

CINEMÁTICA DA PARTÍCULA FLUIDA
INTRODUÇÃO AOS FLUIDOS EM MOVIMENTO
PROF. JAYME. P. ORTIZ 23/03/20

SUMÁRIO

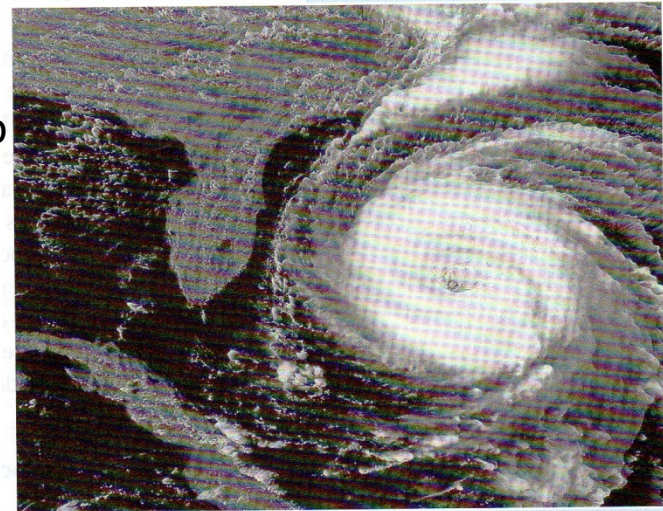
1. Descrição do Movimento – Generalidades
2. Métodos de Descrição do Movimento
3. Noção de Campo, Escoamento Permanente e Não Permanente
4. Linhas de Escoamento
5. Conceito de Derivada Material, Local e Convectiva
6. Classificação de Escoamentos
7. Equação de Bernoulli

1. Descrição do Movimento – Generalidades

A Cinemática estuda o movimento dos fluidos sem levar em conta as suas causas (forças).

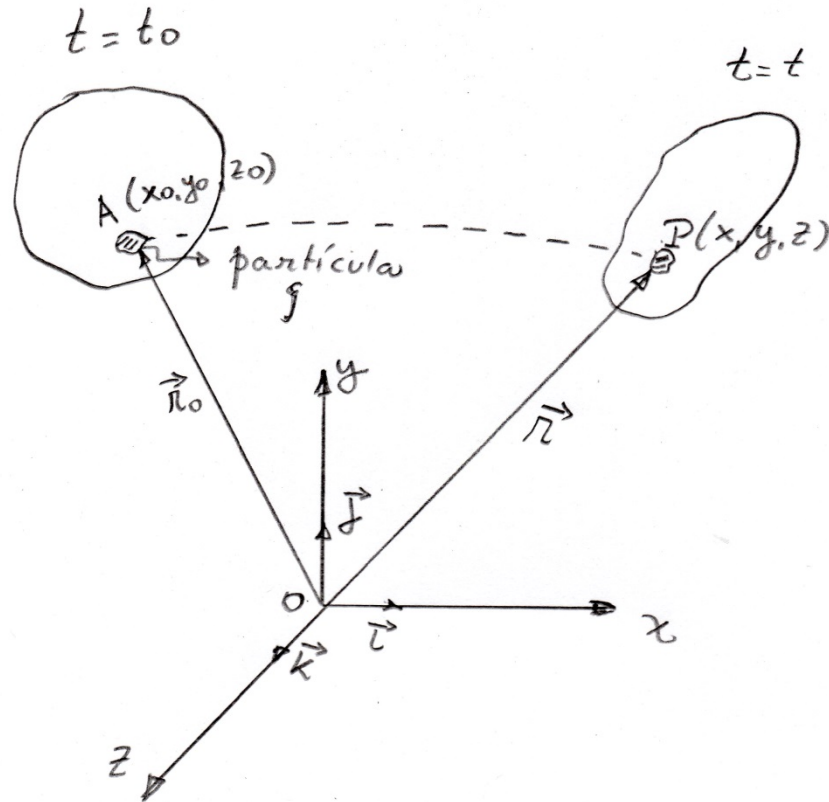
Matematicamente o escoamento de um fluido (meio contínuo) pode ser interpretado no Espaço Euclidiano.

Imagem de satélite de um furacão perto da Costa da Flórida; gotículas de água se movendo com o ar, permitindo a visualização do movimento do vórtice no sentido anti-horário. (Çengel & Cimbala, 2012)



1. Descrição do Movimento – Generalidades

Figura 1. Representação do movimento de uma partícula fluida com relação a um referencial inercial



2. Métodos de Descrição do Movimento

2.1. Método de Lagrange

Representa a partícula ζ , de um sistema fluido, deslocando-se de uma posição inicial A (x_0, y_0, z_0) no instante t_0 , para uma posição P (x, y, z) no instante t .

Reproduz a trajetória da partícula (figura 1), cujas equações determinam a posição e as grandezas características de cada partícula, em função do tempo:

$$\vec{r} = \vec{r}_l(\vec{r}_0, t)$$

2.2. Método de Euler

Consiste em se fixar num ponto geométrico P (x, y, z) solidário a um sistema de referência, para medir a grandeza física G, ligada as partículas, que, em diferentes instantes, passa por P.

$$\vec{r} = \vec{r}_e(\vec{r}_p, t)$$

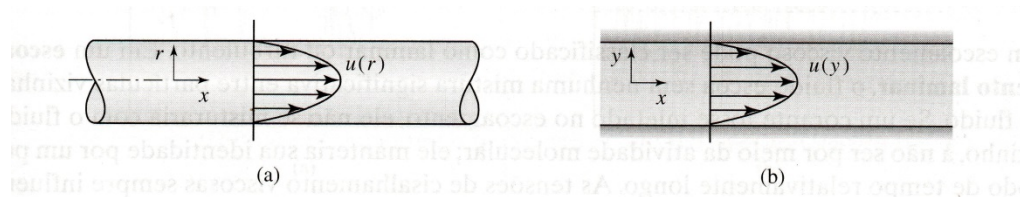
3. Noção de Campo, Escoamento Permanente e Não Permanente

Campo

O campo é obtido através da exploração simultânea de uma grandeza G (escalar ou vetorial) qualquer, em diversos pontos do escoamento.

$$G = G(P,t)$$

Figura 2 – Campo de velocidade (a) escoamento em tubulação; (b) escoamento entre placas planas



3. Noção de Campo, escoamento Permanente e Não Permanente

Figura 3. Escoamento permanente de transição de laminar para turbulento na saída de uma tubulação

Análise Viscosa de Escoamento em Conduitos

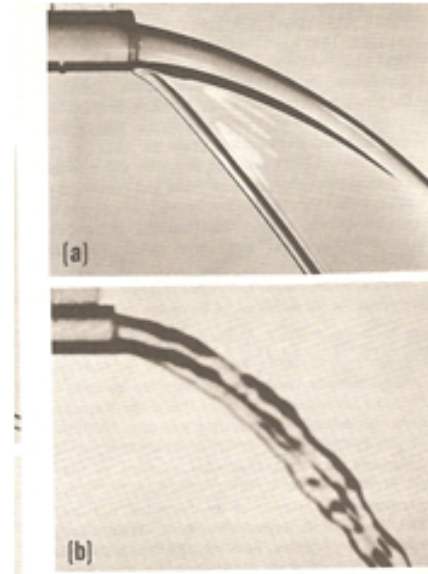


Figura 3.1 Saída de um jato laminar de uma tubulação com passagem para escoamento turbulento: (a) escoamento laminar; (b) transição para a turbulência (extraído de The NCFMF Book of Film Notes, 1980).

3. Noção de Campo, Escoamento Permanente e Não Permanente

Escoamento Permanente

$G(P,t) = G(P,t_0)$, para qualquer t

Ou $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, (variação local da grandeza G no tempo é nula).

Escoamento Não Permanente

$G(P,t) \neq G(P,t_0)$, para qualquer t

Ou $\frac{\partial G}{\partial t} \neq 0$, (variação local da grandeza G no tempo é diferente de zero).

4. Linhas de Escoamento

Trajetoária

Lugar geométrico das posições sucessivas ocupadas pelo centro de uma mesma partícula fluida (ζ) em movimento. A figura 1 representa a trajetória da partícula.

Equações da trajetória do ponto de vista da cinemática:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} ;$$

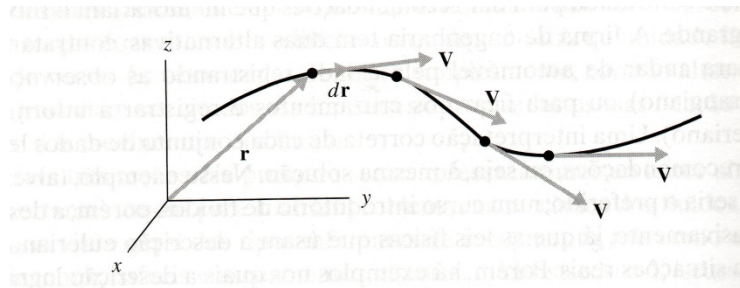
$$V_x = \frac{dx}{dt} ; V_y = \frac{dy}{dt} ; V_z = \frac{dz}{dt}$$

Linhas de Corrente

Linhas tangentes aos vetores velocidades em um dado instante. Correspondem às fotografias do escoamento em um determinado instante.

4. Linhas de Escoamento

Figura 4. Representação esquemática de linhas de corrente em um campo de escoamento



Analiticamente, sendo $d\vec{r}$ um arco elementar da LC:

$$d\vec{r} \wedge \vec{V} (P,t) = 0$$

Onde: $d\vec{P} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$; $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$

A solução do produto vetorial resulta nas equações da LC:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \text{ (coordenadas cartesianas);}$$

$$\frac{dr}{V_r} = \frac{rd\theta}{V_\theta} = \frac{dz}{V_z} \text{ (coordenadas cilíndricas).}$$

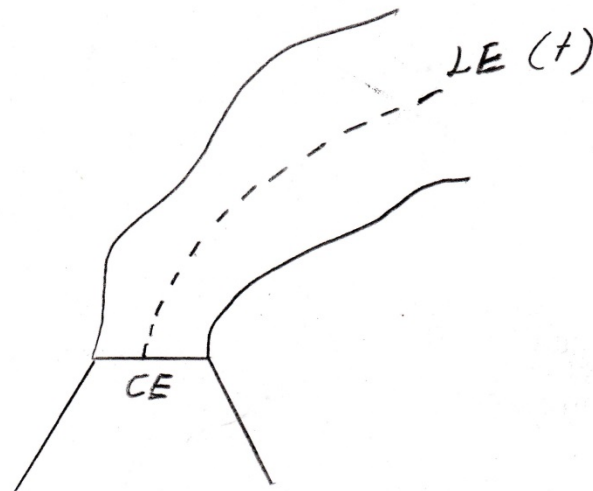
4. Linhas de Escoamento

Linhas de Emissão

O conceito é similar ao de LC, ao qual se agrega o conceito de centro de emissão, que é a posição fixa por onde passaram as diversas partículas que compõem a linha.

Obs.: O assunto não será abordado no curso.

Figura 5. Representação esquemática de linha de emissão instantânea $LE(t)$ e do centro de emissão CE)

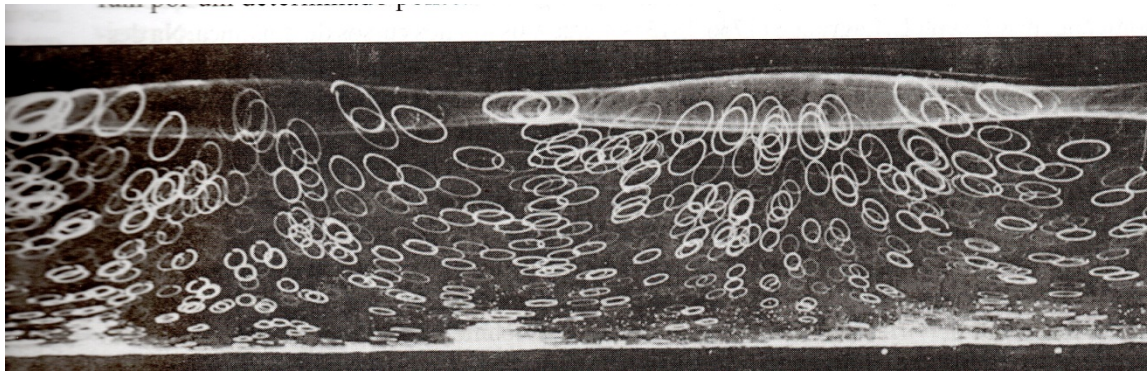


4. Linhas de Escoamento

Métodos de Visualização de Escoamentos

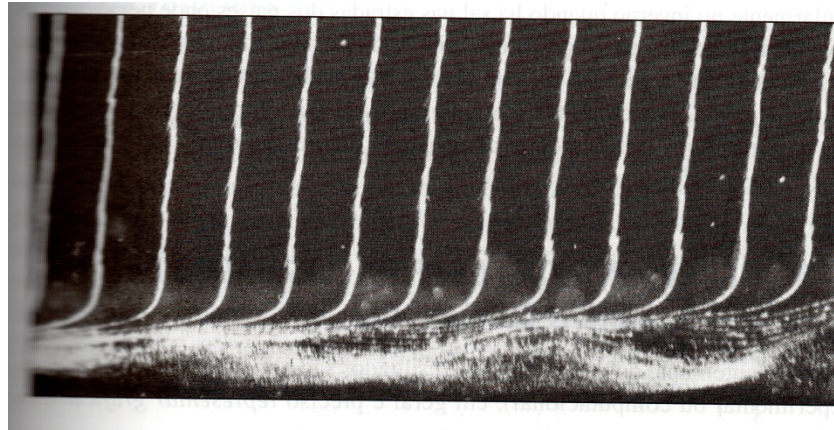
A literatura é farta na descrição de métodos de visualização de escoamentos e as figuras a seguir destacam alguns desses métodos.

Figura 6. Linha de trajetória abaixo de uma onda em um tanque de água.



4. Linhas de Escoamento

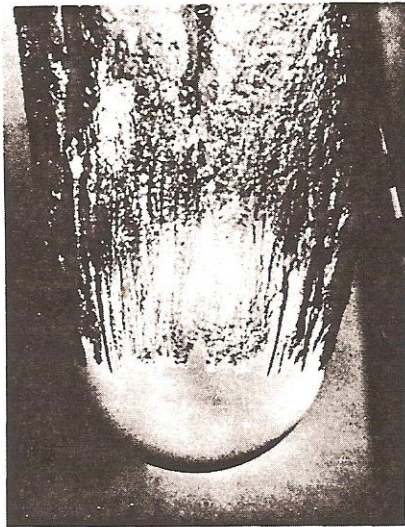
Figura 7. Perfil de velocidades de escoamento em camada limite em placa plana. Visualização produzida por fio de bolhas de hidrogênio



Escoamento da esquerda para a direita e o fio de bolhas de hidrogênio a esquerda do campo de visão

4. Linhas de Escoamento

Figura 8. Visualização de esteira de turbulência a jusante de uma esfera em função do aumento do número de Reynolds da esfera
(a) Separação laminar; (b) separação turbulenta.



(a)



(b)

4. Linhas de Escoamento

Exercício

Exemplo 2.1. Fox & McDonald, sexta edição

Um campo de velocidades é dado por:

$$\vec{V} = ax\vec{i} - ay\vec{j}; \text{ com } x,y \text{ (m) e } a = 0,1 \text{ s}^{-1}$$

Determinar:

- Equação das linhas de corrente no plano x,y;
- Traçado da LC pelo ponto $P_0 (2,8,0)$;
- Velocidade da partícula no ponto $P_0 (2,8,0)$;
- Posição em $t = 20 \text{ s}$ da partícula, localizada em $P_0 (2,8,0)$ em $t_0 = 0$;
- Velocidade da partícula na posição encontrada em d;
- Mostrar que a equação da trajetória coincide com a equação da LC.

Obs.: Exercício resolvido no Fox e nas notas de aula.

5. Conceito de Derivada Material, Local e Convectiva

Em variáveis de Lagrange a posição da grandeza G , associada a uma partícula ζ , que partiu de A , no instante t_0 e passa por P , no instante t , conforme mostra a figura 1, é dada por:

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\zeta} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{G(P,t) - G(A,t_0)}{t - t_0};$$

Em variáveis de Euler $G(P,t)$ e $G(P,t_0)$ se referem a partículas diferentes observadas na mesma posição:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{G(P,t) - G(P,t_0)}{t - t_0}$$

Exemplo Figura 9: $G = R$, onde R é radioatividade injetada em um ambiente infinitesimal;

- (a) Injeção uniformemente distribuída de R ;
- (b) Injeção não uniformemente distribuída de R .

5. Conceito de Derivada Material, Local e Convectiva

Par a caracterização da mudança sentida em um ponto material em variáveis de Euler necessita-se de dois termos:

- 1) A mudança da intensidade com o tempo em um ponto fixo;
- 2) A diferença de intensidade entre pontos de estações fixas (infinitesimalmente próximas) em um instante fixo.

Caso (a): sensor registra a variação local da radioatividade num intervalo de tempo:

$$\frac{\partial R}{\partial t} \Delta t$$

(b): dois sensores de radioatividade, registrando a variação local e a variação convectiva U entre duas estações medidas no mesmo instante:

$$U \frac{\partial R}{\partial x} \Delta t$$
$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{\partial R}{\partial t} + U \frac{\partial R}{\partial x} \right)$$

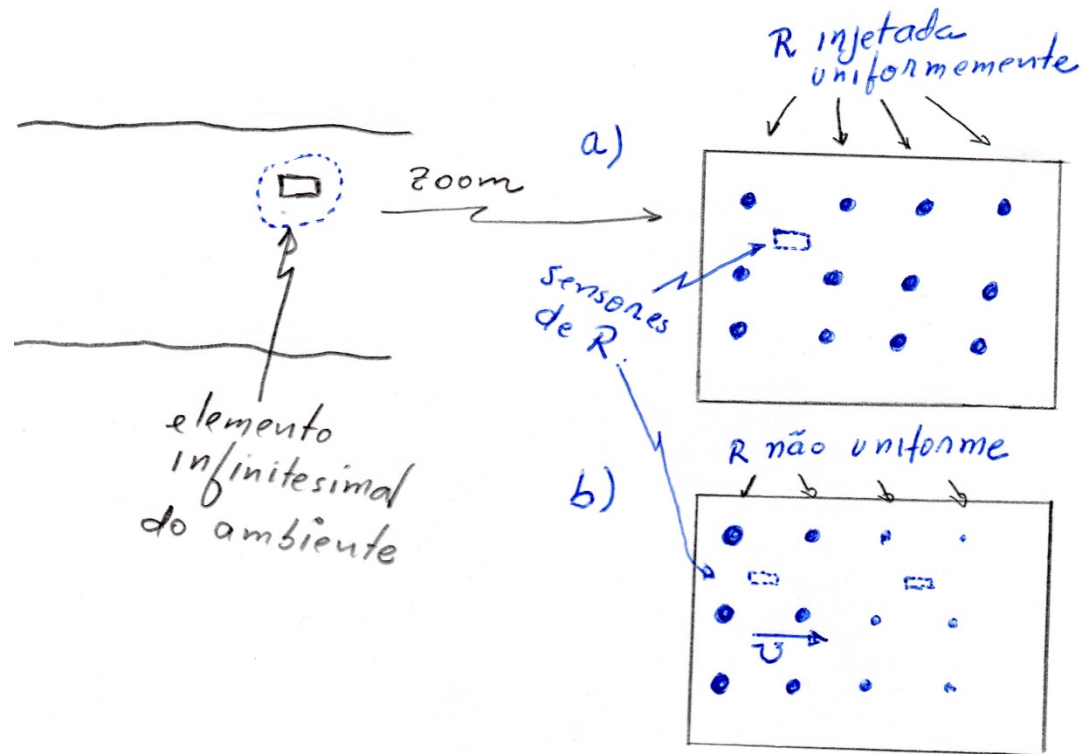
5. Conceito de Derivada Material, Local e Convectiva

$\frac{dR}{dt}$ → derivada material de R;

$\frac{\partial R}{\partial t}$ → derivada local de R;

$U \frac{\partial R}{\partial x}$ → derivada convectiva de R.

Figura 9.



5. Conceito de Derivada Material, Local e Convectiva

Para $G = \vec{V}$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$$

$\frac{d\vec{V}}{dt} \rightarrow$ aceleração material;

$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \rightarrow$ aceleração local;

$U \frac{\partial\vec{V}}{\partial x} \rightarrow$ aceleração convectiva.

Exemplo 4.5 – Munson

Dado o campo de velocidades: $\vec{V} = \left(\frac{V_0}{l}\right) (x\vec{i} - y\vec{j})$

Determinar o campo vetorial de acelerações e o correspondente módulo desse escoamento.

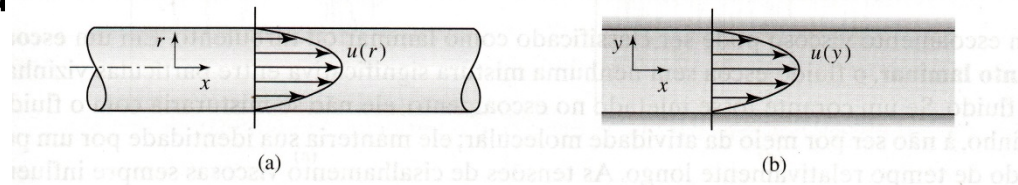
Obs.: resolução do exercício nas notas de aula.

6. Classificação de Escoamentos

Escoamentos Uni, Bi e Tridimensionais

Dependem, respectivamente de uma, duas ou três coordenadas espaciais. A figura 10 é um exemplo de escoamento unidimensional.

Figura 10. Escoamento viscoso em em tubulação (a), escoamento entre placas planas paralelas (b). Ambos representam um escoamento unidimensional

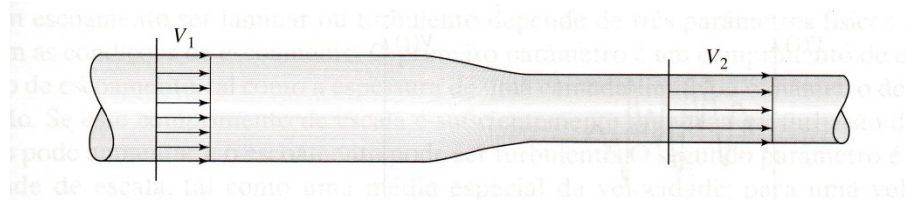


Escoamento viscoso e não viscoso

Escoamento viscoso exemplificado na figura 10, com efeito da viscosidade conduzindo a um perfil parabólico de velocidades.

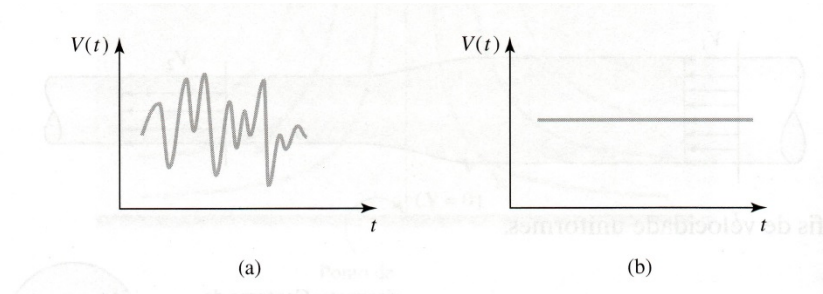
6. Classificação de Escoamentos

Figura 11. Exemplifica um escoamento não viscoso com perfil uniforme de velocidades (fluido perfeito ou ideal)



Escoamento Laminar e Turbulento

Figura 12. Exemplifica um sinal de velocidade em escoamento turbulento (a) e em escoamento laminar (b)

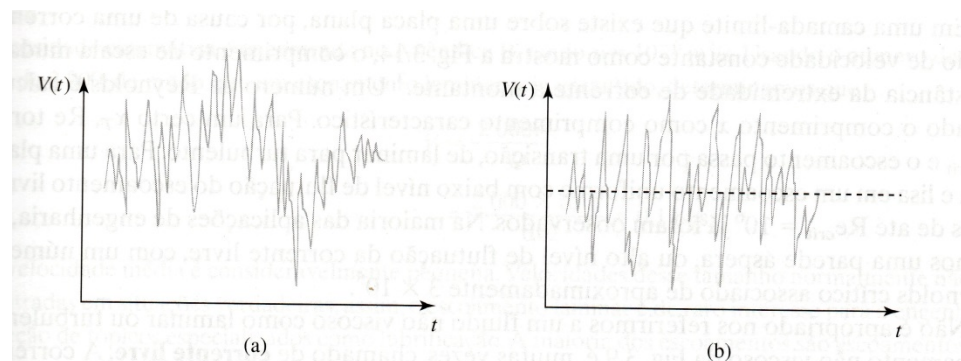


6. Classificação de Escoamentos

Escoamento Permanente e Não Permanente

A figura 12 (a) representa um sinal turbulento de velocidade que é permanente em média.

Figura 13. Velocidade em função do tempo em um escoamento turbulento (a) não permanente. (b) permanente



Escoamento Incompressível e Compressível

Condições de incompressibilidade:

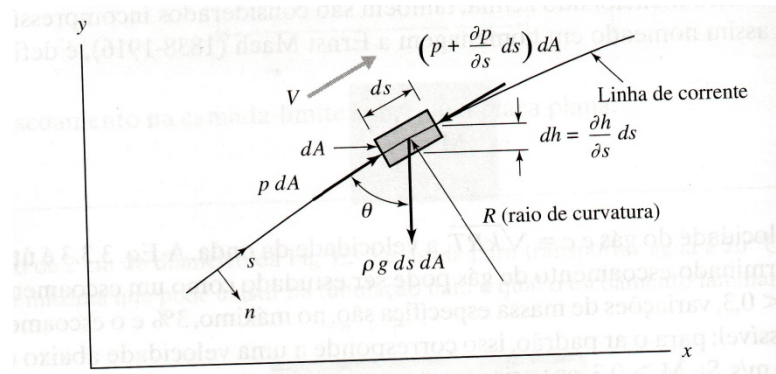
$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{e}$$

$$Ma = \frac{V}{c} < 0,3$$

7. Equação de Bernoulli

A Equação de Bernoulli pode ser obtida a partir da Cinemática aplicada a uma trajetória (ou LC) ao longo de uma coordenada espacial s .

Figura 14. Representação esquemática do movimento da partícula fluida em uma LC



Aplicando-se a segunda lei de Newton ao cilindro infinitesimal de fluido representado na Figura

$$p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA - \rho g ds dA \cos \theta = \rho ds dA a_s \quad (I)$$

$a_s \rightarrow$ aceleração da partícula fluida na direção s

Pela definição de aceleração $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$

Aplicada a Figura: $a_s = V \frac{\partial V}{\partial s}$ e sendo $\cos \theta = \frac{\partial h}{\partial s}$ (II)

7. Equação de Bernoulli

Substituindo (II) em (I):

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial h}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} \quad (\text{III})$$

Usando a regra de derivação:

$$\frac{\partial(V^2/2)}{\partial s} = \frac{1}{2} \left(V \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial V}{\partial s} \right) = V \frac{\partial V}{\partial s} \quad (\text{IV})$$

Substituindo (IV em III), resulta:

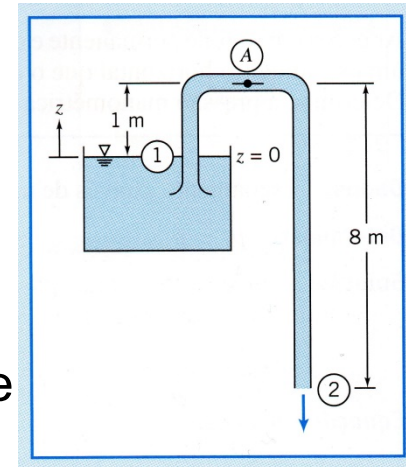
$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh \right) = 0$$

Portanto: $\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = \text{cte}$ ao longo de LC

(Daniel Bernoulli: (1700 a 1782).

7. Equação de Bernoulli

Exemplo 6.4 – Fox & McDonald
Água escoando através de um sifão.



Determinar:

- A velocidade da água saindo como um jato livre
- A pressão no ponto A do escoamento.

Solução:

Equação Básica: $\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cte}$

- Hipóteses:
- 1) Atrito desprezível
 - 2) Escoamento permanente
 - 3) Escoamento incompressível
 - 4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
 - 5) Reservatório de grandes dimensões.

7. Equação de Bernoulli

a) Bernoulli entre os pontos 1 e 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

A solução dessa equação resulta:

$$V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 7} = 11,7 \text{ m/s}$$

b) Bernoulli entre 1 e A:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gz_A$$

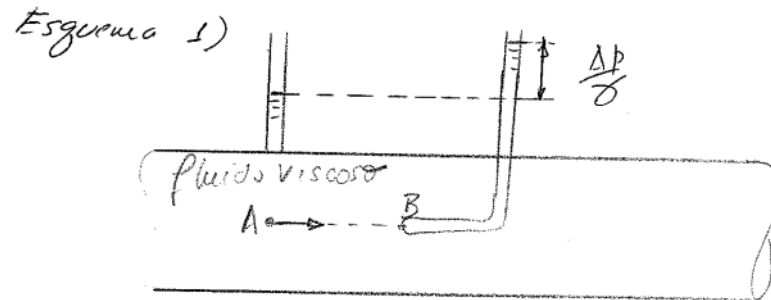
A solução dessa equação resulta: $p_A = 22,8 \text{ kPa}$ (*absoluta*)

$$p_A = -78,5 \text{ kPa}$$
 (*manométrica*).

Problema proposto: Verificar se ocorre cavitação no ponto mais alto do sifão admitindo pressão atmosférica local de 100 kPa.

7. Equação de Bernoulli

- **Aplicação da Equação de Bernoulli - Tubo de Pitot**
- O tubo de Pitot é um medidor indireto de velocidade que na verdade permite medir pressão diferencial. A primeira versão desse instrumento surgiu em 1732 por Henry Pitot, posteriormente aprimorada por Darcy em 1848.
- Sua utilização baseia-se na aplicação da Equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente do escoamento, conforme esquematizado:
- Figura 15. Representação esquemática de medida de diferencial de pressão usando tubo de Pitot (esquemas 1 e 2)



- P_A – pressão estática; em A;
- P_B – pressão de estagnação em B;
- $P_B - p_A$ – pressão dinâmica .

7. Equação de Bernoulli

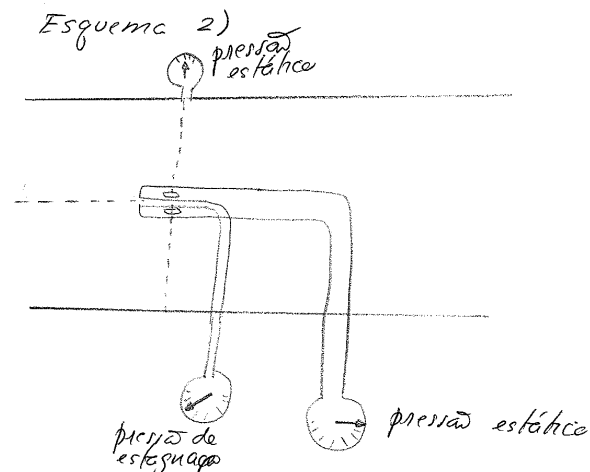
$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} + Z_A = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} + Z_B$$

$V_B = 0$ (ponto de estagnação)

(1)

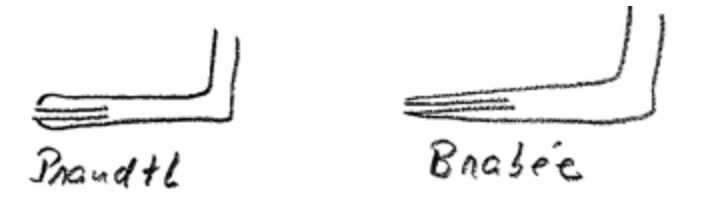
$$\frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B - p_A}{\gamma} \Rightarrow V_A = \sqrt{2g \frac{p_B - p_A}{\gamma}} = \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}$$

No esquema (1) a tomada estática esta separada do tubo de Pitot um pouco a montante, enquanto que no esquema (2), abaixo a tomada estática esta acoplada ao próprio Pitot que é o caso dos instrumentos utilizados na pratica.



7. Equação de Bernoulli

- Existem diversas variações de projeto de tubo de Pitot em função do ângulo de bizelamento do Pitot e que se originam dos Pitots clássicos de Prandtl e Brabée.
- Figura 16. Tipos de Pitot clássicos (Prandtl e Brabée)

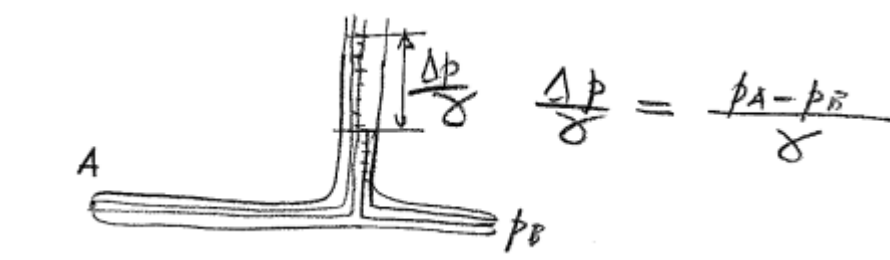


- Na utilização do tubo de Pitot com a tomada estática acoplada tem-se a propagação de perturbações geradas no ponto de estagnação e que se propagam a jusante sobre a linha de corrente que deveria facear a tomada estática. A calibração sistemática desses tubos de Pitot é, portanto essencial

7. Equação de Bernoulli

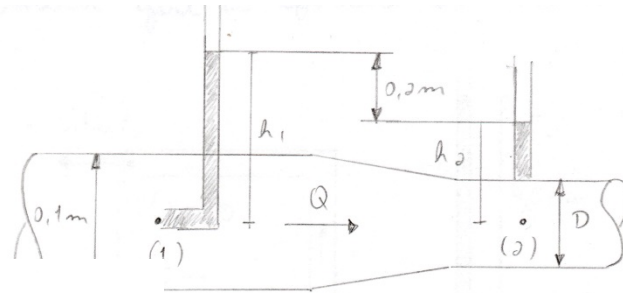
- **Pitot Cole**
- O pitot tipo Cole é uma alternativa para os pitots clássicos, originados do Pitot de Prandtl, pois em vez de se medir a pressão estática, mede-se a pressão na separação do escoamento ajusante, em geral negativa, permitindo se um aumento na leitura da pressão diferencial Δp o que muitas vezes é favorável em termos de precisão.

Figura 17. Representação esquemática do Pitot tipo Cole



7. Equação de Bernoulli

Exercício: Água escoando na contração axisimétrica mostrada na figura. Determinar a vazão em volume na contração em função de D , sabendo que a diferença de alturas no manômetro é constante e igual a $0,2\text{ m}$



Bernoulli em face 1 e 2

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$V_1 = 0$$

$$p_1 = \gamma h_1$$

$$p_2 = \gamma h_2$$

$$V_2 = \sqrt{(h_1 - h_2)2g} = \sqrt{0,2 \times 2 \times 9,81} = 8,77 \text{ m/s}$$

$$Q = V_2 A = V_2 \frac{\pi D^2}{4} = 1,98 \times \frac{\pi}{4} D^2 \text{ m}^3/\text{s}$$

Referências Bibliográficas

- Potter, M.C; Wiggert, D.C.; Ramadan, B.H. (2014) Mecânica dos Fluidos. CENGAGE Learning, quarta edição.
- Fox, R.W; McDonald, A.L.; Pritchard, P.J. (2012) Introdução a Mecânica dos Fluidos, LTC, oitava edição.
- Cengel, Y.A. e Cimbala, J.M. (2015) Mecânica dos Fluidos. Fundamentos e Aplicações. McGraw Hill Education, Terceira Edição.
- Munson, B.R.; Young, D.F.; Okiishi, T.H. (2004) Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Blucher, Quarta edição.
- NCFMF (1980) Book of Film Notes.