Introdução aos Fluidos em Movimento

Tipos de Escoamentos
Descrição Euleriana e Lagrangeana
Linhas de Corrente e de Trajetória
Aceleração

Prof. Marcos Tadeu Pereira

Aula 3 de PME3222   1º semestre 2020

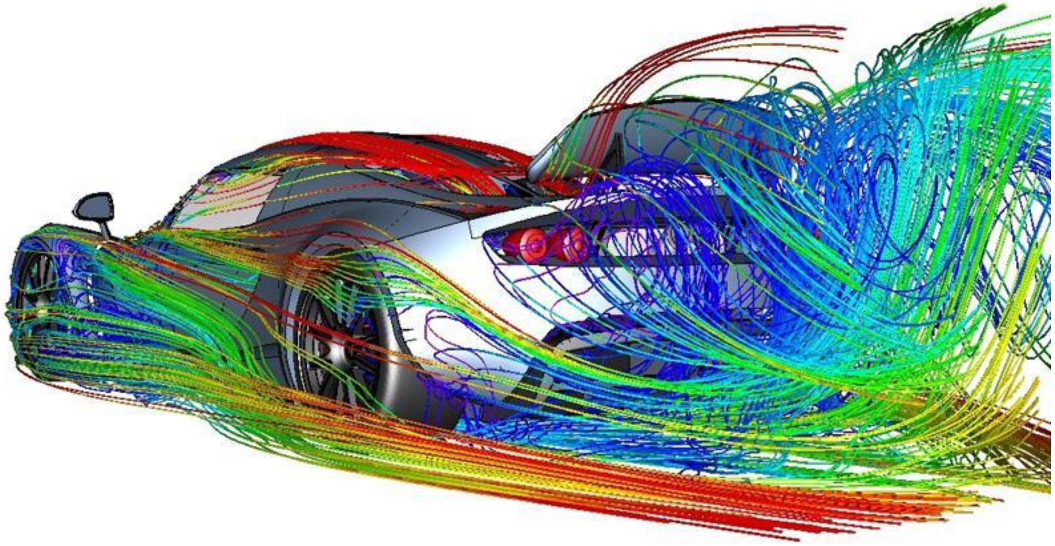
Classificações possíveis dos escoamentos
“taxonomia”

- Geométrica;
- Quanto à variação no tempo;
- Quanto à trajetória (direção e variação);
- Quanto ao movimento de rotação;
- Quanto à compressibilidade;
- Etc.

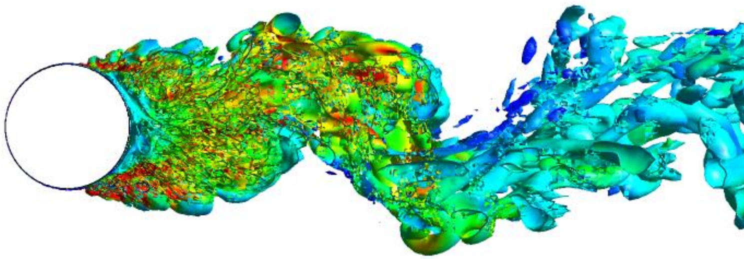
Classificação Geométrica

Escoamentos Tridimensionais

A rigor, todos os escoamentos reais são tridimensionais.
As grandezas que neles interferem, em cada seção transversal, variam em três direções.



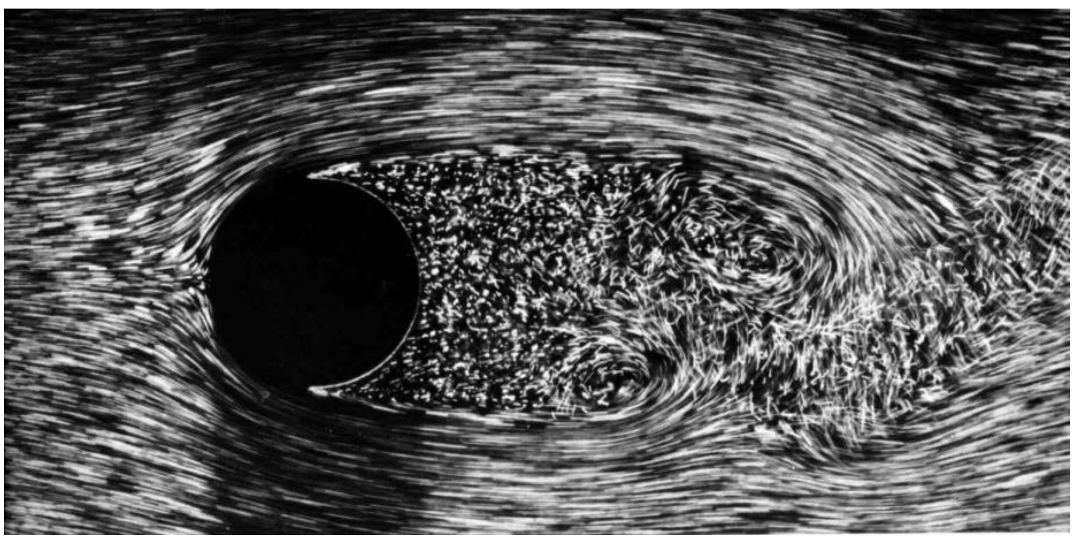
Campos de velocidade

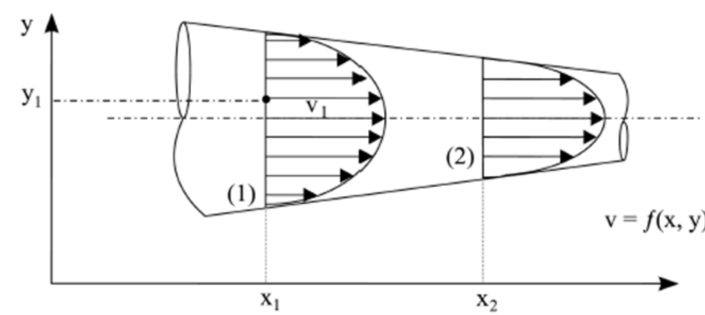


Classificação Geométrica

Escoamentos Bidimensionais

quando o escoamento puder ser completamente definido por linhas de corrente contidas em um único plano. Muitos tridimensionais podem ser simplificados para bidimensionais, com pouca perda de qualidade





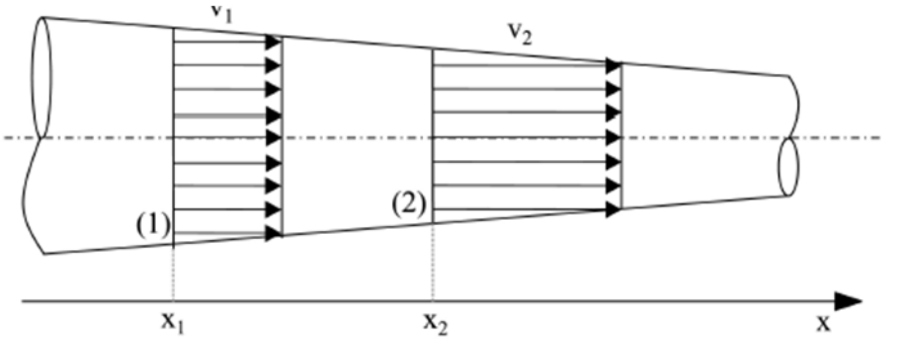
Numa primeira aproximação, o escoamento de fluido ao redor de um cilindro muito longo é bidimensional.

Classificação Geométrica

Escoamentos Unidimensionais

Uma única coordenada é suficiente para descrever as propriedades do fluido.

Para que isso aconteça é necessário que as propriedades sejam constantes em cada seção.



Classificação quanto a direção da trajetória

– **Escoamento Laminar**:

As partículas descrevem trajetórias paralelas e suaves. A viscosidade amortece qualquer tendência de rotação (swirl) ou de mistura. $Re < 2000$

– **Escoamento turbulento**:

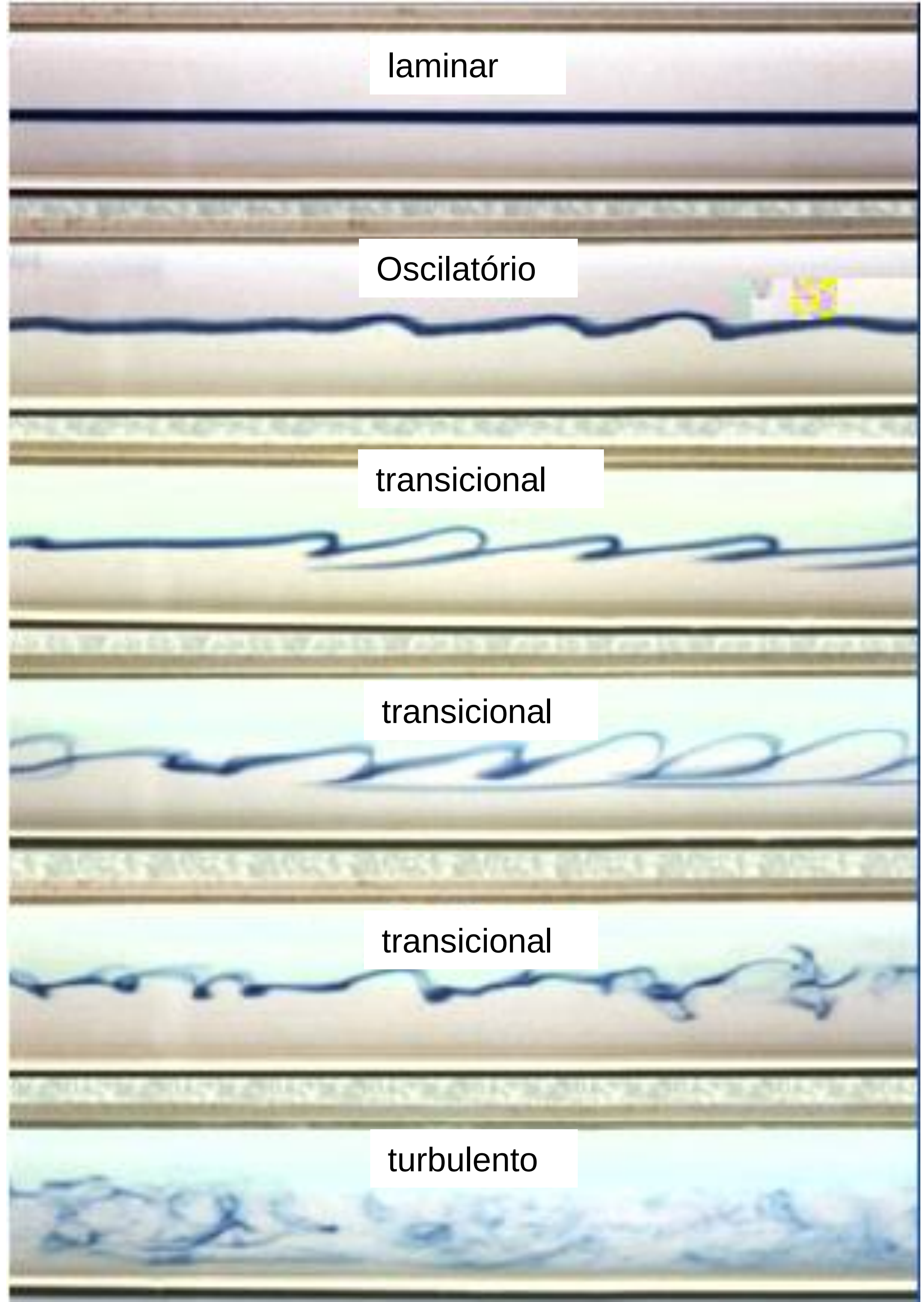
As trajetórias são erráticas e sua previsão é "impossível"; a mistura é eficiente; velocidade flutua no ponto. $Re > 2400$

– **Transição**:

Representa a passagem do escoamento laminar para o turbulento ou vice-versa.

Experimento de Reynolds –

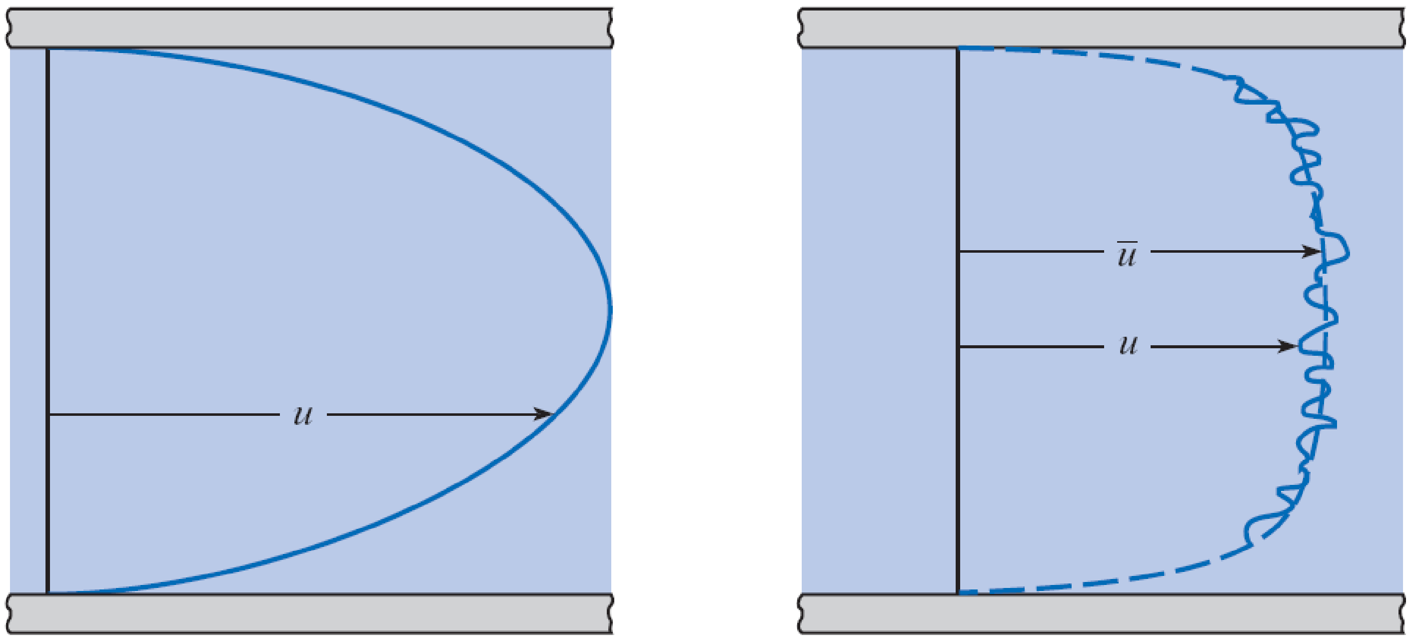
escoamentos laminar, na transição e turbulento



Escoamento no interior de dutos

Laminar | Turbulento

Perfis de velocidade

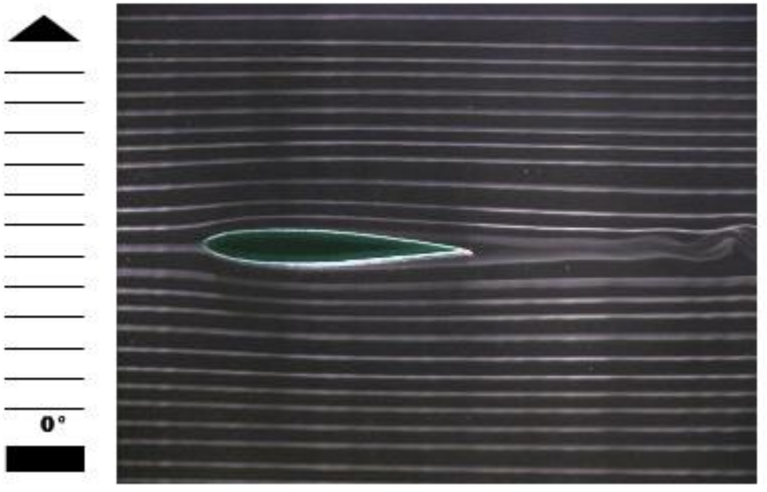


(a) (b)

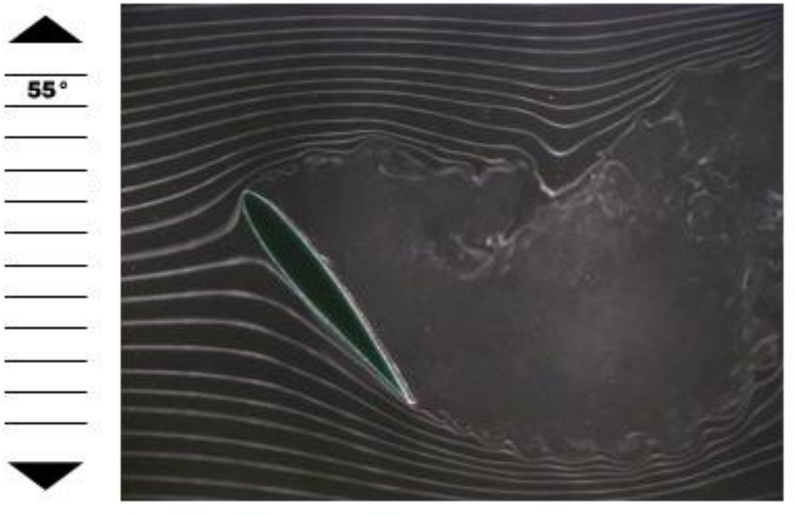
O escoamento laminar tem a forma parabólica.

O escoamento turbulento tem a forma log-linear ou de perfil de potência.

Escoamento ao redor de aerofólio:



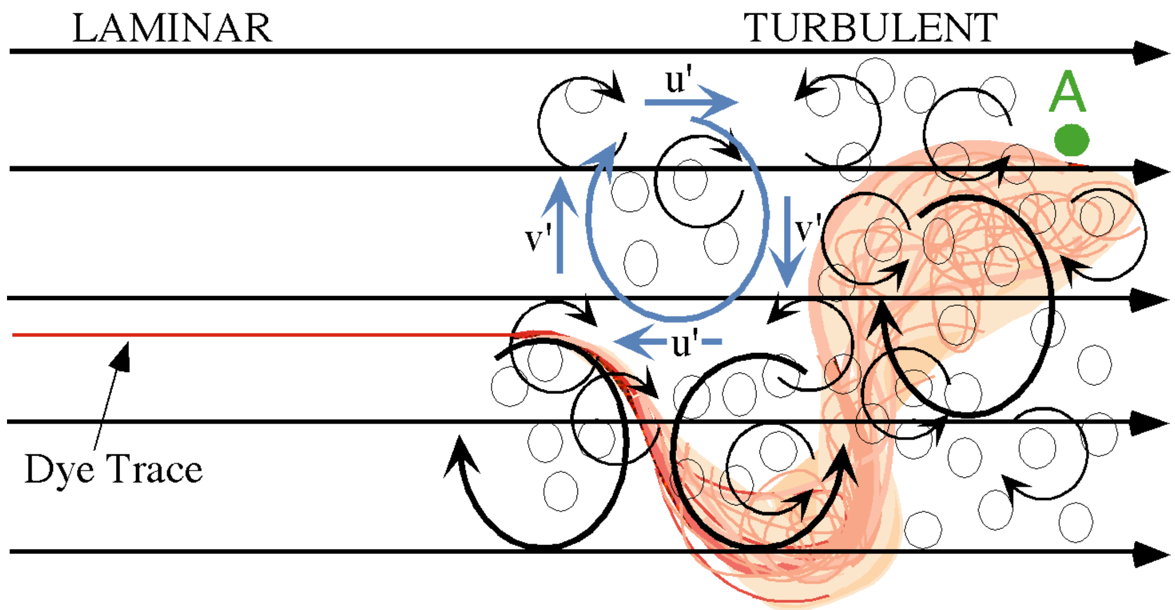
Parcialmente laminar, i.e., se desenvolve em camadas (lâminas) ao redor do objeto.

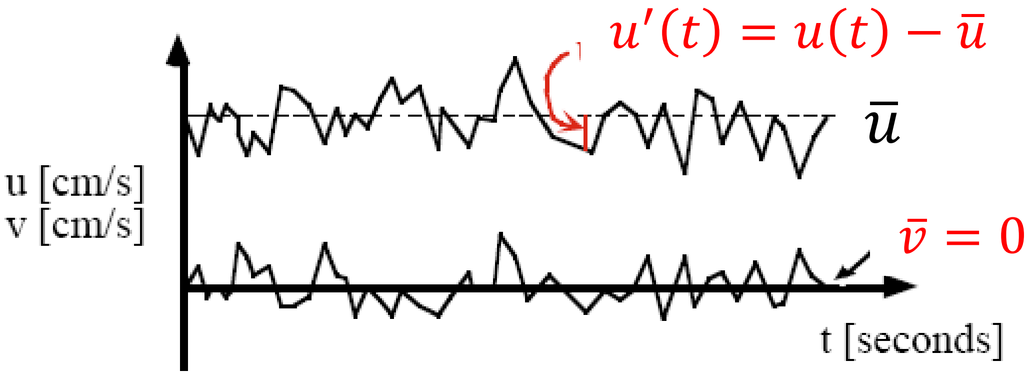


O escoamento se torna mais turbulento com o aumento do ângulo de ataque.

MFM – Airfoil separation 649

http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html





No ponto A:

$$u(t) = \bar{u} + u'(t)$$

$$v(t) = \bar{v} + v'(t)$$

= média + flutuação turbulenta




Classificação quanto à variação no tempo

– **Permanente**:

As propriedades médias estatísticas das partículas fluidas $(F, \vec{v}, \rho, p, \gamma, \mu, etc.)$ *<u>são funções exclusivas de ponto e independem do tempo</u>*.

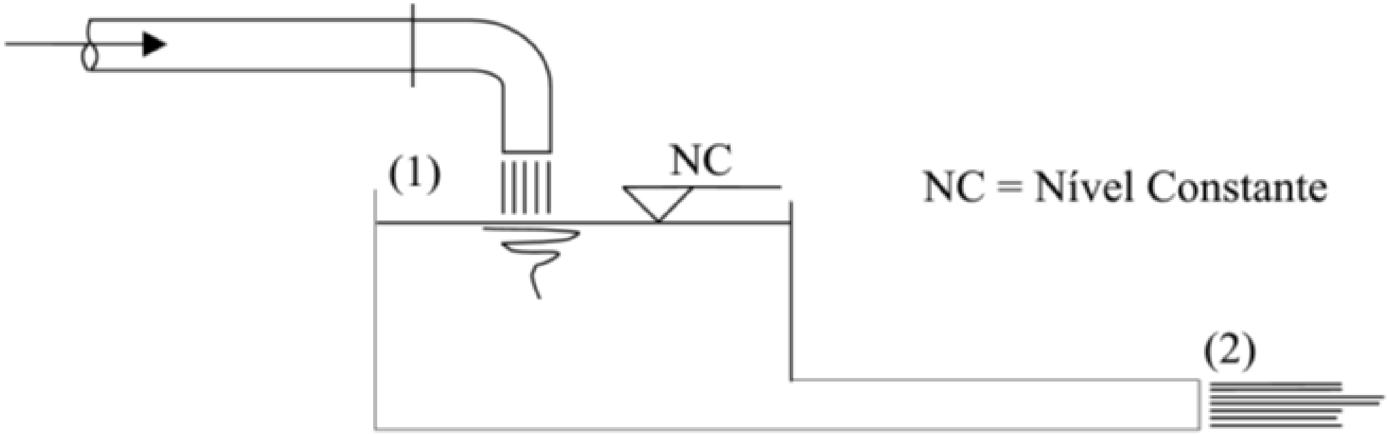
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \; ; \; \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \; ; \; \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

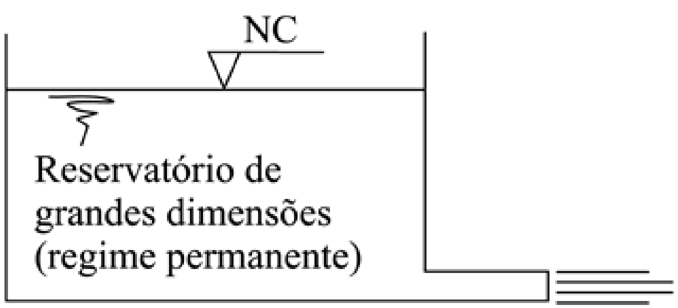
O Escoamento Turbulento pode ser em regime permanente?
Se feita a média em um tempo adequado, sim.

– **Não Permanente (transiente)**

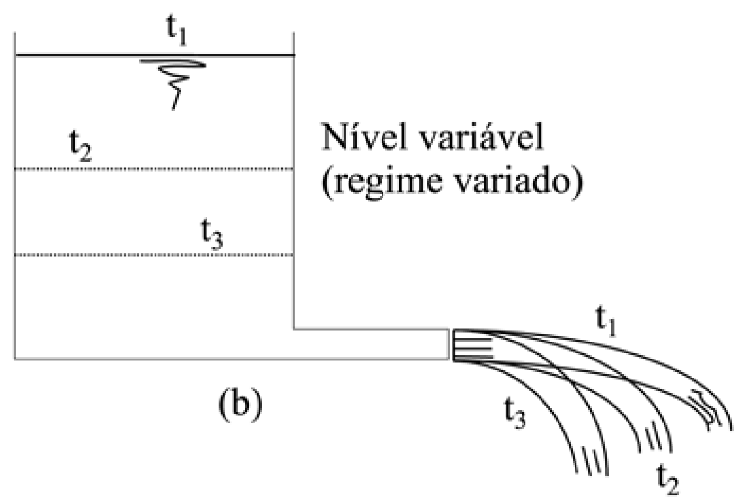
Quando as propriedades do fluido mudam no decorrer do escoamento;

Regime Permanente ou Variável





(a)



(b)

Classificação de escoamentos quanto à compressibilidade

Incompressíveis- quando o número de Mach

$$Ma = {}^{V}/_{c} \leq 0{,}3.$$

Para ar em pressões e temperaturas próximas à ambiente, significa que as equações da mecflu são válidas até velocidades de 100 m/s (*v= velocidade do fluido, c= velocidade do som no fluido*)

Compressíveis- para $Ma \geq 0{,}3$ as equações da mecflu não podem ser usadas

Classificação quanto ao movimento de rotação

- Quanto ao movimento de rotação:
  - **Rotacional**: A maioria das partículas desloca-se animada de velocidade angular em torno de seu centro de massa;
  - **Irrotacional**: As partículas se movimentam sem exibir movimento de rotação

Conceitos fundamentais na descrição de escoamentos:

- Linhas de Corrente (streamlines)
- Trajetória (pathlines)
- Linhas de Emissão (streaklines)
- Linhas de Tempo (timelines)
- Vazão

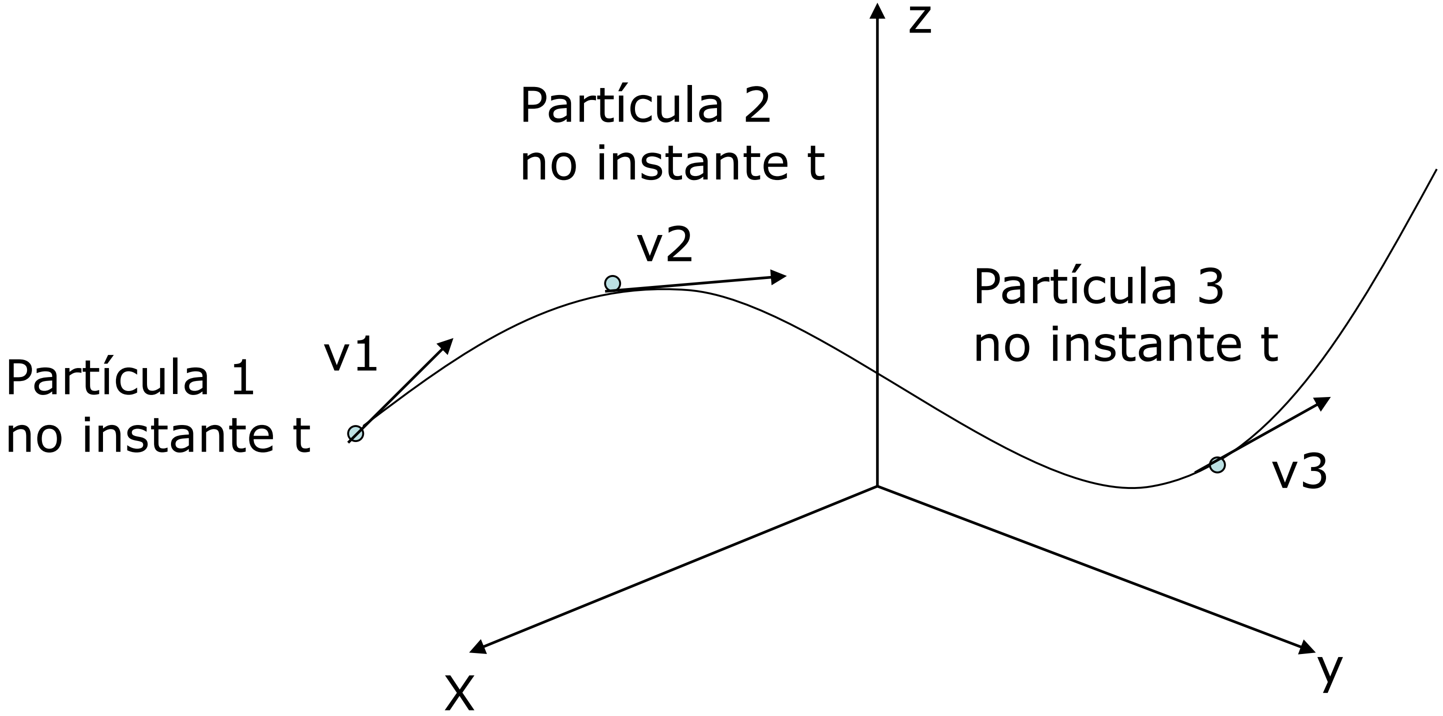
Conceitos fundamentais na descrição de escoamentos:

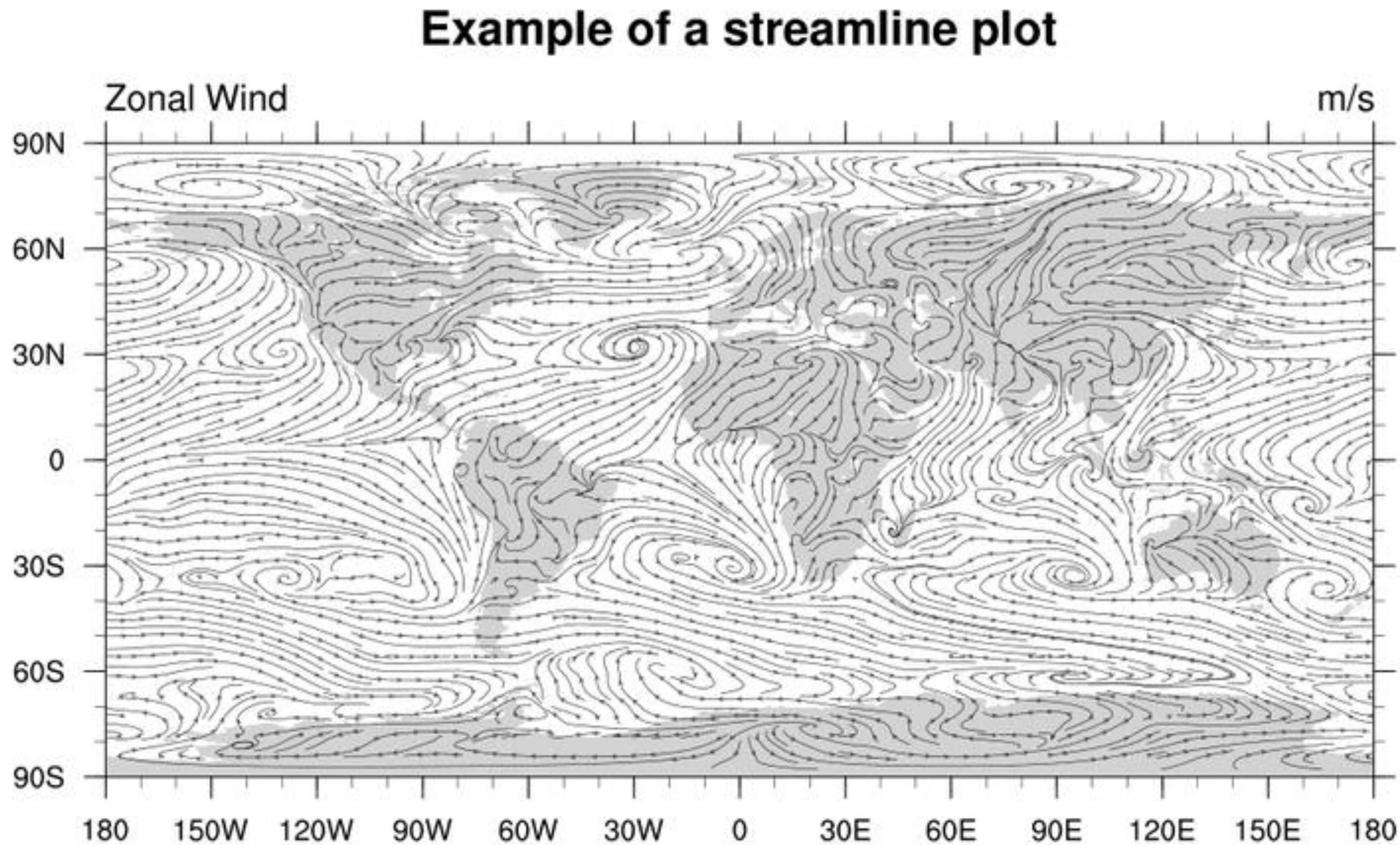
Linhas de Corrente (streamlines)
Trajetória (pathlines)
Linhas de Emissão (streaklines)
Linhas de Tempo (timelines)
Vazão

•**Trajetórias** (ing. *pathlines*) mostram o trajeto percorrido por uma partícula individual ao lo
•**Linhas de corrente** (ing. *streamlines*) são uma família de curvas tangentes à velocidade
determinado instante. Em particular, a linha de corrente que se encontra em contato com
duto ou tubulação se denomina **linha d'água**. O conjunto de todas as linhas de corrente é
um **tubo de corrente**. Se uma linha, aberta ou fechada, for usada como ponto de origem
corrente, o resultado é uma **superfície de corrente**.
•**Linhas de emissão** (ing. *streaklines*) são o lugar geométrico, em um determinado instan
partículas que passaram por um dado ponto no espaço em um dado instante passado.

Linha de Corrente - LC

- Linhas tangentes à direção do escoamento em cada ponto do campo de escoamento, em um dado instante.
- Duas linhas de corrente não podem se interceptar (o ponto teria duas velocidades)
- O tempo **não é variável** na equação da LC, já que o conceito se refere a um determinado instante (**é uma fotografia instantânea**).




Example of a streamline plot
Zonal Wind
m/s
90N
60N
30N
0
30S
60S
90S
180
150W
120W
90W
60W
30W
0
30E
60E
90E
120E
150E
180

Equação da Linha de Corrente - LC

Como são linhas tangentes à direção do escoamento, o produto vetorial da velocidade pelo deslocamento as definem. Em um escoamento bidimensional:

$$\vec{V} \wedge d\vec{r} = 0 = (u\vec{i} + v\vec{j}) \wedge (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = (udy - vdx)\vec{k}$$

$\therefore$ ao logo de uma linha de corrente: $udy - vdx = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

LC são úteis como indicadores da velocidade instantânea do escoamento,mas são difíceis de serem observadas experimentalmente em escoamentos não permanentes.

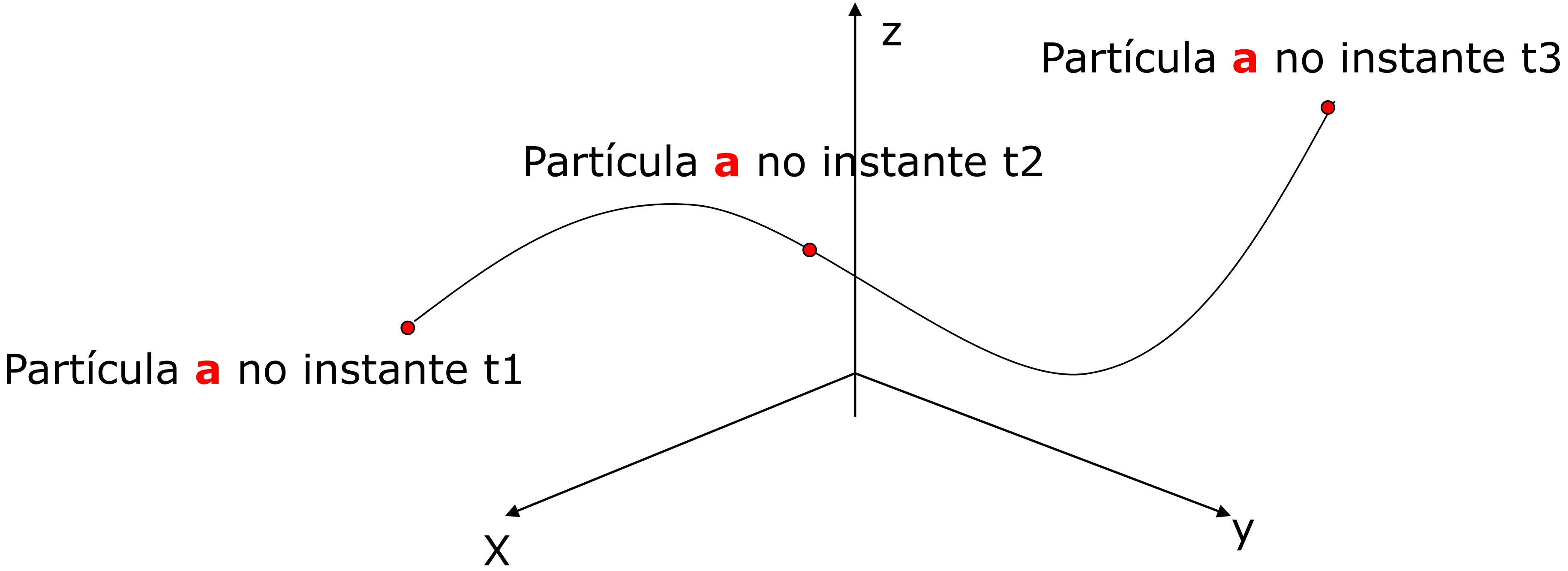
Em regime permanente, a **LC**, a **Trajetória** e a **Linha de Emissão** coincidem

Trajetória : É o LG dos pontos ocupados por **uma** dada partícula ao longo de seu escoamento.

Equações da trajetória $u = \frac{dx}{dt}$ e $v = \frac{dy}{dt}$

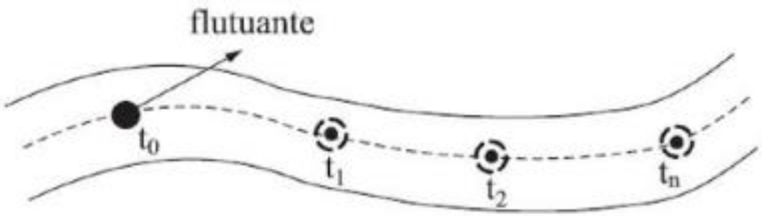
Equações paramétricas $x = x_0 f(t)$ e $y = y_0 f(t)$

Ilumina uma partícula em filme de longa exposição



Diferença entre trajetória e linha de emissão

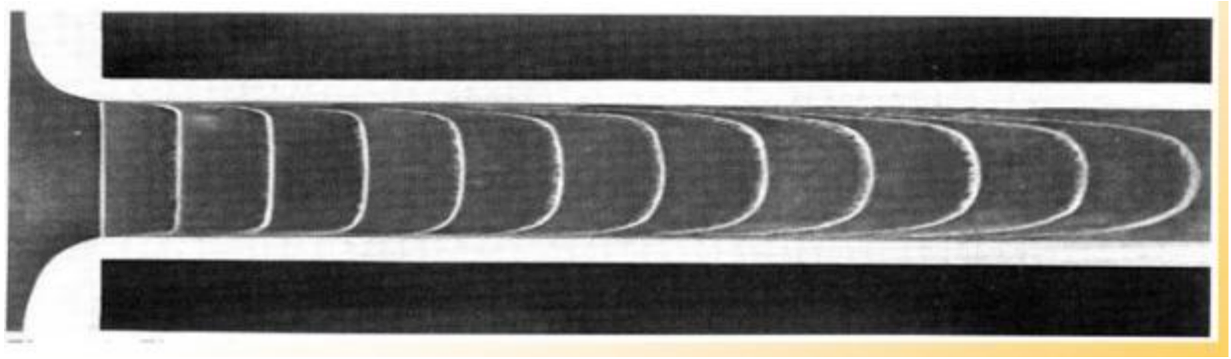
Trajetória: caminho traçado por **uma** partícula em filme de longa exposição

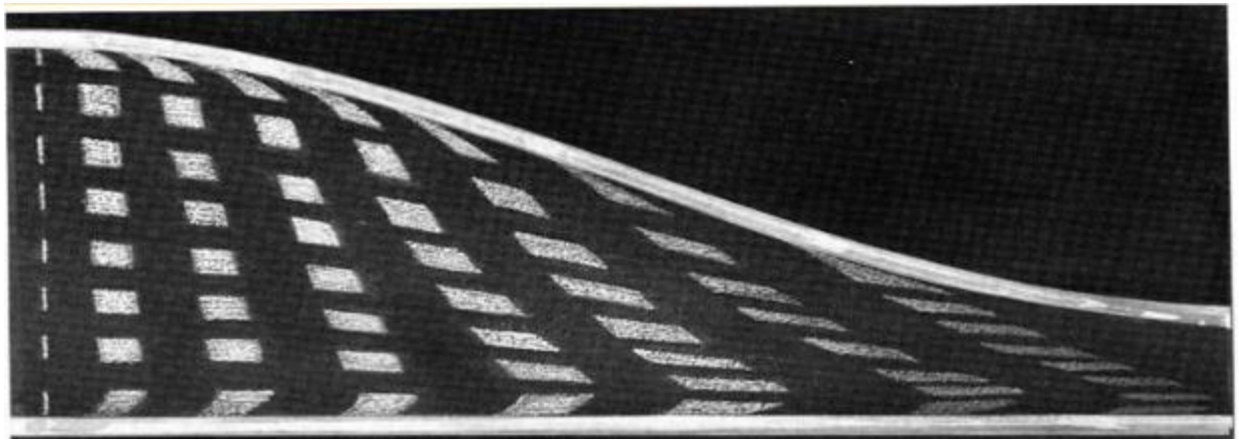


Linha de emissão: **todas** as partículas que passaram por um determinado ponto do espaço. A pluma que se desprende de uma chaminé permite visualizar de forma grosseira uma linha de emissão.

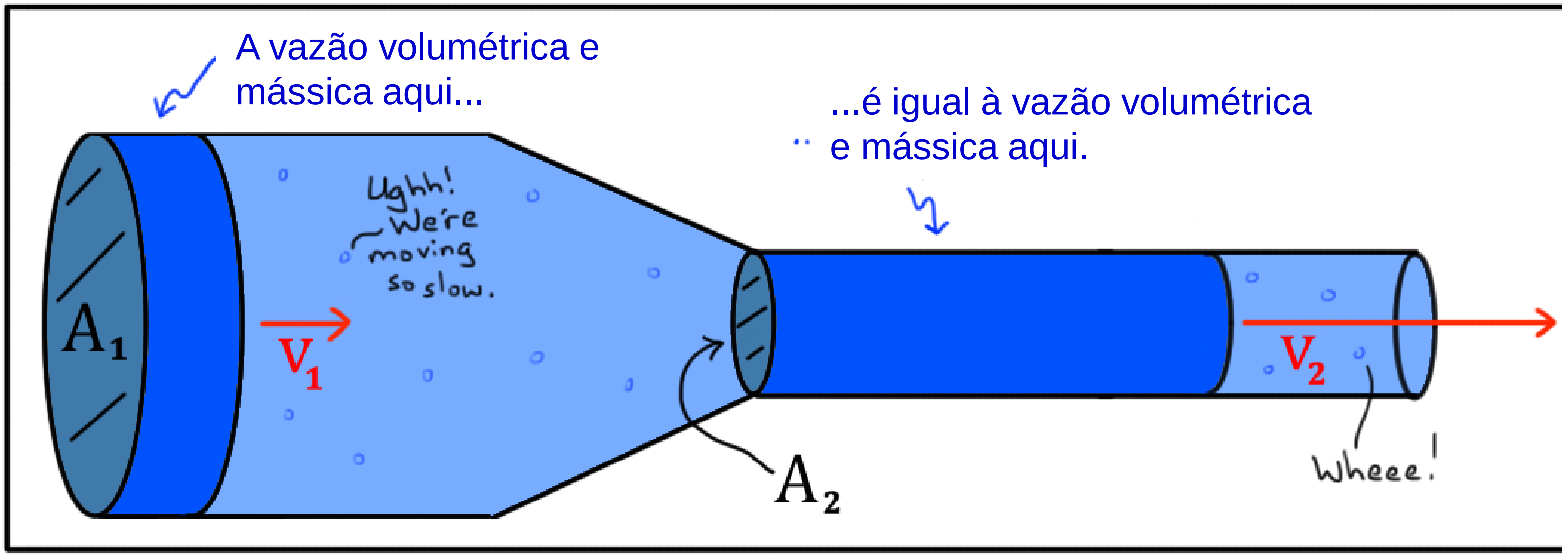
Linhas de tempo: conjunto de partículas de fluido adjacentes que foram marcadas no mesmo instante anterior de tempo.

Úteis para analisar a uniformidade do escoamento, por exemplo, os perfis de velocidade abaixo





Conceitos básicos de vazão



Define-se vazão mássica $\dot{m}$ como:

$$\boldsymbol{\dot{m} = \rho V S} \qquad (\mathrm{kg/s})$$

ρ - massa específica; V - velocidade média na seção transversal;
S - área da seção transversal

Define-se vazão volumétrica Q como:

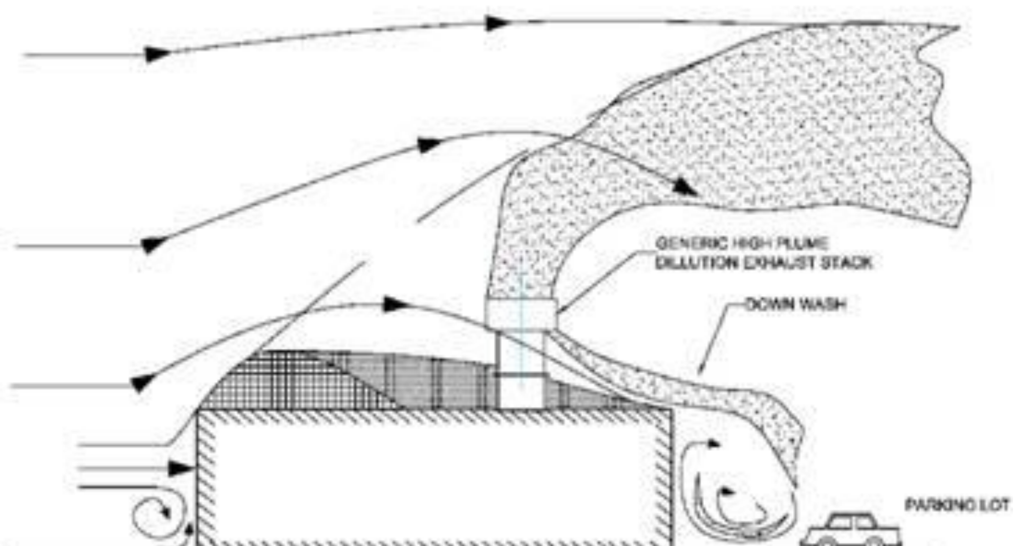
$$\boldsymbol{Q = VS} = {}^{\dot{m}}/_{\rho} \qquad \left({}^{m^3}/_{s}\right)$$

Cinemática dos fluidos

Na mecânica geral os corpos são sólidos e V descreve a velocidade do corpo em função de um referencial.

No fluido, considerado um *continuum,* qualquer propriedade de uma partícula deveria ser formulada em função da posição, em um dado instante.

Como descrever a velocidade de infinitas partículas?



- Sólidos: as leis da Física descrevem **Sistemas** usando **Lagrange**: **Conservação de Massa, Momento e Energia** (por ex. acompanhar um carro em um sistema de referência - autódromo)

- Fluidos: é impossível seguir o sistema (infinitas partículas) e usa-se a abordagem de **Euler** (**Volume de Controle**):

Observam-se as propriedades do escoamento em uma posição fixa do espaço (ex: termopares em boca de chaminé)

Posição e velocidade do carro no autódromo: Lagrange
Matriz de tubos de Pitot atrás da roda, para determinar o campo de velocidades em pontos fixos: **Euler**

Método Euleriano aplicado a um arranjo com tubos de Pitot em ensaio em carro de F1.

Observe que a posição do carro na pista é monitorada como um todo, Lagrange, mas a distribuição de velocidades do ar na frente do pneu é monitorada em pontos fixos, Euler.

As leis da física foram desenvolvidas para sistemas (Lagrange), mas devem valer num mundo Euleriano!

→**Teorema do Transporte de Reynolds** (a ser visto mais à frente)

Lagrange

Propriedades ($m, \rho, \mu, \vec{x}, \vec{V}, P, T, etc.$) de partículas são descritas como **função do tempo ao longo de sua trajetória.**

Ex: pássaros etiquetados com RF e acompanhados ao longo do tempo.

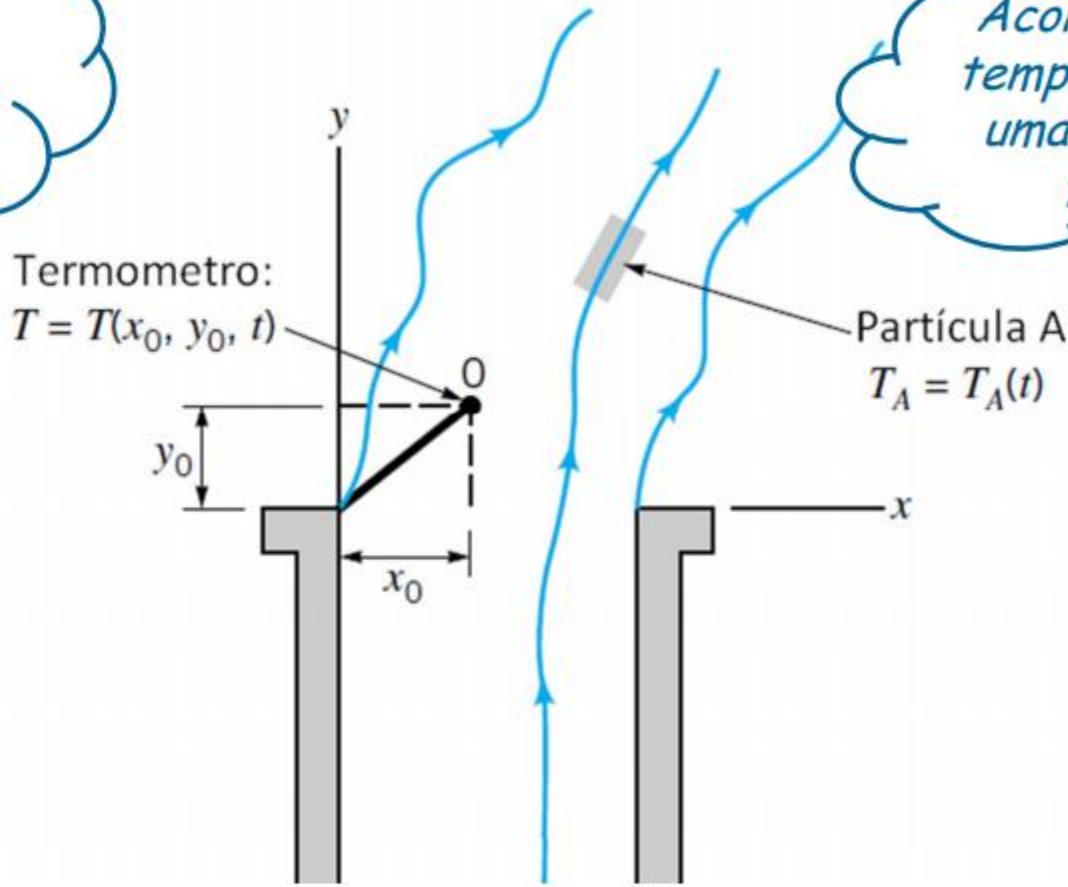
Euler

Descreve um ***campo*** de propriedades ($m, \rho, \mu, \vec{x}, \vec{V}, P, T, etc.$) como **funções da posição (normalmente uma posição fixa) e do tempo. Volume de controle VC**

Ex: pássaros fotografados em um local particular. Ou: termopares distribuídos sobre a boca da chaminé. Chaminé Vale, lata de spray

Instalar um termômetro num ponto fixo!

Acompanhar a temperatura de uma partícula fluida!



O campo do vetor de velocidades pode ser complexo:

$$\vec{V} = u(x,y,z,t)\vec{i} + v(x,y,z,t)\vec{j} + w(x,y,z,t)\vec{k}$$

$$V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

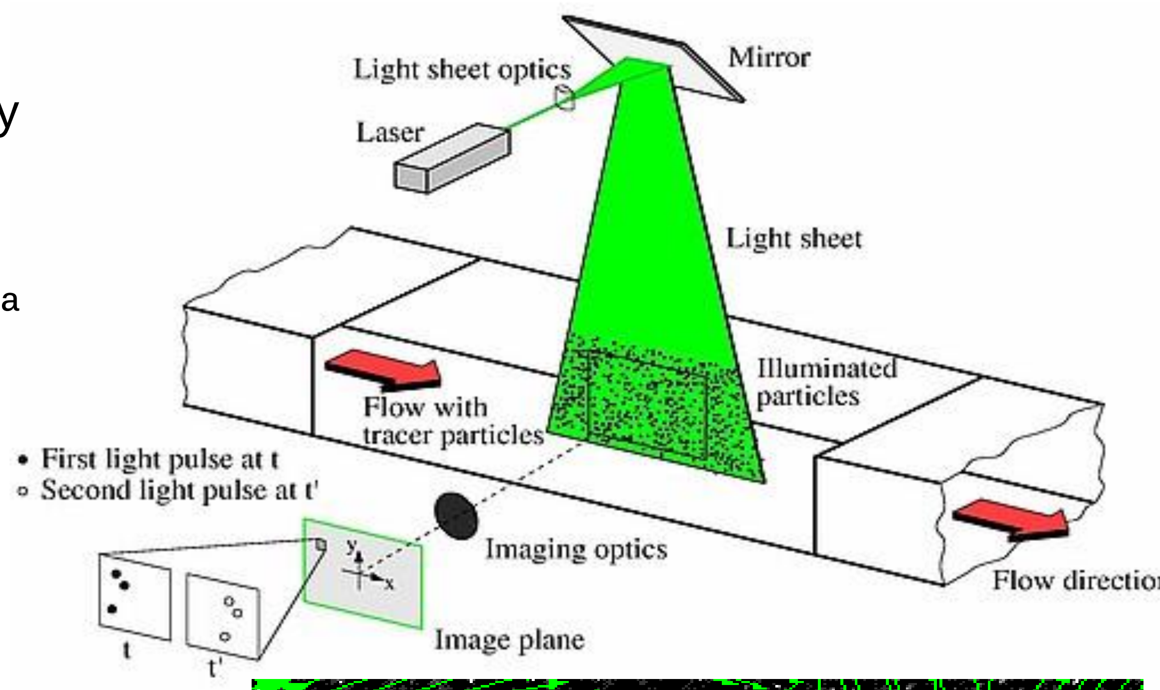
A visualização é sempre muito importante e, para auxiliar a observação e o tratamento em engenharia, definem-se **Linha de Corrente**, **Trajetória** e **Linha de Emissão** de uma partícula.

A referência mais abrangente para a visualização de escoamentos ainda hoje é uma série de filmes produzido pelo National Committee for Fluid Mechanics Films, nos EUA, produzida na década de 1960 por Ascher Shapiro. Os filmes são em preto e branco e podem ser encontrados no seguinte endereço (2017):

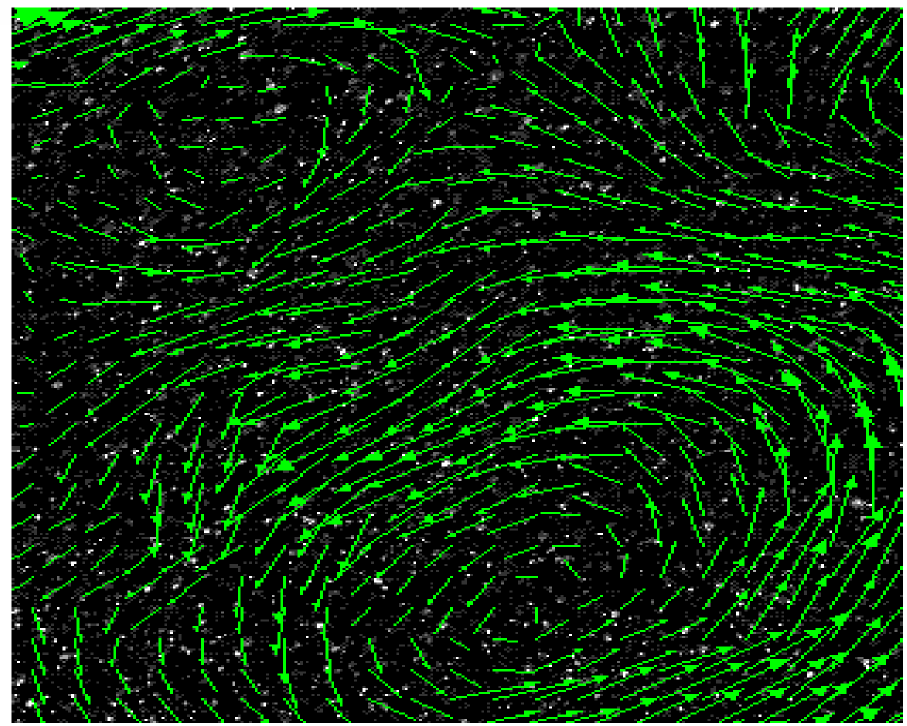
http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html

PIV: Particle Image Velocimetry

Método experimental para determinação do campo de velocidades (desenvolvido na 1ª década de 2000)



Campo de velocidades de um escoamento



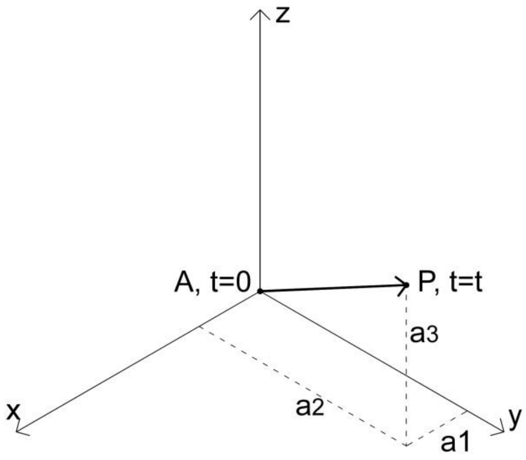
Aceleração de partículas em coordenadas cartesianas

Cinemática da partícula fluida – aceleração nos fluidos

Métodos:

Lagrange – acompanha o movimento das partículas e, em instantes sucessivos, observa a variação de uma grandeza G qualquer $(\vec{v}, p, \rho, \gamma, etc)$ nestas partículas.

Euler – Fixa-se um ponto geométrico $P(x_1, x_2, x_3)$ solidário ao sistema de referência e, em instantes sucessivos, observa-se a variação da grandeza G neste ponto



Lagrange

Grandeza $G(\vec{a},t) = G(a_1,a_2,a_3,t)$

A e P são posições da **mesma partícula ξ** nos instantes 0 e t

A variação da grandeza G com o tempo é a derivada total (ou material, ou substantiva):

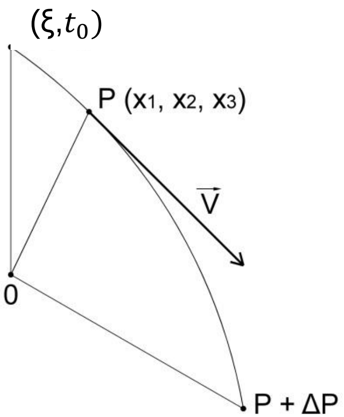
Porque acompanha matéria, substância

$$\frac{dG}{dt} = \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_\xi = \lim_{t \to t_0} \frac{G(P,t) - G(A,t_0)}{t - t_0}$$

$\frac{\partial G}{\partial t}$ = variação observada de G associada à partícula ξ , que ocupou A em t_0 e P em t

Se $G = x \;\; \rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$

Euler



Observa um campo (ou um ponto) fixo no espaço e **não** acompanha a partícula →a grandeza G varia no **tempo e no espaço**.

Partícula ξ cujo centro (P, t) descreve no referencial S uma trajetória que passa por P em t e por $P + \Delta P\ em\ t + \Delta t$.

Seja $G(\xi, t)$o valor da grandeza associado à partícula cuja derivada se pretende em $P(x_1, x_2, x_3)$, em t.

O valor desta grandeza será, em variáveis de Euler

$$G(\xi, t) = G(P, t)\ em\ t\ e$$

$$G(\xi, t + \Delta t) = G(P + \Delta P, t + \Delta t)\ , no\ instante\ t + \Delta t$$

$G(\xi, t) = G(P, t)\ em\ t, e\ G(\xi, t + \Delta t) = G(P + \Delta P, t + \Delta t)\ , no\ instante\ t + \Delta t$

Segundo Lagrange a derivada total da grandeza G será:

partícula

$$\frac{dG}{dt} = \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{part.A} = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{G(\xi, t + \Delta t) - G(\xi, t)}{\Delta t}}_{Lagrange}$$

posição

que, substituído pela posição $\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{G(P+\Delta P, t+\Delta t) - G(P, t)}{\Delta t}}_{Euler}, ou$:

$$\frac{dG}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{G(P+\Delta P, t+\Delta t) - \boldsymbol{G(P, t+\Delta t)}}{\Delta t} + \frac{\boldsymbol{G(P, t+\Delta t)} - G(P, t)}{\Delta t}\right]$$

Observar que o mesmo termo foi somado e subtraído

$$\frac{dG}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{G(P+\Delta P, t+\Delta t) - \boldsymbol{G(P,t+\Delta t)}}{\Delta t} + \frac{\boldsymbol{G(P,t+\Delta t)} - G(P,t)}{\Delta t} \right]$$

A segunda parcela é a derivada local: $\left.\frac{\partial G}{\partial t}\right)_P$ (no ponto P)

Aplicando-se a regra da cadeia à primeira parcela:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\frac{dG}{dx}$$

Como $\frac{dx}{dt} = v_i$ e $\frac{dG}{dx} = \nabla G$ (lembrando que $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$):

Produto escalar

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)G$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)G$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Derivada total=derivada local + derivada convectiva

Os termos convectivos podem ser vistos como uma correção devido ao fato que novas partículas com diferentes propriedades estão se movendo para nosso volume de observação.

- Aceleração com **Lagrange** é a taxa de variação da velocidade com o tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dw}{dt}\vec{k}$$

Aceleração com **Euler** em Coordenadas Cartesianas

Este é provavelmente um dos conceitos mais fundamentais do curso, mas não é muito intuitivo:

$$\vec{V} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + w\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{V}.\nabla)\vec{V}$$

ou

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

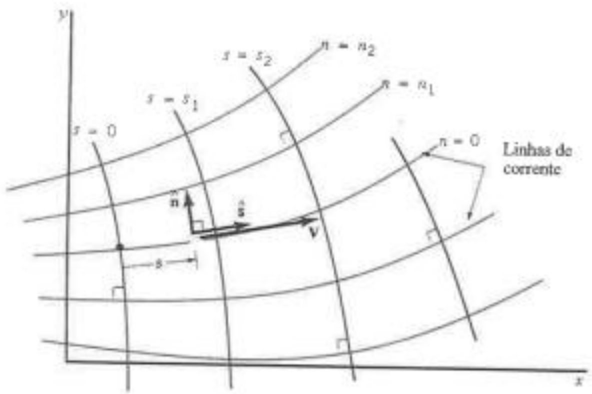
Geralmente, na MecFlu, quando se conhece o campo de velocidades, se conhece todo o escoamento.

$$a_x = \frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial t}} + \left(\vec{\boldsymbol{V}}.\boldsymbol{\nabla}\right)\vec{\boldsymbol{V}}$$

- O termo $\frac{\partial V}{\partial t}$ é chamado aceleração local; representa a “instabilidade” da velocidade e é zero para Reg. Perm.
- Os termos $u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}; v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}; w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$ são as acelerações convectivas; representam o fato de que a velocidade do fluido pode variar devido ao movimento de uma partícula de um ponto a outro do espaço; pode ocorrer tanto para escoamento transiente quanto em regime permanente.

.



Pode ser conveniente usar um sistema de coordenadas definido em função das linhas de corrente, com versores $\vec{s}$ e $\vec{n}$

$\vec{V} = V\vec{s}$, pois a velocidade é sempre tangente à direção s

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_s\vec{s} + a_n\vec{n}$ e pode-se mostrar que

$$\vec{a} = V\frac{\partial V}{\partial s}\vec{s} + \frac{V^2}{R}\vec{n} \quad ou\ seja\text{:}\ \ a_s = V\frac{\partial V}{\partial s}\ \ e\ \ a_n = \frac{V^2}{R}$$

$V\frac{\partial V}{\partial s}\vec{s}$ é a aceleração convectiva ao longo da LC e $\frac{V^2}{R}\vec{n}$ é a aceleração centrífuga normal ao movimento do fluido.

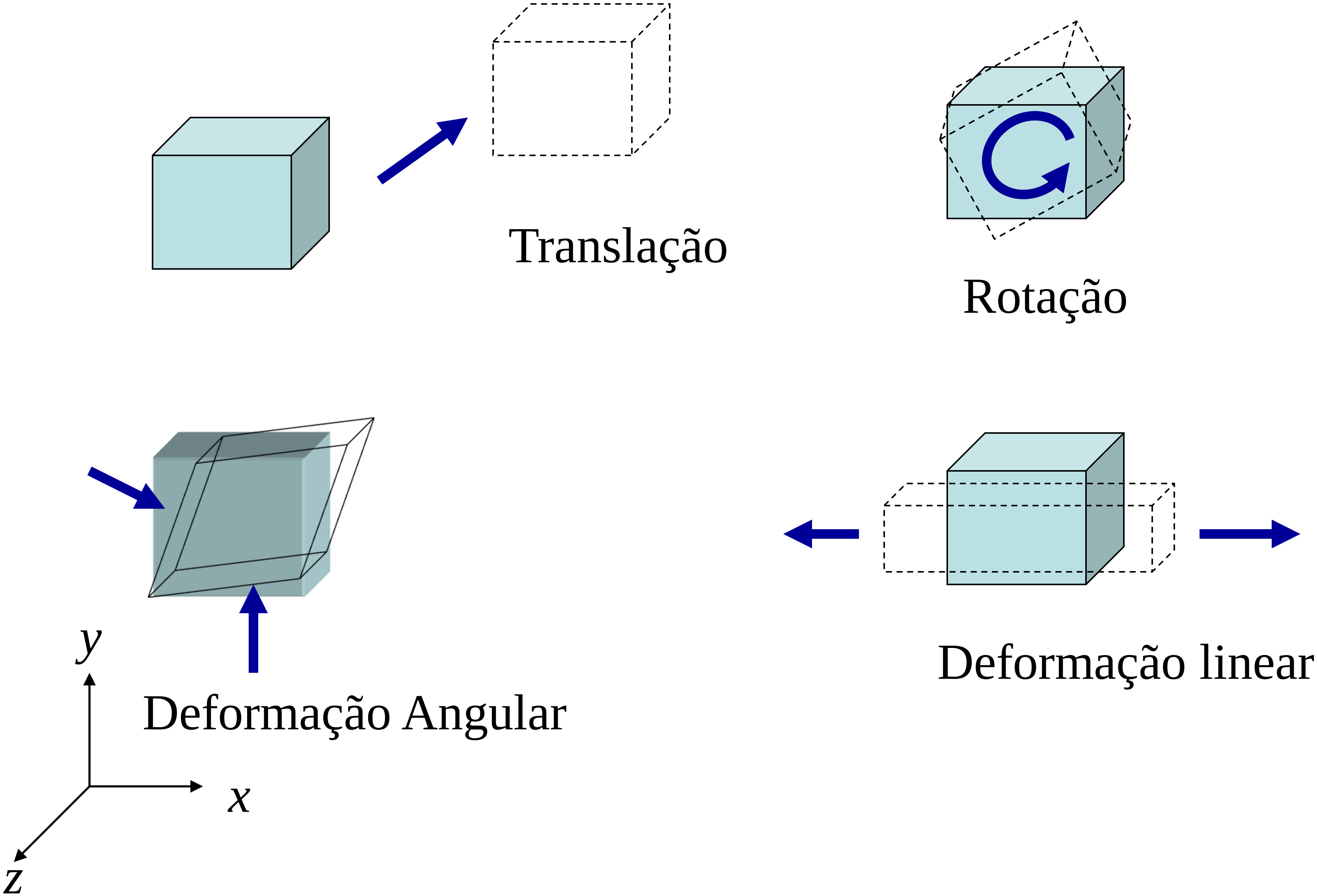
$\vec{n}$ aponta para o centro de curvatura da linha de corrente e quando o escoamento for paralelo,

$\boldsymbol{R\ tende\ a \infty\ e\ portanto\ a_n = 0}$

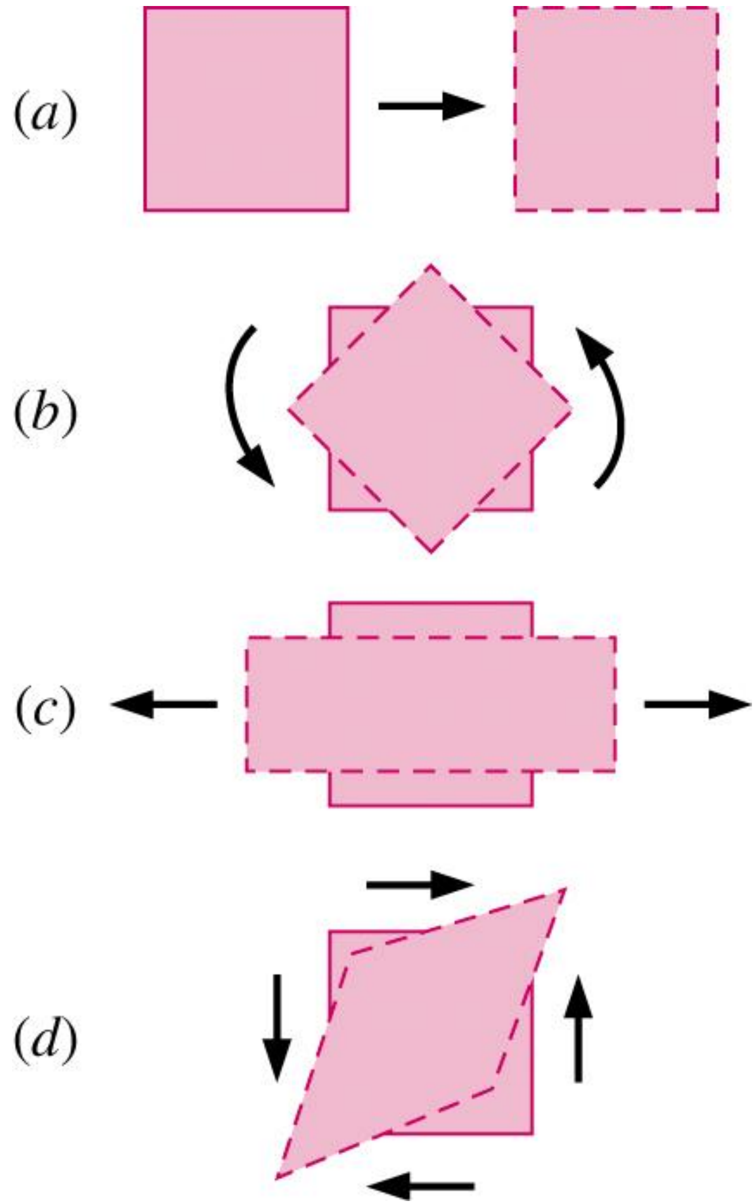
Material complementar

Cinemática do Escoamento

❖Movimentos de um Elemento Fluido



Partícula fluida pode passar por 4 tipos de movimento



Translação

velocidade: taxa de translação

Rotação

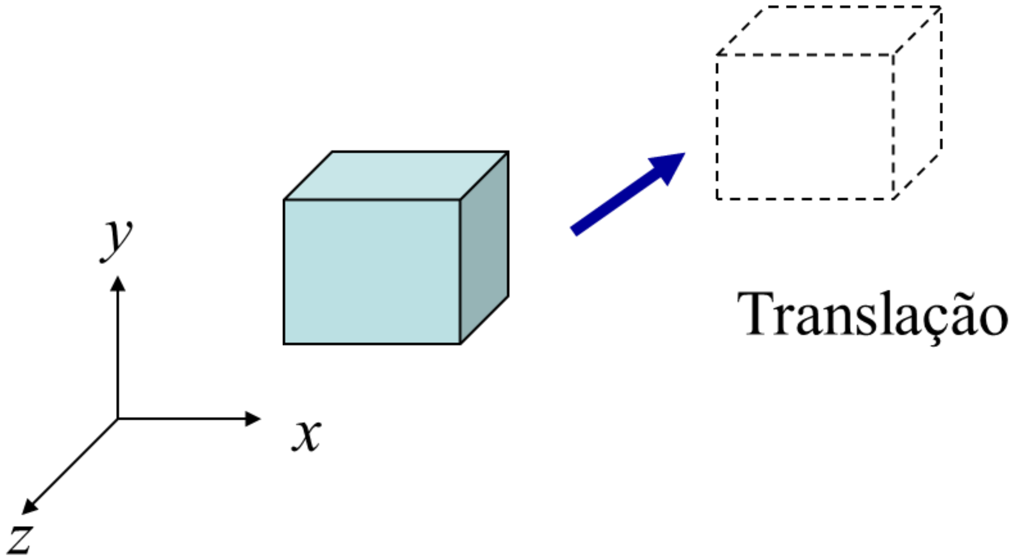
velocidade angular: taxa de rotação

Deformação linear

taxa de deformação linear

Deformação angular

taxa de deformação por cisalhamento

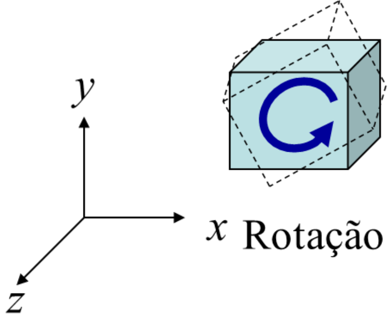


Definição de aceleração em coordenadas de Euler, a ser explicada nos slides seguintes.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

ou

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v}$$



Velocidade angular $\vec{\omega}$ (ou vetor turbilhão)

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2} rot\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla \wedge \vec{v}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

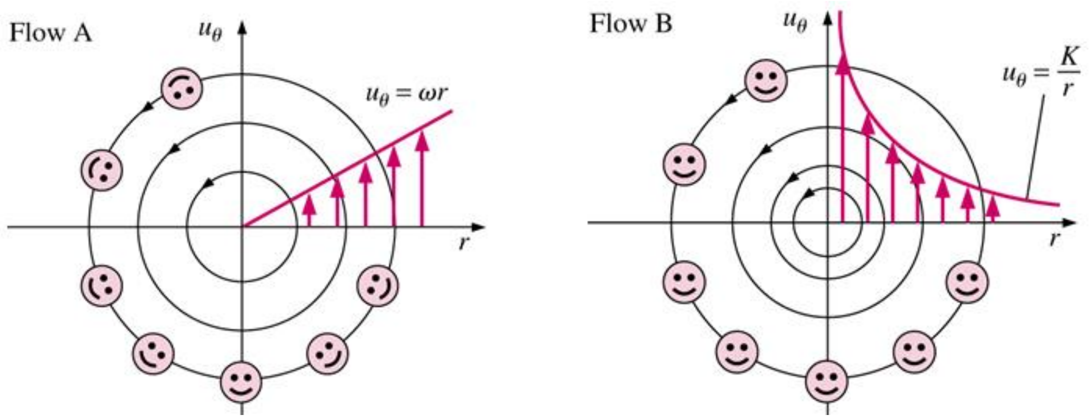
Se $\omega = 0$, o fluido é irrotacional.

Define-se ainda o vetor **vorticidade** como $\overrightarrow{\Omega} = 2\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{V}$

A vorticidade é uma medida da rotação do elemento fluido

Vetor vorticidade $\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}$ em coordenadas cilíndrico-polares:

$$\vec{\Omega} = \nabla x \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_e} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{k}$$



Na figura A se tem $u_r = 0$ e $u_\theta = \omega r$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_z} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - 0\right]\overrightarrow{e_z} = 2\omega\overrightarrow{e_z}$$

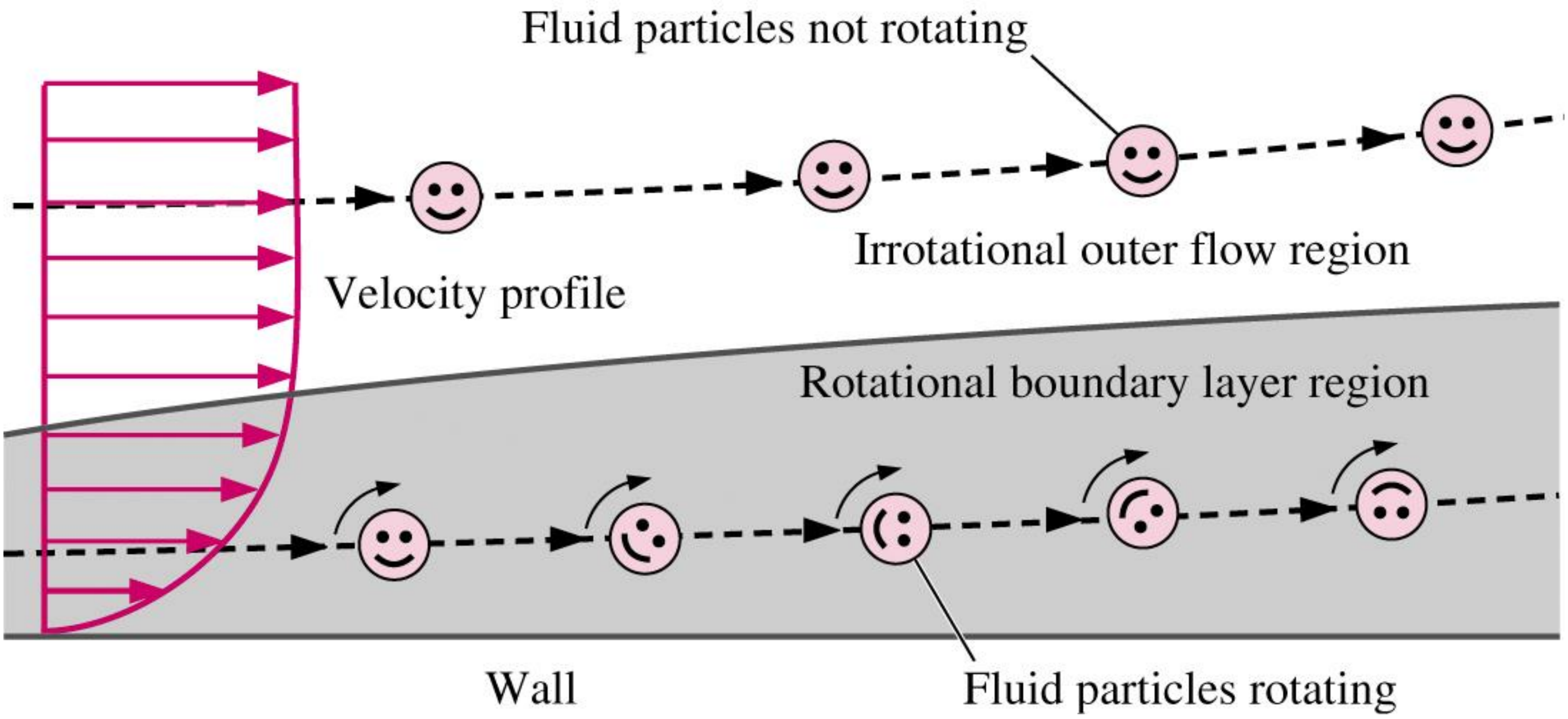
rotacional

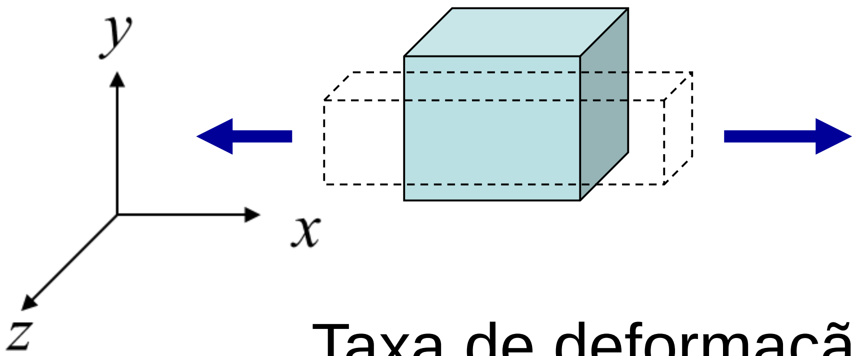
Na figura B , se tem $u_r = 0$ e $u_\theta = \frac{k}{r}$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_z} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(k)}{\partial r} - 0\right]\overrightarrow{e_z} = 0\overrightarrow{e_z}$$

irrotacional

Rotacional na Camada Limite, Irrotacional ao longe





Deformação linear

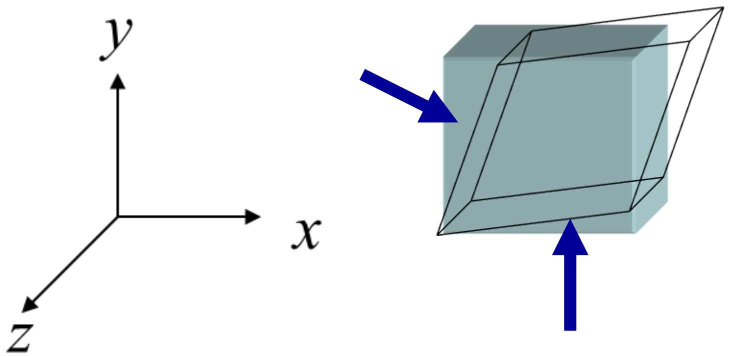
Taxa de deformação normal na direção x

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\left[u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2} - \left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\right]}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{deformação volumétrica } \nabla.\vec{v} = div\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Representa a taxa de variação de volume por unidade de volume

O divergente mostra se o fluido é incompressível: $\nabla.\vec{v} = 0$



Deformação Angular

Tensor taxa de deformação angular:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$ componente ε_{xy} no plano xy

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Matemática

- Operador nabla, ou del:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- Operador Laplaciano:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Gradiente: $$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Mais Matemática

- Vetor Gradiente:

$$\nabla \mathbf{u} = (\nabla u, \nabla v, \nabla w)$$

- Divergência:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

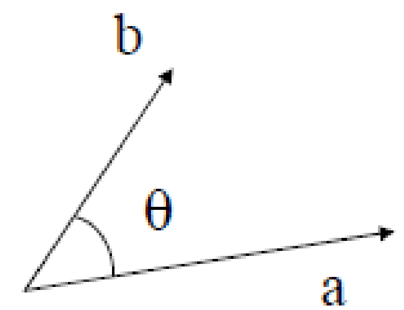
- Derivada Direcional:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Produto escalar

$$a \,.\, b = a_x \,.b_x + a_y \,.b_y + a_z \,.b_z$$

$$a \,.\, b = |a|\,|b| \cos(\theta)$$



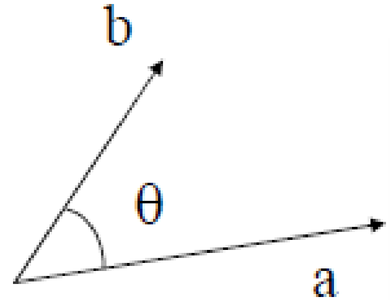
Resultado: um escalar.

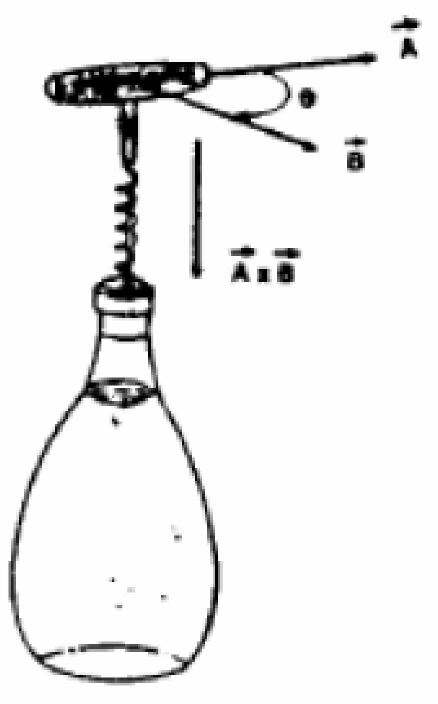
- Nulo, quando os dois vetores são ortogonais;
- Módulo máximo, quando os dois vetores estão na mesma direção.

Produto vetorial

$$\mathrm{a \times b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (\mathrm{a}_y b_z - a_z b_y)i + (\mathrm{a}_z b_x - a_x b_z)j + (\mathrm{a}_x b_y - a_y b_x)k$$

$$|\,\mathrm{a \times b}\,| = |\mathrm{a}|\;|\mathrm{b}|\,\mathrm{sen}\,(\theta)$$





- **Resultado:** um vetor
  - •Nulo, quando os dois vetores estão na mesma direção;
  - •Módulo máximo, quando os dois vetores são perpendiculares
  - •Perpendicular ao plano definido pelos dois vetores

Operador ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

- Um vetor que é apenas um operador matemático, sem significado físico
- O significado físico aparece quando o aplicado a outras grandezas ...

Gradiente

- Seja f(x, y, z) um função escalar contínua, com derivadas contínuas até ordem 1
- Gradiente de f:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

- Significado físico:
  - o gradiente é um vetor;
  - o gradiente aponta na direção de máxima variação de uma função;
  - o gradiente é perpendicular às superfícies f(x,y,z) = c (c constante).

Divergente

- Seja

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_x(x,y,z)i + v_y(x,y,z)j + v_z(x,y,z)k$$

  um campo vetorial contínuo, com derivadas contínuas até ordem 1

- Divergente de **v**:

$$\nabla.\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- Significado físico:
  - produto escalar de ∇ e **v**
  - o divergente é um escalar;
  - outros significados após vermos o teorema da divergência

Rotacional

- Seja

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_x(x,y,z)i + v_y(x,y,z)j + v_z(x,y,z)k$$

- Rotacional de **v**:

$$\nabla x\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)k$$

- Significado físico:
  - produto vetorial de ∇ e **v**
  - o rotacional é um vetor;
  - outros significados após vermos o teorema de Stokes

Operadores de segunda ordem

$$\nabla.\nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$ Laplaciano

$$\nabla.\nabla\vec{v} = \nabla^2\vec{v} = \begin{bmatrix} \nabla^2 v_x \\ \nabla^2 v_y \\ \nabla^2 v_z \end{bmatrix}$$ Laplaciano vetorial

$$\nabla x \nabla f = 0$$ Rotacional de um gradiente é nulo

$\Rightarrow$ Se $\nabla x \vec{E} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = \nabla V$

Operadores de segunda ordem

$\nabla . \nabla x \vec{v} = 0$ Divergente de um rotacional é nulo

⇨ Se $\nabla . \vec{B} = 0$ ⇨ $\vec{B} = \nabla x \vec{A}$

Outros operadores de segunda ordem:

$\nabla x \nabla x \vec{v}$ rot-rot

$\nabla \nabla . \vec{v}$ grad-div

Relação entre eles:

$$\nabla x \nabla x \vec{v} = \nabla \nabla . \vec{v} - \nabla^2 \vec{v}$$

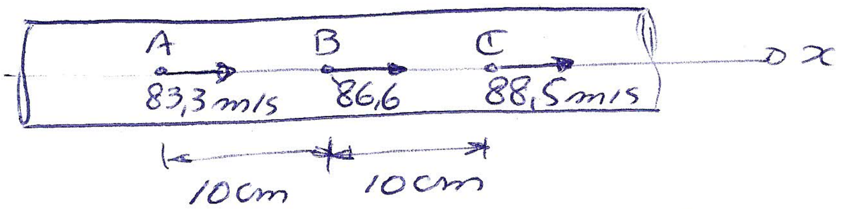
Ex 5.2. Potter

AR escoa em duto, com vel. conforme desenho. Duto cilíndrico, escoam em reg. permanente e uniforme. Como ρ varia com x?

No pto B $\Rightarrow$

$P = 344\,K\,Pa_{abs}$

$T = 10°C$



Deve-se fazer $\frac{d\rho}{dx}$ em B, admitindo reg. permanente e esc. uniforme. Atenção: Como o duto é cilíndrico e a vel. varia, o escoamento é compressível!

Toma-se a vazão mássica $\dot{m} = \rho V S$ e se admite que $\dot{m}$ se mantém na seção transversal. Aplica-se Euler:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)G \xRightarrow{\text{como } G=\dot{m}} \frac{d\rho VS}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \rho VS}{\partial t}}_{0:\ \text{regime permanente}} + u\frac{\partial \rho VS}{\partial x} + \cancel{v\frac{\partial \rho vS}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial \rho VS}{\partial z}}$$

$v = w = 0$

lembre que, por Lagrange, $\frac{d\rho VS}{dt} = 0$, pois a massa não varia em um sistema.

Como $S = cte \Rightarrow u\frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$, e como ρ e u só dependem de x, esta expressão vira derivada ordinária:

$$\frac{d\rho u}{dx} = u\frac{d\rho}{dx} + \rho\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{(I)}$$

tem-se $\frac{du}{dx} \cong \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{88{,}5 - 83{,}3}{0{,}2} = 26\,\frac{m/s}{m}$ (usa ≠ total pq é + exato)

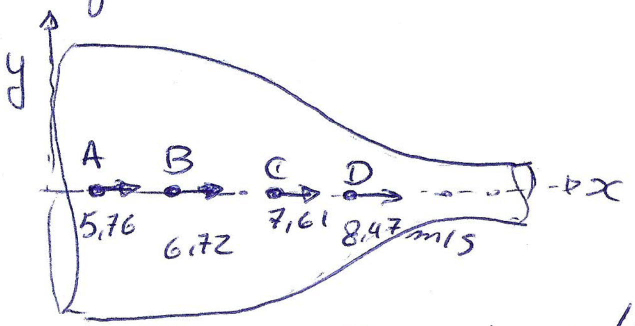
$$\rho_B = \frac{P}{R_{ar}T} = \frac{344.000\ Pa}{287\,J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}\cdot 283{,}15\,K} = 4{,}23\,\frac{kg}{m^3}$$

e a derivada pode ser aproximada por (I):

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\rho}{u}\frac{du}{dx} = -\frac{4{,}23}{86{,}6}\cdot 26 = \boxed{-1{,}27\ kg/m^3\cdot m}$$

Ex 5.3 - Potter

As componentes x da velocidade nos pontos A, B, C e D, que estão a 10 mm uns dos outros, são 5,76; 6,72; 7,61 e 8,47 m/s. em escoamento plano, reg. permanente, simétrico e incompressível, onde $w=0$. Faça uma aproximação da componente x da aceleração em C e da componente y da velocidade, 6 mm acima de B.



aceleração $\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$

A componente x da aceleração é dada por:

$$a_x = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0 \text{ reg. perm.}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{Não existe comp } u \text{ em } y} + \overbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}}^{0 \text{ Não há comp. } w}$$ (esc. plano, ou bidimensional)

Observe valor elevado, + de 60 x g

$$\therefore a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} \cong u\frac{\Delta u}{\Delta x} = 7{,}61 \cdot \frac{8{,}47 - 6{,}72}{0{,}02} = 666\, m/s^2$$

Observar que o escoamento é simétrico, e portanto não há componente v na linha em que $y=0$.

Como o escoamento é incompressível, sabe-se que $\nabla\vec{V}=0$ (o divergente de $\vec{V}$ é zero, pois não há deformação volumétrica em escoamento incompressível:

$$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$ e, como não há $w \Rightarrow$ no pto 6 mm acima de B $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{\Delta v}{\Delta y} \Rightarrow \frac{7{,}61 - 5{,}76}{0{,}02} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$$ e, como $V_B = 0$ em B

(por simetria), resulta $\Delta v = V_{6m} - V_B^{\,0} \Rightarrow$

$V_{6\,cm\ acima\ de\ B} = -0{,}555\, m/s$