CINEMÁTICA

Uma partícula A passa pela origem no instante t = 0, com temperatura $T_A$ = 273 K e com velocidade $V_A$ = 10 m/s. Ao atingir o ponto de coordenadas ($x$ = 0,1 m; $y$ = 0,1 m; $z$ = 0,141 m) no instante $t' > 0$, com temperatura $T_A'$ = 285 K, uma partícula B está passando pela origem (no mesmo instante t') com temperatura $T_B'$ = 275 K. Pede-se:

(a) As derivadas local, convectiva e material (total) da temperatura na origem e no instante t = 0;

(b) A derivada material da temperatura, em variáveis de Lagrange, no instante t = 0.

[Apostila, exercício 2.2]

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot T$$

Usando coordenadas intrínsecas (trajetória p/ qual $\vec{V}$ é tangente à coordenada s : LC) :

$\vec{V} = V \cdot \vec{e_s}$ e $\vec{V} \cdot \vec{\nabla} = V \cdot \frac{\partial}{\partial s}$ , logo

$$\underset{\text{material}}{\frac{DT}{Dt}} = \underset{\text{local}}{\frac{\partial T}{\partial t}} + \underset{\text{convectiva}}{V \cdot \frac{\partial T}{\partial s}}$$

(a) $\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t}$ e $\frac{\partial T}{\partial s} \approx \frac{\Delta T}{\Delta s}$ com $\Delta t = t'$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \cong 0{,}2 \text{ m}$$

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{V} \Rightarrow t' = \Delta t = 0{,}2/10 = 0{,}02 \text{ s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_B' - T_A}{t'} = \frac{275 - 273}{0{,}02} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = 100 \text{ K/s}}$$

$$V \cdot \frac{\partial T}{\partial s} = V \cdot \frac{\Delta T}{\Delta s} = V \cdot \left(\frac{T_A' - T_B'}{\Delta s}\right) = 10 \cdot \left(\frac{285 - 275}{0{,}2}\right)$$

$$\boxed{V \cdot \frac{\partial T}{\partial s} = 500 \text{ K/s}}$$

$$\frac{DT}{Dt} = 100 + 500 \Rightarrow \boxed{\frac{DT}{Dt} = 600\ K/s}$$

Os resultados do item (a) são ditos em variáveis de Euler.

(b) $$\frac{DT}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(A,t') - T(A,t_0=0)}{\Delta t} = \frac{\Delta T_A}{\Delta t}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{T_A' - T_A}{\Delta t} = \frac{285-273}{0{,}02} \Rightarrow \boxed{\frac{DT}{Dt} = 600\ K/s}$$ Variáveis de Lagrange

p/A: 2 instrumentos de leitura → origem e P, medindo-se t.b. o $\Delta t$ entre as duas passagens.

p/B: só origem é medido, mas deve estar casada c/ leitura de A q̲ᵉ passa em P.

→ p/análise em variáveis de Euler.

CINEMÁTICA

Um campo de velocidade é dado por

$$\vec{V} = A.x.\vec{i} - A.y.\vec{j}$$

onde as unidades de velocidade estão em m/s; $x$ e $y$ são dados em metros; A = 0,3 s$^{-1}$.
(a) Obtenha uma equação para as linhas de corrente no plano $xy$;
(b) Trace a linha de corrente que passa pelo ponto $(x_0, y_0) = (2, 8)$;
(c) Determine a velocidade de uma partícula no ponto (2, 8);
(d) Se a partícula passando pelo ponto $(x_0, y_0)$ no instante t = 0 for marcada, determine a sua localização no instante t = 6 s;
(e) Qual a velocidade dessa partícula em t = 6 s?
(f) Mostre que a equação da trajetória da partícula é a mesma equação da linha de corrente. Em que tipo de regime de escoamento isto ocorre?
[(FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006), exemplo 2.1]

(a) $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{-A.y}{A.x} = -\frac{y}{x}$

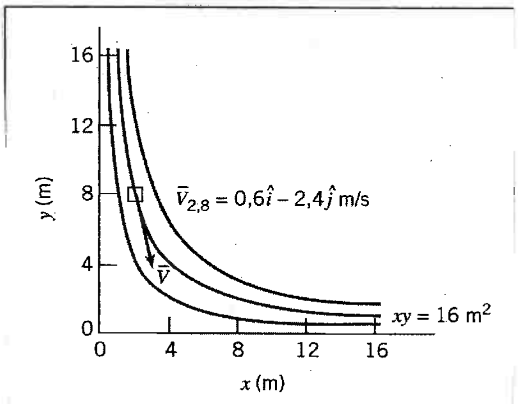
Logo $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x + C_1$

Cuja forma final pode ser escrita: $\boxed{x.y = C}$

(b) A constante C em $(x_0, y_0) = (2, 8)$ é

$C = 2.8 = 16\ m^2$

Gráfico ao lado.




(c) $\vec{V} = Ax\vec{i} - Ay\vec{j} = A(x\vec{i} - y\vec{j})$

Em (2,8):

$\vec{V} = 0,3(2\vec{i} - 8\vec{j})$

$\boxed{\vec{V} = (0,6\vec{i} - 2,4\vec{j})\ m/s\ ;\ |\vec{V}| = 2,47\ m/s\ ;\ \theta = 287^\circ}$

(d) Uma partícula movendo-se neste campo terá vel. dada por (discutir)

$$\vec{V} = Ax\vec{i} - Ay\vec{j}$$

Logo $u_p = \frac{dx}{dt} = A.x$ e $v_p = \frac{dy}{dt} = -Ay$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t A.dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = A.t \Rightarrow x = x_0 . e^{A.t}$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = -\int_0^t A.dt \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = -A.t \Rightarrow y = y_0 . e^{-A.t}$$

P/ $t = 6s$:

$x = 2 . e^{0,3.6} = 12,1\ m$ ; $y = 8 . e^{-0,3.6} = 1,32\ m$

Logo, p/ $t = 6s$ a partícula estará em $\boxed{(x,y) = (12,1;1,32)\ m}$

(e) $\vec{V} = A(x\vec{i} - y\vec{j}) = 0,3(12,1\vec{i} - 1,32\vec{j})$

$$\boxed{\vec{V} = (3,63\vec{i} - 0,396\vec{j})\ m/s \ ; \ |\vec{V}| = 3,65\ m/s \ ; \ \theta = 357°}$$

(f) Já desenvolvido no item (d); parte-se de:

$$x = x_0 . e^{At} \quad e \quad y = y_0 . e^{-At}$$

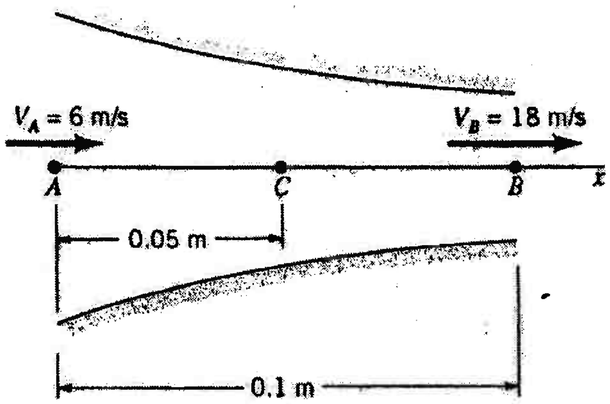
Elimina-se t: $e^{At} = \frac{y_0}{y} = \frac{x}{x_0}$

Portanto: $\boxed{x . y = x_0 . y_0 = 16\ m^2}$

LT ≡ LC no regime de escoamento permanente.

CINEMÁTICA

A velocidade do fluido ao longo do eixo $x$ mostrado na figura muda linearmente de 6 m/s, no ponto $A$, para 18 m/s, no ponto $B$. Determine as acelerações nesta direção do escoamento nos pontos $A$, $B$ e $C$. Admita que o regime de escoamento é o permanente. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 4.21]




$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{V} \quad c/ \ u = u(x) \ ; \ v = w = 0$$

Logo: $\vec{a} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{i} = u\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}$ p.q. RP $\Rightarrow \partial u/\partial t = 0$

Do enunciado: $u = \alpha \cdot x + \beta$ : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u(x) = V_A = 6\,m/s \therefore \beta = 6\,m/s \\ x = 0{,}1\,m \Rightarrow u(x) = V_B = 18\,m/s \therefore \alpha = 120\,s^{-1} \end{cases}$

$u(x) = 120 \cdot x + 6$, logo $\vec{a} = [(120x+6)\cdot 120]\vec{i}$

$$\vec{a} = [(14400\,x + 720)\,\vec{i}]\ m/s^2$$

p/ $x_A = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = (720\,\vec{i})\ m/s^2}$

p/ $x_B = 0{,}1\,m \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = (2160\,\vec{i})\ m/s^2}$

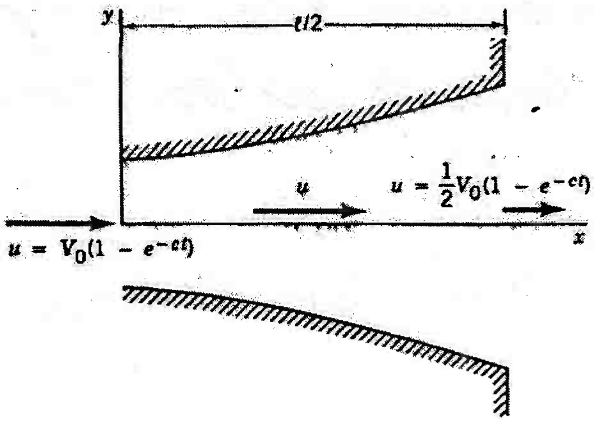
p/ $x_C = 0{,}05\,m \Rightarrow \boxed{\vec{a}_C = (1440\,\vec{i})\ m/s^2}$

CINEMÁTICA

Água escoa pelo difusor mostrado na figura quando uma válvula é aberta. A velocidade ao longo da linha de centro do difusor é dada, em função do tempo, por

$$\vec{V}=u.\vec{i}=V_0.(1-e^{-c.t}).(1-x/l).\vec{i}$$

onde $V_0$, $c$ e $l$ são constantes. Determine a aceleração do escoamento em função de $x$ e $t$. Se $V_0$ = 3 m/s e $l$ = 1,5 m, qual o valor de $c$ (não nulo) necessário para que a aceleração seja nula em qualquer $x$ e em $t$ = 2 s? Como a aceleração pode ser nula num escoamento onde a vazão em volume aumenta com o tempo? [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 4.23]




$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{V} \quad \text{c/ } u = u(x,t)\ ;\ v = w = 0$$

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{i} = a_x\vec{i} \quad \text{com } u = V_0\,(1-e^{-ct})\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$

$$a_x = V_0\left(1-\frac{x}{\ell}\right).c\,e^{-c.t} + V_0^2.(1-e^{-ct})^2\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\left(-\frac{1}{\ell}\right)$$

$$\boxed{a_x = V_0.\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\left[c.e^{-c.t} - \frac{V_0}{\ell}(1-e^{-ct})^2\right]}$$

Se $a_x = 0$ para q.q. $x$ em $t = 2s$ :

$$0 = c.e^{-ct} - \frac{V_0}{\ell}(1-e^{-ct})^2 \quad \text{com } V_0 = 3 \text{ m/s e } \ell = 1{,}5 \text{ m}$$

$c.e^{-2.c} - \frac{3}{1{,}5}(1-e^{-2c})^2 = 0$ ; cuja solução é $\boxed{c = 0{,}1244\ s^{-1}}$

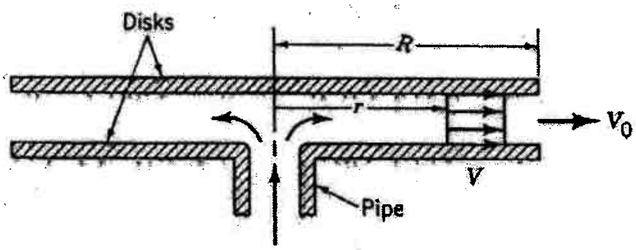
continua →

Na condição de $\vec{a} = 0$ ($a_x = 0$) a derivada local ($\partial u/\partial t$) é positiva, mas é anulada pois a derivada convectiva ($u\,\partial u/\partial x$) é negativa. Então uma acelera e a outra desacelera. Então quando $a_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x}$

A vazão volumétrica aumenta com o tempo, mas o fluido escoa para uma área cada vez maior (divergência da seção) reduzindo, então, sua velocidade.

CINEMÁTICA

Ar escoa no canal formado por dois discos paralelos (veja figura). A velocidade do fluido no canal é dada por $V = V_0 \, . \, R \, / \, r$, onde $R$ é o raio dos discos, $r$ é a coordenada radial e $V_0$ é a velocidade do fluido na borda do canal. Determine a aceleração em $r$ = 0,3; 0,61 e 0,91 m, sabendo que $V_0$ = 1, 5 m/s e $R$ = 0,91 m. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 4.47]




Adota-se RP

$$\vec{a} = \underbrace{a_n \vec{n}}_{\text{Normal à LC}} + \underbrace{a_s . \vec{s}}_{\text{Na dire. de LC}} \qquad c/ \; a_n = \frac{V^2}{R} = 0 \text{ pois } R = \infty \text{ (LC são retas)}$$

$$a_s = V \frac{\partial V}{\partial s} = V \frac{\partial V}{\partial r} \qquad c/ \; V(r) = \frac{V_0 . R}{r}$$

$$a_s = \frac{V_0 . R}{r} \cdot \left( - \frac{V_0 . R}{r^2} \right) \Rightarrow a_s = - \frac{V_0^2 . R^2}{r^3} \;\therefore\; \vec{a} = - \frac{V_0^2 . R^2}{r^3} . \vec{s}$$

onde $\vec{s}$ é dir. radial.

$$p/ r = 0{,}3 \, m \Rightarrow \vec{a} = - \frac{1{,}5^2 . 0{,}91^2}{0{,}3^3} \vec{s} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = (-69{,}01 \vec{s}) \, m/s^2}$$

$$p/ r = 0{,}61 \, m \Rightarrow \vec{a} = - \frac{1{,}5^2 . 0{,}91^2}{0{,}61^3} \vec{s} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = (-8{,}21 \vec{s}) \, m/s^2}$$

$$p/ r = 0{,}91 \, m \Rightarrow \vec{a} = - \frac{1{,}5^2 . 0{,}91^2}{0{,}91^3} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = (-2{,}47 \vec{s}) \, m/s^2}$$

CINEMÁTICA

Dado o movimento plano em que,

$$\vec{V}(P,t)=(U+a.t).\vec{i}+V_0.\vec{j}$$

mostre que as linhas de corrente, no instante $t_0$, são retas e que as linhas de trajetórias são parábolas. [Apostila, exercício 2.5]

**LC** $\vec{V} \times d\vec{s} = 0 \therefore \dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v} \Rightarrow \dfrac{dx}{U+at} = \dfrac{dy}{V_0}$

$V_0 . dx = (U+at)\,dy \Rightarrow V_0 . x = (U+at)\,y + C$

$\boxed{x = \left(\dfrac{U+a.t}{V_0}\right) y + C'}$ : RETA

Obs : $w = dz/dt = 0 \Rightarrow z = C^{te}$

**LT** $\dfrac{dx}{dt} = u = U+at$ ; $\dfrac{dy}{dt} = v = V_0$ ; $\dfrac{dz}{dt} = w = 0$

Integrando,

$x = U.t + \dfrac{a}{2} t^2 + K_1$ ; $y = V_0 . t + K_2$ ; $z = k_3$

p/ $t = 0 \Rightarrow P(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow K_1 = x_0$ ; $k_2 = y_0$ ; $k_3 = z_0$

$\boxed{x = x_0 + U.t + \dfrac{a.t^2}{2} \; ; \; y = y_0 + V_0.t \; ; \; z = z_0}$ : PARÁBOLA em X

[redacted]

CINEMÁTICA

Dado o campo de velocidades

$$\vec{V}(P,t) = 6.x\vec{i} + 6.y.\vec{j} - 7.t.\vec{k}$$

determine para $t$ = 10 s e no ponto $P$(3 m; 1,8 m; 0) a velocidade e a aceleração, usando método de Euler e de Lagrange. [Apostila, exercício 2.13]

Euler:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

$$u = 6x$$
$$v = 6y$$
$$w = -7.t$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -7\vec{k}$$

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} =$$

$$= \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$= 36.x.\vec{i} + 36y\vec{j}$$

$\vec{a} = -7\vec{k} + 36x\vec{i} + 36y\vec{j}$ ; aplicando $P(x,y,z)$ e $t$ dados:

$$\boxed{\vec{a} = (108\vec{i} + 64{,}8\vec{j} - 7\vec{k})\ m/s^2}$$

Lagrange

Trajetórias $\Rightarrow$ $6x = dx/dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = 6\int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = 6t$

$$\underline{x = x_0 . e^{6t}}$$

$$6y = dy/dt \Rightarrow y = y_0 . e^{6t}$$

$$-7t = dz/dt \Rightarrow z = z_0 - 7t^2/2$$

Velocidade $\rightarrow$ $u = 6 . x_0 . e^{6t}$ ; $v = 6 . y_0 . e^{6t}$ ; $w = -7t$

$$\vec{V} = (6 x_0 e^{6t})\vec{i} + (6 . y_0 . e^{6t})\vec{j} - (7t)\vec{k}$$

Aceleração $\rightarrow$ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = (36 . \underbrace{x_0 . e^{6t}}_{x})\vec{i} + (36 . \underbrace{y_0 . e^{6t}}_{y})\vec{j} - 7\vec{k}$

p/ $x = 3m$ e $y = 1,8m$ (ponto P)

$$\boxed{\vec{a} = (108\vec{i} + 64,8\vec{j} - 7\vec{k})\ m/s^2}$$