A equação de Bernoulli

Prof. Marcos Tadeu Pereira

Aula 5 de PME3222 – Equação de Bernoulli - 2020

A equação de Bernoulli é uma das mais usadas na mecânica dos fluidos, devido à sua simplicidade e eficácia para resolver problemas em:

- **escoamentos incompressíveis**,
- **regime permanente**
- **viscosidade desprezível**.

Observar que **não** deve ser aplicada perto de camadas limites ou esteiras, onde há gradientes de velocidade:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

A equação de Bernoulli pode ser obtida, por ex., com:

- simplificação da equação de Navier-Stokes,
- termodinâmica,
- aplicação da 2ª Lei de Newton.

Vamos usar o método do balanço de forças aplicado a um diagrama de corpo livre, com a 2ª Lei de Newton aplicada a uma partícula de fluido em uma **linha de corrente**.

Hipóteses:

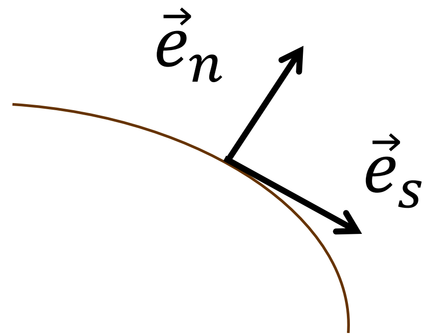
- escoamento não viscoso $\mu \approx 0,$ ou pelo menos:

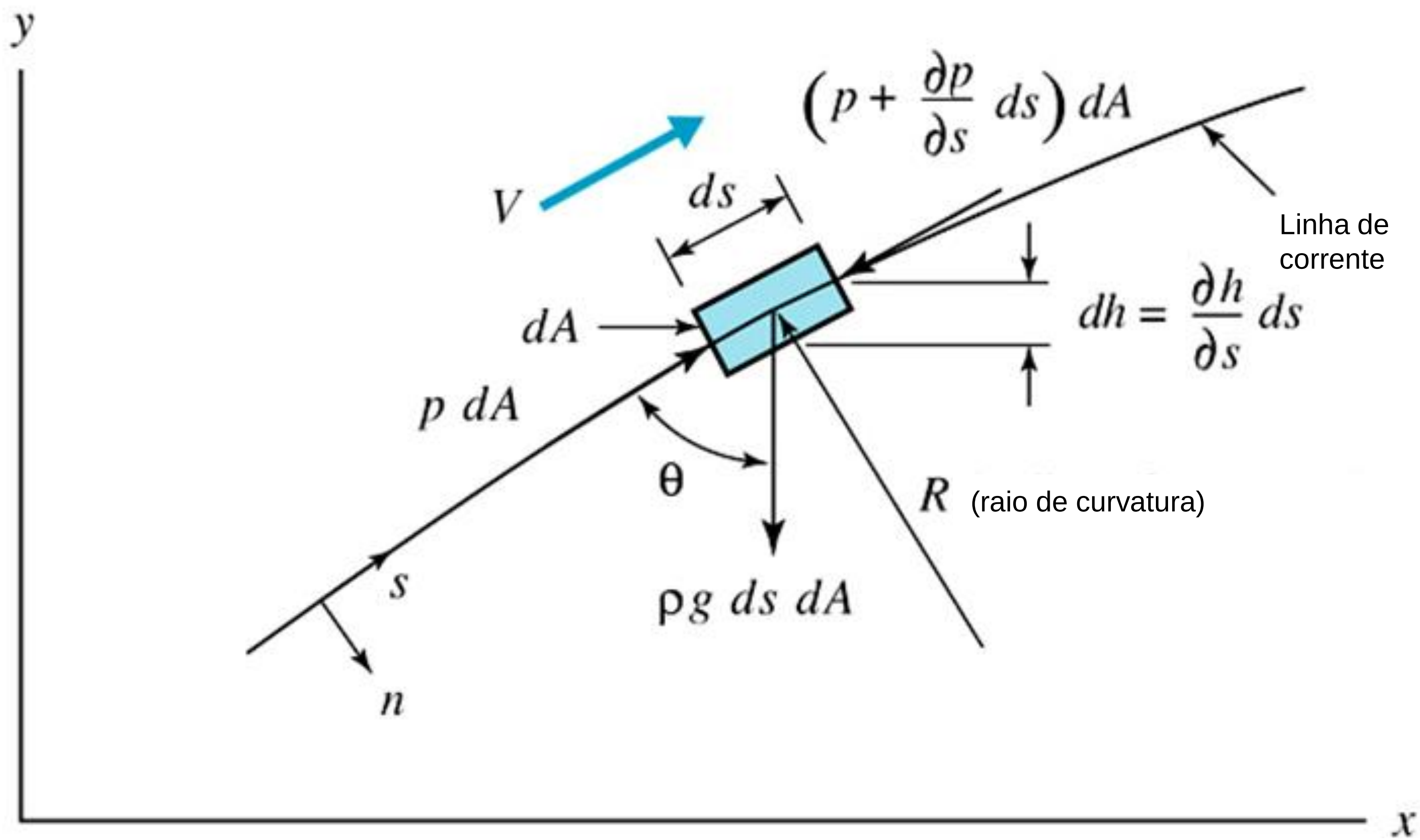
$F_{visc} \ll outras\ forças\ (F_{gravit}, F_{inércia} ou\ F_{pressão})$

- Regime permanente, $\partial \vec{v}/\partial t = 0$
- Fluido incompressível $\nabla . \vec{v} = 0$, ou Mach<0,3
- Forças agindo: Pressão e Peso

Para facilitar, será considerado um sistema de coordenadas intrínseco, ou natural:

As forças serão aplicadas a uma **partícula** cilíndrica de fluido com comprimento ds e área dA em uma **linha de corrente**





$$expansão\ em\ série\ de\ Taylor:$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

$$\sum F_{ext\,\vec{e}_s} = m.a_{\vec{e}_s} \quad , direção\ tangente\ ao\ escoamento.E\ \therefore$$

$$pdA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right) dA - \rho g.ds.dA.cos\theta = \rho ds.dA.a_s \qquad (1)$$

$$onde\ a_s = V\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} \qquad e\ \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$dh = dscos\theta = \frac{\partial h}{\partial s} ds \quad pois\ cos\theta = \frac{\partial h}{\partial s}$$

Tomando-se (1) e dividindo por $dsdA$ e fazendo as substituições:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g\frac{\partial h}{\partial s} = \rho V\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial h}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$como\ \rho$ é $constante, e$ $\quad V \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V^2/2}{\partial s}$, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh\right) = 0$$ ou:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = constante$$ ou ainda:

$$\frac{V^2{}_1}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{V^2{}_2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2$$

Se a expressão anterior for dividida por g, resulta a equação de Bernoulli:

$$\frac{\boldsymbol{V^2}_1}{2\boldsymbol{g}} + \frac{\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{h_1} = \frac{\boldsymbol{V^2}_2}{2\boldsymbol{g}} + \frac{\boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{h_2}$$

A soma dos termos $\left(\frac{p}{\gamma} + h\right)$ é chamada de **carga piezométrica** *e a soma dos três termos* é *chamada de* ***carga mecânica total***.

A pressão ***p*** é *chamada de* ***pressão estática***.

A *soma dos dois termos*: $p + \rho\frac{V^2}{2} = p_T$

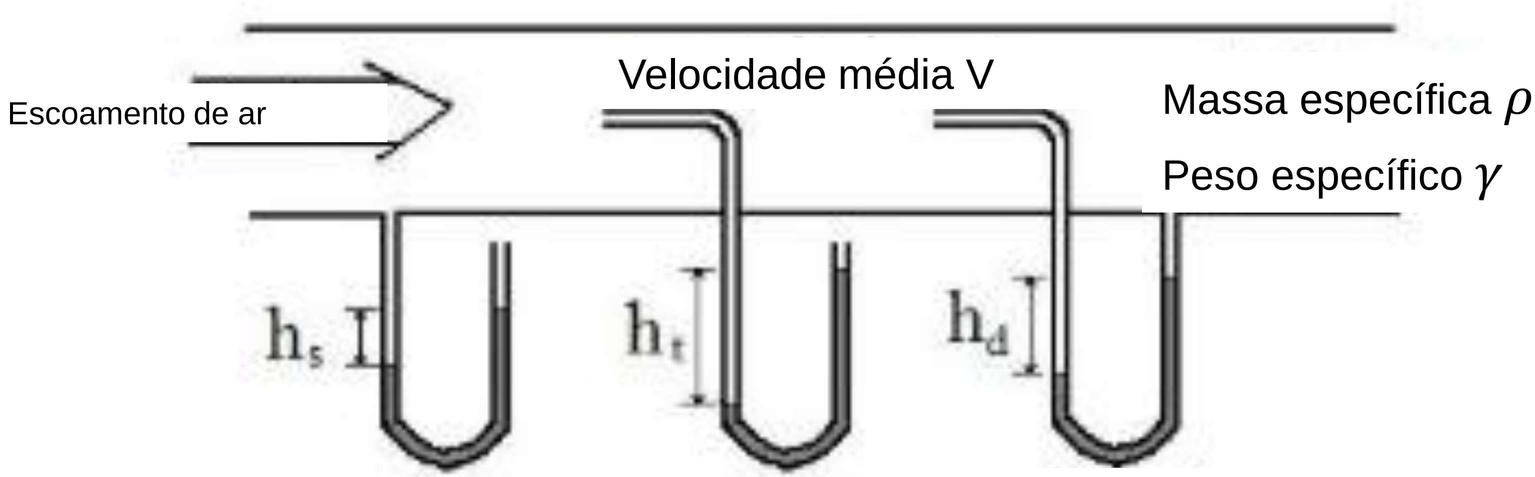
é chamada **pressão total** *ou* ***pressão de estagnação,***
sendo o termo $\rho\frac{V^2}{2}$ **chamado de pressão dinâmica**

$$\frac{V^2{}_1}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{V^2{}_2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2$$

Deve-se ler a equação acima como a soma das energias cinética, de pressão e potencial de uma partícula de fluído ao longo de uma linha de corrente de um fluido incompressível, sem atrito e em regime permanente.

Observe que pressão da equação está ligada à diferença de pressão entre os dois lados da partícula e refere se portanto a uma pressão do escoamento

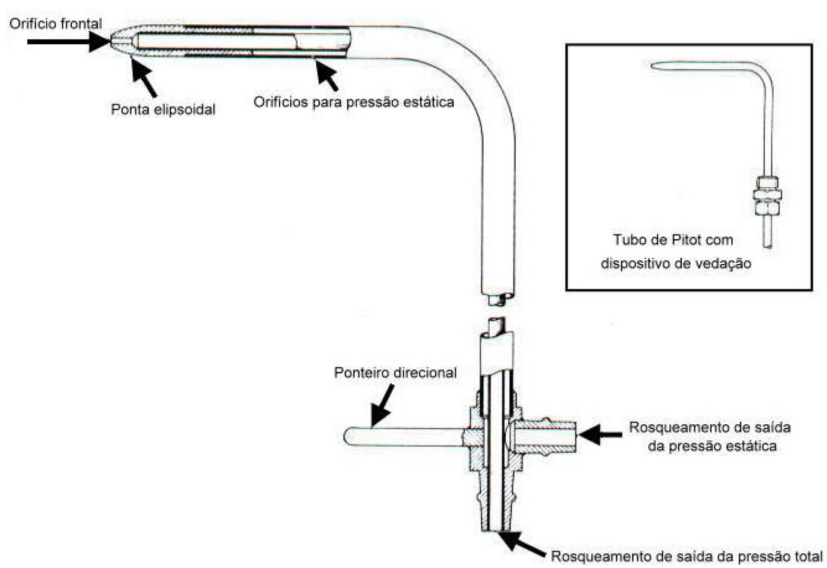
Tubo de Pitot

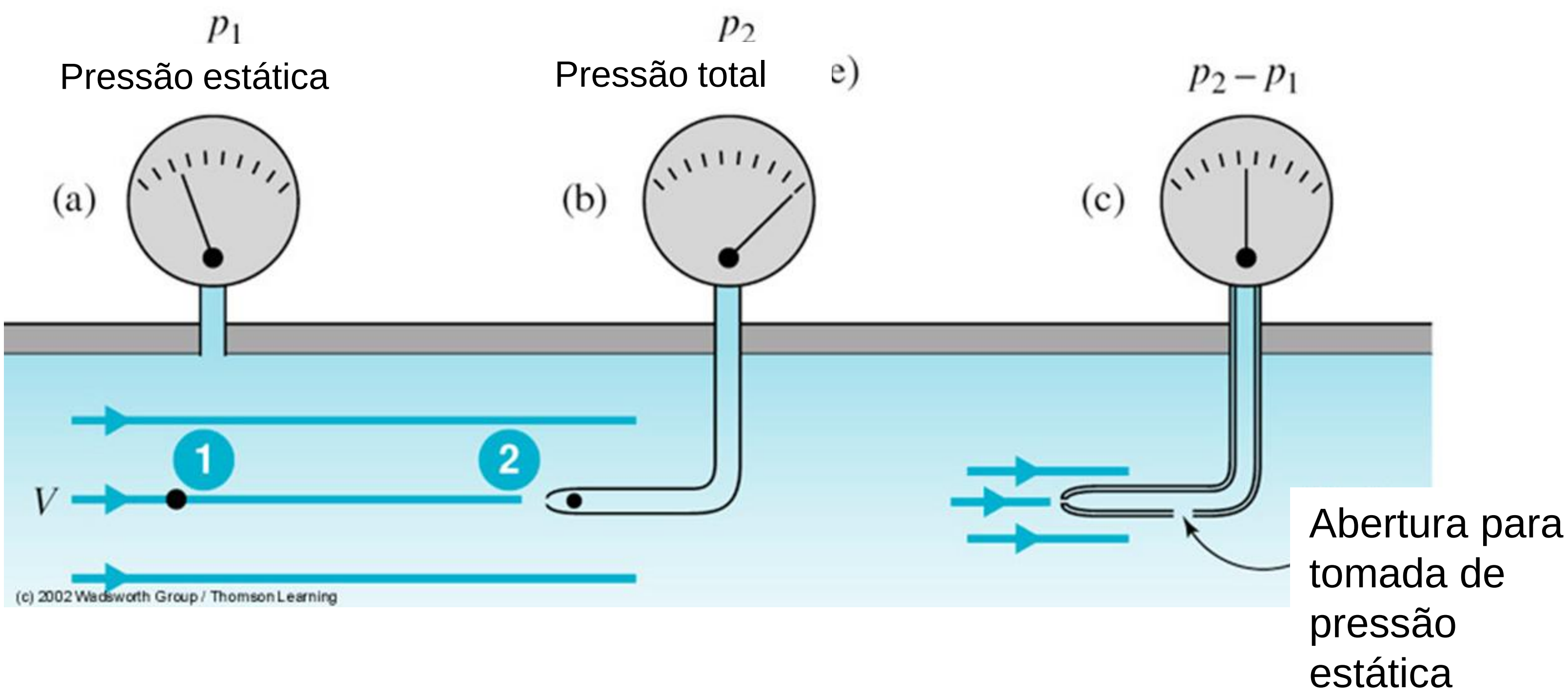


Pressão estática

Pressão de estagnação

Pressão dinâmica



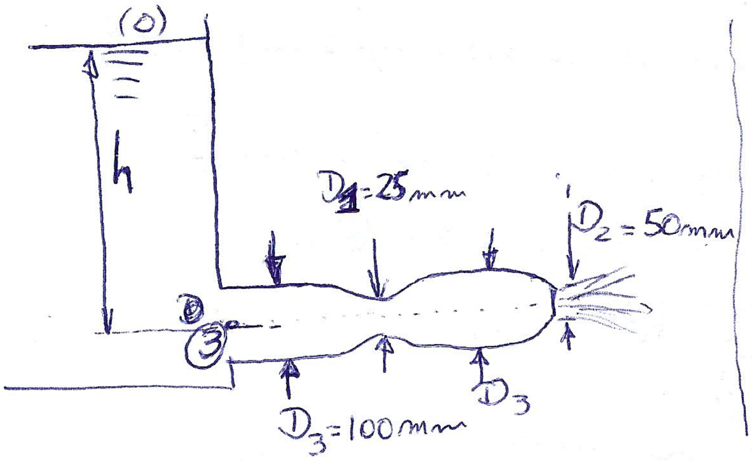


p_1
Pressão estática
p_2
Pressão total
e)
$p_2 - p_1$
(a)
(b)
(c)
1
2
V
(c) 2002 Wadsworth Group / Thomson Learning
Abertura para tomada de pressão estática

Matriz de tubos de Pitot atrás da roda, para determinar o campo de velocidades

Método Euleriano aplicado a um arranjo com tubos de Pitot em ensaio em carro de F1.

Observe que a posição do carro na pista é monitorada como um todo, Lagrange, mas a distribuição de velocidades do ar na frente do pneu é monitorada em pontos fixos, Euler.



Água escoa de um reservatório de grandes dimensões. A Patm é de 99974 Pa e a pressão do vapor P_V = 11031 Pa, na temperatura local. Se desprezar os efeitos viscosos, a qual "h" a cavitação irá começar?

Considerando o reserv. gde o suficiente p/ que o escoamento seja considerado em regime permanente, pode-se calcular a energia mecânica total ~~no~~ $\left(\frac{V_0^2}{2g} + \frac{P_0}{\gamma} + z_0\right)$ no ponto zero, que é igual a z_0, ou h. Na linha do centro da tubulação, chamado de ponto 3, pode-se calcular a energia mecânica total também, que é igual a z_0 ou h (porque não há perdas, apenas transformação de energia potencial em energia de pressão, com velocidade zero.

Pode-se agora aplicar Bernoulli entre 3 e 1:

$$\frac{V_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + z_3 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1$$, onde $\frac{V_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + z_3 = h$ e $z_1 = 0$.

$$\therefore h = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{I}$$

Toma-se agora Bernoulli entre 3 e 2:

$$\frac{V_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + z_3 = h = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2$$, onde $P_2 = 0$ (aberto p/ atmosfera) $z_2 = 0$ e $\therefore$

$$\frac{V_2^2}{2g} = h \quad \text{II}$$

Da definição de vazão e como o fluido é incompressível, se tem:

$A_1 V_1 = A_2 V_2$ (a vazão que passa na seção transversal 1 necessariamente passa na 2.)

$\Rightarrow V_1 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 V_2$ III ou $V_1^2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 V_2^2$ e,

combinando I, II e III, resulta:

$$h = \frac{P_1}{\gamma} + \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 . h \Rightarrow h = \frac{P_1}{\gamma\left[-\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 + 1\right]} \quad \text{II}$$

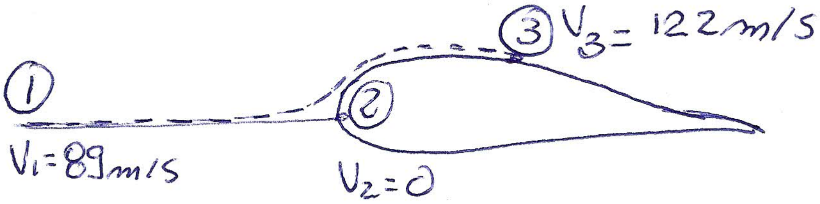
A pressão em P_1 não pode chegar à pressão de vapor, senão ocorre cavitação. Assim:

$$P_1 = P_{ef} + P_{atm} \Rightarrow P_{ef} = \underset{P_v}{\overset{}{P_1}} - P_{atm} = 11.031 - 99974 = -88943 \text{ Pa}$$

e substituindo em II, resulta:

$$h = \frac{-88943}{10000 \cdot \left[1 - \left(\frac{50}{25}\right)^4\right]} = 0{,}592 \text{ m}$$ - acima disso, cavita

3.24. Um avião voando a 322 Km/h (89 m/s), a 1500 m alt em atmosfera padrão, tem velocidade medida no pto 3 da asa de 400 Km/h (122 m/s), relativa ao avião. Que pressão de sucção é desenvolvida na asa nesse ponto? Qual é a pressão no bordo de ataque (que é um ponto de estagnação) da asa?



$\rho_{ar} = 1{,}055\ Kg/m^3$
(at. padrão a 1500 m)

A solução é mais complexa que simplesmente usar Bernoulli, mas se pode obter uma aproximação admitindo que:

P_1 está submetido apenas à pressão atmosférica e, como só trabalhamos c/ Pefetiva, $P_1 = 0$

P_3 é diferente da Patm. (há uma curvatura) Resultado experimental confirma que há sucção.

∴ tomando a LC que passa por 1 e 3:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{\cancel{P_1}^{\,0}}{\gamma} + z_1 = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + z_3 \quad \text{. Considera-se que } z_1 \equiv z_2 \equiv z_3$$

$$\therefore P_3 = \frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_3^2) = \frac{1}{2}\,1{,}055(89^2 - 122^2) = \boxed{-367{,}2\ Pa}$$

(Por isso asa tende a subir ∴ P ~~no~~ dorso superior é negativa!

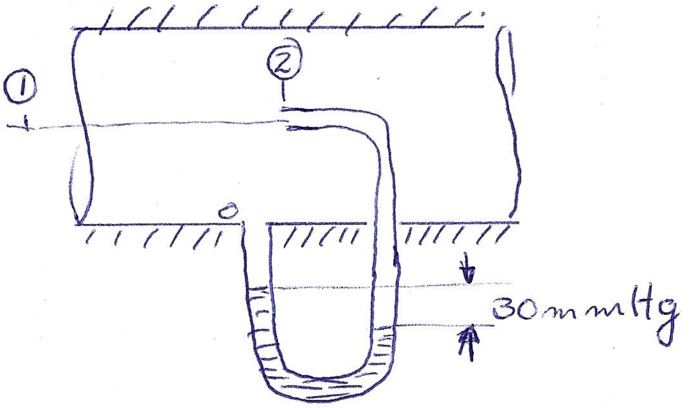
Para determinar a pressão no bordo de ataque, toma-se a LC entre 1 e 2 e aplica-se Bernoulli

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{\cancel{P_1}^{\,0}}{\gamma} + \cancel{z_1} = \frac{\cancel{V_2^2}^{\,0}}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{z_2} \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}\rho V_1^2 = \frac{1}{2}\,1{,}055 \cdot 89^2 = \underline{417{,}9\ Pa}$$

Positiva!

Bernoulli - Pitot

Ex - Determinar a velocidade do escoamento com Tubo de Pitot, no arranjo da figura. Fluido: ar a 20°C e Patm = 760 mmHg



Hipóteses

- Regime Permanente
- Escoamento Incompressível
- Esc. ao longo de Linha de Corrente entre 1 e 2.
- Escoamento isoentrópico entre 1 e 2, ou seja, c/ atrito desprezível.

Observar que a pressão indicada no manômetro em "U" é a pressão dinâmica. No pto zero captura a P.estática e no 2 a Ptotal (ou estagnação). O manômetro indica Ptotal - Pestática

Aplica-se Bernoulli à linha de Corrente entre 1 e 2:

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+\cancel{z_1}=\frac{\cancel{V_2^2}}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+\cancel{z_2} \Rightarrow V_1=\sqrt{\frac{2(P_2-P_1)}{\rho_{ar}}} \quad (I)$$

$\Delta z_{1-2}=0$; $V_2=0$ porque o fluido está estagnado em 2

Como ρ_{ar} é baixo, pode-se considerar que $P_0 \approx P_1$ e, da lei de Stevin, segue:

$$P_1+\gamma_{Hg}\cdot 0{,}030-\gamma_{ar}\cdot 0{,}03 = P_2 \overset{(I)}{\Rightarrow} V_1=\sqrt{\frac{2(\gamma_{Hg}-\gamma_{ar})\cdot 0{,}030}{\rho_{ar}}}$$

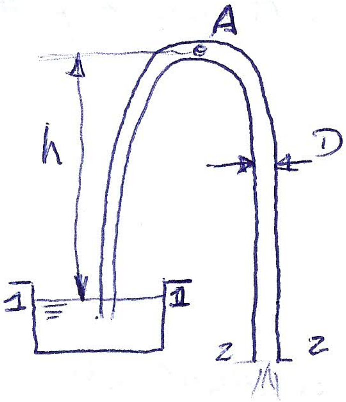
Como $\gamma_{Hg} = 13.600\,\frac{kg}{m^3}\times 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ e $\gamma_{ar} = 1{,}23\,\frac{kg}{m^3}\times 9{,}81\,m/s^2$

Resulta $\boxed{V_1 = 80{,}7\ m/s}$ valor elevado, será que ainda é incompressível?

↳ verificando ⇒ V_{som} ar a 20°C $\cong$ 343 m/s

Número de Mach $= \frac{V}{V_{som}} = \frac{80{,}7}{343} = 0{,}23 < 0{,}3$, ∴ ainda incompressível.

Água escoa sem atrito através de sifão. Se a pressão de vapor d'água a 20°C for 2330 Pa, determine a altura "h" máxima.



Dados:

$Q = 0{,}03\ m^3/s$

$D = 75\ mm$

$\theta = 20°C$

$P_v = 2330\ Pa$ (absoluta)

$P_{atm} = 101.000\ Pa$.

Hip: Regime Permanente
Esc. s/ atrito
Fluido Incompressível
Escoamento ao longo de L.C.
Propriedades uniformes em 1 e 2

Pode-se aplicar Bernoulli entre 1 e A, lembrando que, como não há perdas por atrito, a energia mecânica na superfície do reservatório é igual à na mesma cota dentro do sifão.

$$\cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + \cancel{\frac{P_1}{\gamma}}^{\,0} + z_1 = \frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_a}{\gamma} + z_A$$

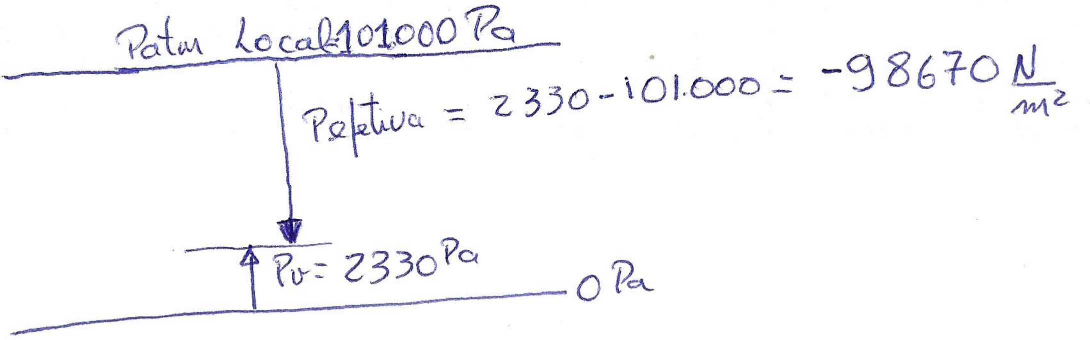
(0) velocidade de descida do nível

aberto atm.

$$\Rightarrow \frac{P_A}{\gamma} = (z_1 - z_A) - \frac{V_A^2}{2g} \qquad (\mathrm{I})$$

Vazão Volumétrica $Q = \underset{\text{vel. média}}{V} . \overset{\text{área}}{A}$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 6{,}79\ m/s \text{ (vel. média numa seção do sifão)}$$



e, substituindo em (1), resulta:

$$P_A = \gamma(-h) - \rho\frac{V_A^2}{2} = 9800(-h) - 23029 \quad (II)$$

e a situação limite, atingindo a P_v em A, na eq. (II):

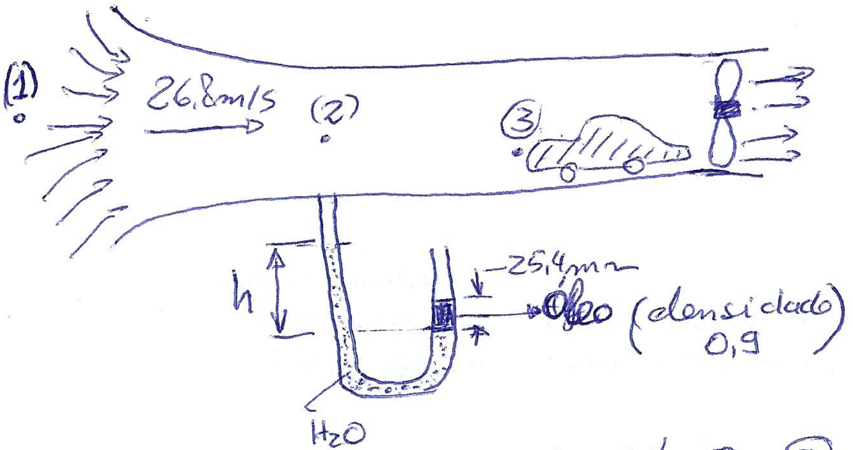
$$-98670 = 9800(-h) - 23029$$

$$\boxed{\therefore h = 7,72\ m}$$

h deve ser > 7,72 p/ evitar a vaporização da água e consequente descontinuidade do escoamento.

Tunel de vento opera nas condições indicadas. Determine "h" quando V = 96,5 Km/h (26,8 m/s). Determine a diferença entre a Pestagnação na frente do automóvel e a pressão na seção de testes.

Regime permanente
Fluido Incompressível
Atrito desprezível



Aplicando Bernoulli entre (1) e (2)

$$\frac{\cancel{V_1^2}}{2g} + \frac{\cancel{P_1}}{\gamma} + \cancel{z_1} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{z_2}$$

$V_1 = 0$ (ar parado, fora tunel)
$P_1 = 0$ Patm.
$z_1 = z_2$

$$\therefore \frac{P_2}{\gamma} = -\frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow P_2 = -\frac{1}{2}\rho V_2^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1{,}23 \frac{kg}{m^3} \cdot 26{,}8^2 \frac{m}{s} \cong \underline{-440 \text{ Pa}}$$

ρ do ar

P negativa (ventilador aspirando)

Aplica-se Stevin para determinar h:

$P_2 + \gamma_{H_2O} \cdot h - \gamma_{óleo} \cdot 0{,}0254 = 0$ (aberto p/ atmosfera)

Como $\gamma_{óleo} = 0{,}9 \cdot \gamma_{água} \cong 9000 \frac{N}{m^2}$

$-440 + 10.000h - 9.000 \cdot 0{,}0254 \Rightarrow \boxed{h = 0{,}0669\ m}$

b) Pestagnação - Aplicar Bernoulli entre (2) e (3)

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{z_2} = \frac{\cancel{V_3^2}}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + \cancel{z_3}$$

$V_3 = 0$ (estagnação)
$z_2 = z_3$

$$\therefore P_3 - P_2 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}23 \cdot 26{,}8^2 \cong \underline{440 \text{ Pa}}$$