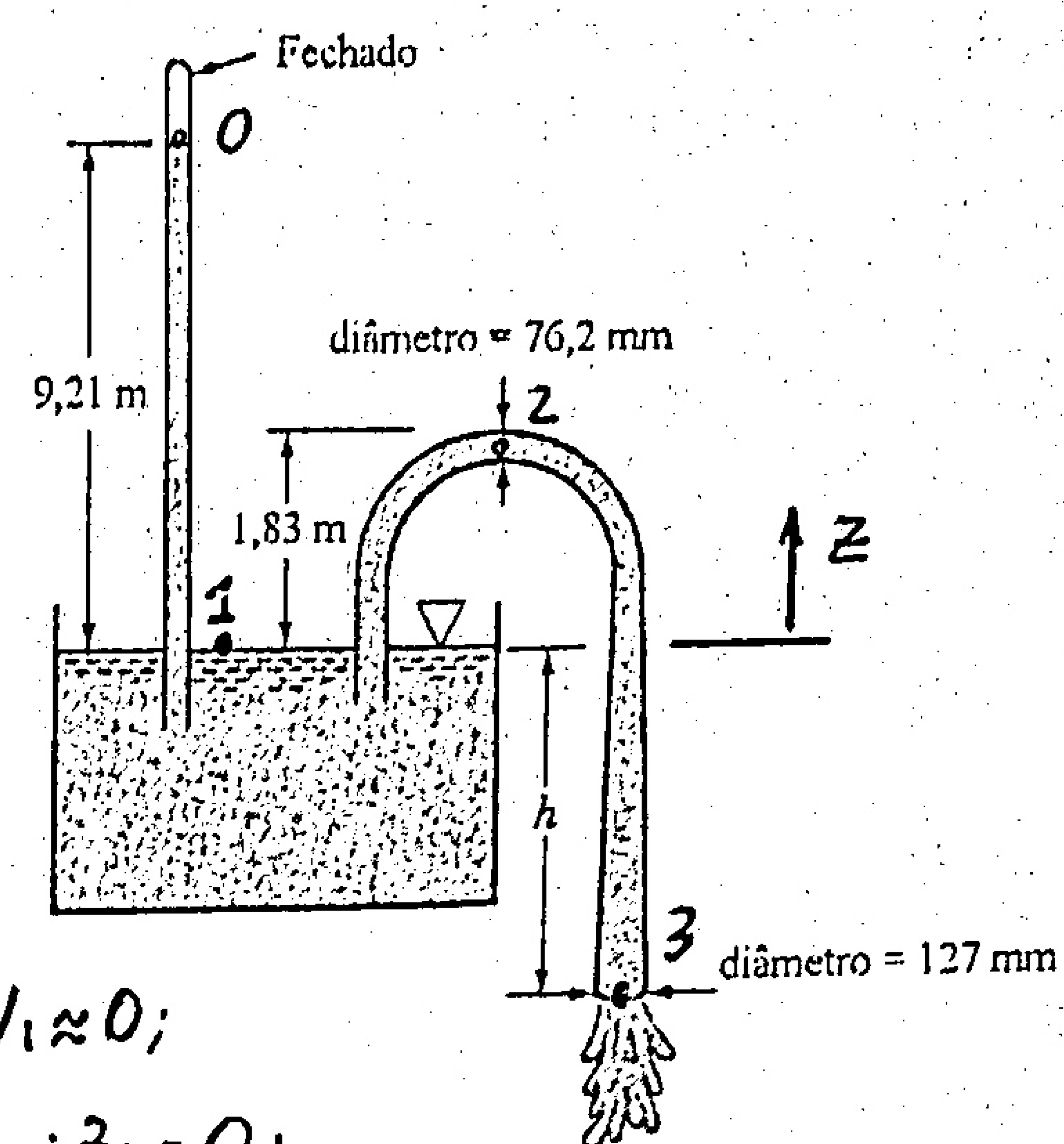
$$t = 162{,}672 \int_0^L \frac{dh}{(\sqrt{h} + \sqrt{h+L} + \sqrt{h+2L})}$$

Resolvendo numericam/e a integral dá 0,066354

Logo $\boxed{t = 10{,}8 s}$

DINÂMICA DOS FLUIDOS ELEMENTAR
E EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Água é retirada do tanque mostrado na figura ao lado enquanto o barômetro d'água indica uma leitura de 9,21 m. Determine o máximo valor de h com a restrição de que não ocorra cavitação no sistema analisado. Note que a pressão do vapor no topo da coluna do barômetro é igual a pressão de vapor do liquido. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.39]



Utiliza-se pressões manométricas nas equações a seguir:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad \therefore \begin{cases} p_1 = 0 ;\ V_1 \approx 0; \\ p_2 = p_{vap} ;\ z_1 = 0; \\ z_2 = 1{,}83 \end{cases}$$

$$0 = \frac{p_{vap}}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad (I)$$

$$p_1 = p_0 + \gamma . z_0 = 0 \ (II) \ (p_1 = 0)$$

$$p_0 = p_{vap} \ (III)$$

Combinando (I), (II) e (III):

$$p_{vap} = -\gamma . z_0$$

$$0 = -\frac{\cancel{\gamma} z_0}{\cancel{\gamma}} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \therefore V_2 = \sqrt{2g(z_0 - z_2)}$$

$$V_2 = \sqrt{2 . 9{,}81 . (9{,}21 - 1{,}83)} = 12{,}0331 \ m/s$$

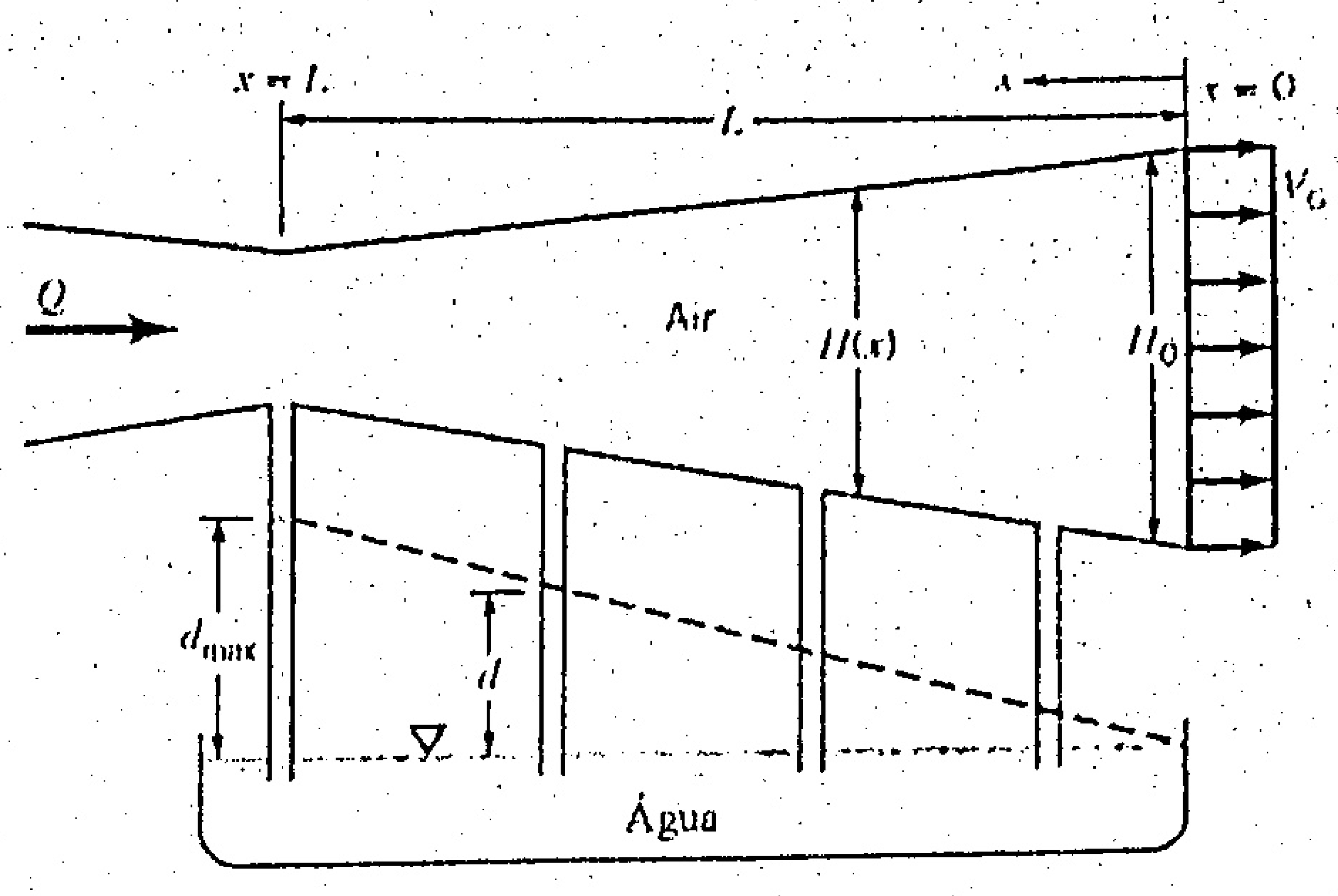
$$Q_3 = Q_2 \Rightarrow V_3 = \frac{A_2}{A_3} V_2 = \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^2 . V_2 = \left(\frac{76{,}2}{127}\right)^2 . 12{,}0331 = 4{,}332 \ m/s$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 \ ; \ p_1 = p_3 = 0;\ V_1 \approx 0;\ z_1 = 0 ;\ z_3 = -h$$

$$0 = \frac{V_3^2}{2g} - h \Rightarrow h = \frac{V_3^2}{2g} = \frac{(4{,}332)^2}{2 . 9{,}81} = 0{,}9565 \ m$$

$$\boxed{h = 95{,}7 \ cm}$$

Ar escoa, em regime permanente, no bocal convergente-divergente mostrado na figura ao lado (veja vídeo 3.6). A seção transversal do bocal é retangular com largura constante. A altura do bocal e a velocidade do escoamento na seção de descarga do bocal são iguais a H_0 e V_0, respectivamente. A forma do bocal é tal que a curva que pode ser construída com as alturas das colunas de água nos manômetros instalados no bocal é uma reta. Nestas condições, $d = (d_{máx}/L).x$, onde L é o comprimento do trecho divergente do bocal, e $d_{máx}$ é a altura da coluna de água em $x = L$. Determine a altura do canal adimensional (H/H_0) do canal em função da distância adimensional (x/L) do canal e de outros parâmetros importantes do problema. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.55]



para um ponto genérico entre $(0 < x \leq L)$, sem subscrito, e a saída $(x = 0)$, c/ subscrito 0:

$$p + \gamma . z + \frac{\rho V^2}{2} = p_0 + \gamma . z_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} \qquad (\rho = \rho_{ar})$$

$$z = z_0 ; p_0 = 0 \text{ (man.)} ; p = -\gamma_{H_2O} . d = -\gamma_{H_2O} . \frac{d_{máx} . x}{L}$$

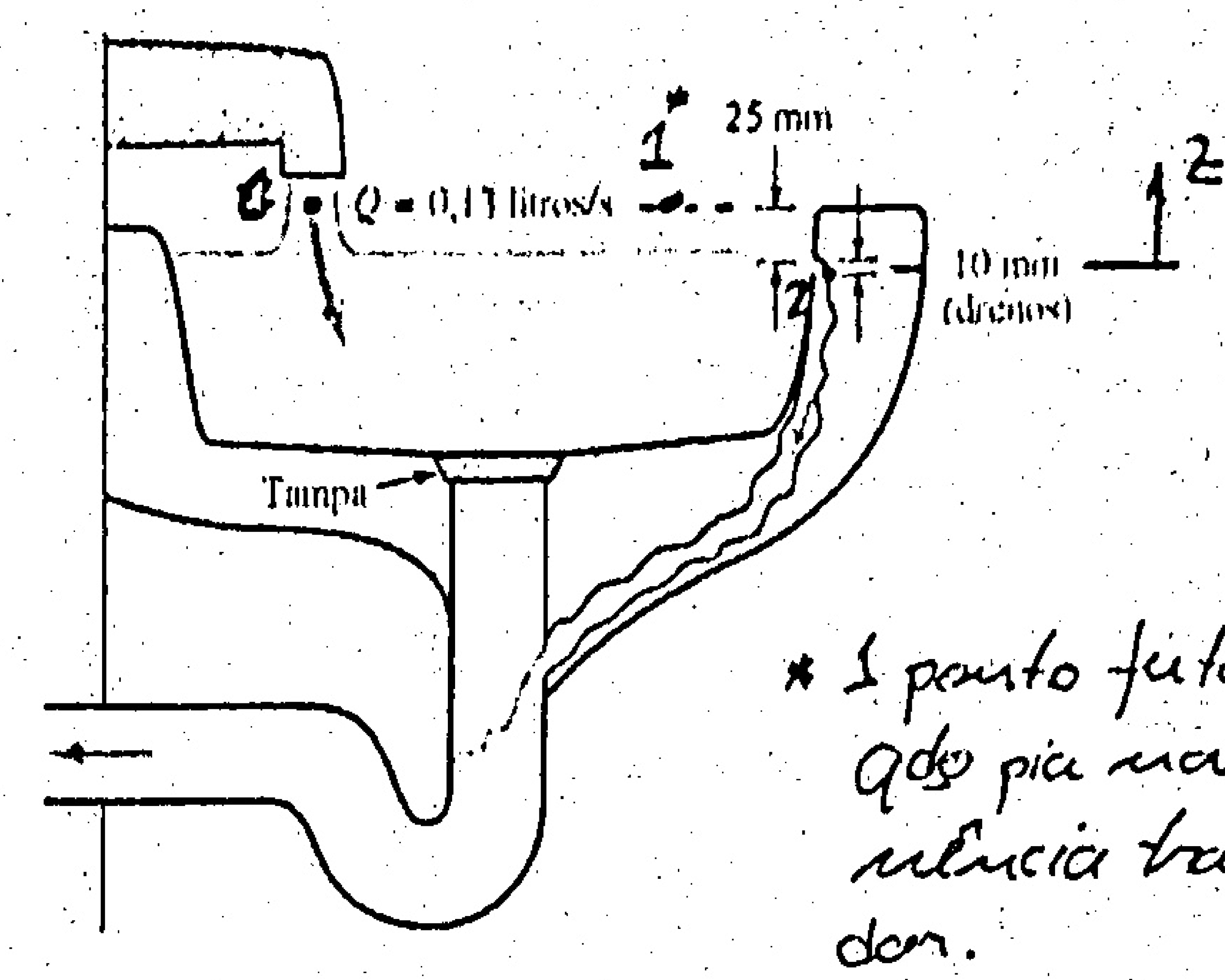
$$-\gamma_{H_2O} . \frac{d_{máx} . x}{L} + \frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} \rho V_0^2$$

$$A . V = A_0 . V_0 \Rightarrow V = (A_0 / A) . V_0 = (H_0 / H) . V_0$$

$$-\gamma_{H_2O} . \frac{d_{máx} . x}{L} + \frac{1}{2} . \rho . \left(\frac{H_0}{H} V_0 \right)^2 = \frac{1}{2} \rho V_0^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{H}{H_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 . \gamma_{H_2O} . d_{máx}}{\rho . V_0^2} \right) . \frac{x}{L}}}}$$

A vazão de água na torneira da figura ao lado (veja vídeo 5.1) é igual a 0,13 L/s. Se o ralo for fechado, a água pode atingir os drenos posicionados na região superior da pia. Considere que cada dreno é circular com diâmetro igual a 10 mm. Quantos drenos são necessários para que a pia não apresente transbordamento? Despreze os efeitos viscosos. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.61]



* 1 ponto futuro qdo pia na iminência transbordar.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$p_1 = 0$ (man) ; $p_2 = 0$; $z_2 = 0$; $V_1 \approx 0$

$$z_1 = \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2 = \sqrt{2 g z_1} = (2 . 9{,}81 . 25 \times 10^{-3})^{1/2} \Rightarrow V_2 = 0{,}7 \text{ m/s}$$

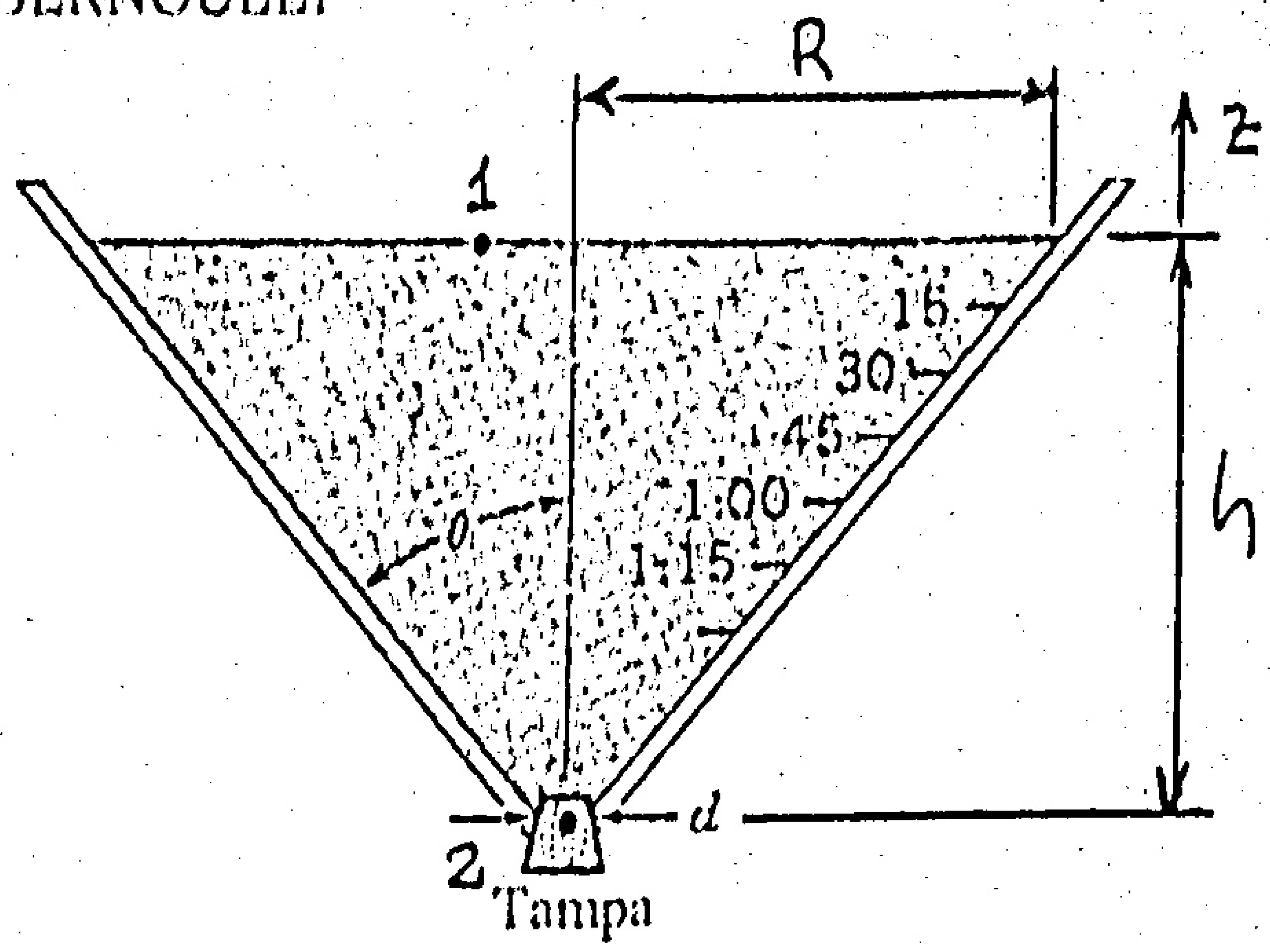
$$Q = n . A_2 . V_2 = n . (\pi/4) d_2^2 . V_2 . C_c \qquad C_c = \text{coef. contração}$$

$$n = \frac{4 . Q}{\pi . C_c . d_2^2 . V_2} = \frac{4 . 0{,}13 \times 10^{-3}}{\pi . 1 . (0{,}01)^2 . 0{,}7} \Rightarrow n = 2{,}36 \Rightarrow \boxed{n = 3} \quad (C_c = 1)$$

$$n = \frac{4 . 0{,}13 \times 10^{-3}}{\pi . 0{,}61 . (0{,}01)^2 . 0{,}7} \Rightarrow n = 3{,}88 \Rightarrow \boxed{n = 4} \quad (C_c = 0{,}61)$$

<u>Comentar</u>: Cc figura 3.14

A figura ao lado mostra um cronômetro construído com um funil. O funil é enchido até a borda com água e a tampa é removida no instante $t = 0$. As marcas devem ser colocadas na parede do funil e devem indicar intervalos de tempo iguais a 15 s. O fundo de escala do cronômetro deve ser igual a 3 min (neste instante o funil está vazio). Projete vários funis considerando $\theta = 30°$, $45°$ e $60°$ e que o diâmetro da seção de descarga do funil é 2,5 mm. Refaça o problema admitindo que o diâmetro da seção de descarga é igual a 1,25 mm. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.78]



$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \; ; \quad p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ z_1 = 0\ ;\ z_2 = -h$$

$$V_1 = -dh/dt \ll V_2 \text{ se } R \gg (d/2) \quad \therefore \quad V_2 = \sqrt{2gh}$$

Uma vez que $A_1 V_1 = A_2 V_2 \therefore -A_1 \frac{dh}{dt} = A_2 \sqrt{2gh}$

$$-\pi R^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{2gh}$$; como $R = h \cdot tg\,\theta$, segue-se

$$-h^2 \cdot tg^2\theta \frac{dh}{dt} = \frac{d^2}{4} \cdot \sqrt{2gh} \quad \therefore \quad h^{3/2} \cdot dh = -\frac{d^2 \cdot \sqrt{2g}}{4 \cdot tg^2\theta} \cdot dt$$

$$\int_{h_0}^{h} h^{3/2} \cdot dh = -\frac{d^2 \sqrt{2g}}{4 \cdot tg^2\theta} \int_0^t dt \quad \therefore \quad h = \left(h_0^{5/2} - \frac{5 \cdot d^2 \cdot \sqrt{2g} \cdot t}{8 \cdot tg^2\theta} \right)^{2/5} \quad (I)$$

Como $h = 0$ quando $t = 3\text{ min} = 180\text{ s}$

$$h_0^{5/2} = \frac{5 \cdot d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot 180}{8 \cdot tg^2\theta} = \frac{498{,}3128 \cdot d^2}{tg^2\theta} \quad (II)$$

Combinando (II) e (I):

$$h = \left(498{,}3128 \cdot \frac{d^2}{tg^2\theta} \right)^{2/5} \cdot \left(1 - \frac{t}{180} \right)^{2/5} \Rightarrow \boxed{h = 11{,}995 \cdot \left(\frac{d}{tg\,\theta} \right)^{4/5} \cdot \left(1 - \frac{t}{180} \right)^{2/5}}$$