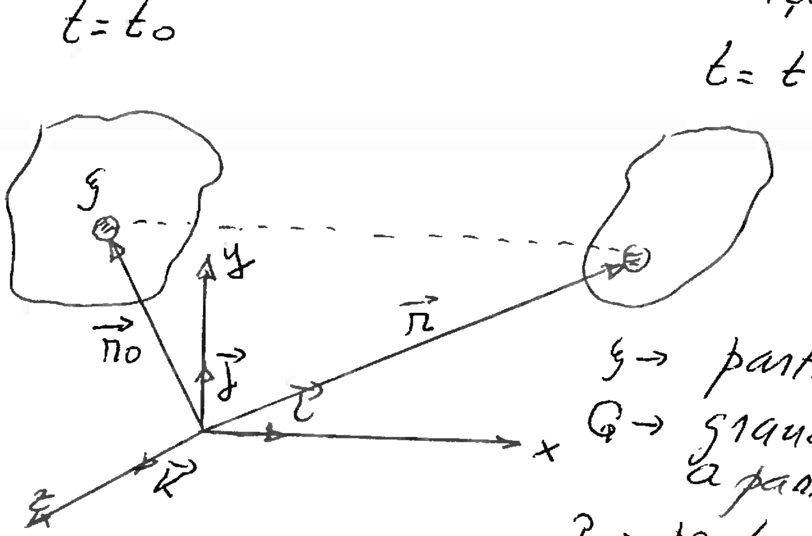
3. CINEMÁTICA DA PARTÍCULA FLUIDA

INTRODUÇÃO AOS FLUIDOS EM MOVIMENTO

3.1. DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO - GENERALIDADES

A cinemática estuda o movimento de um fluido sem levar em conta as suas causas (forças).

Matematicamente, o escoamento de um fluido (meio contínuo) pode ser interpretado pela sua transformação contínua no ESPAÇO EUCLIDIANO.



ξ → partícula fluida
G → grandeza associada à partícula.
P → ponto de uma massa fluida (diferencial)

3.2. MÉTODOS DE DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO

3.2.1. Método de Lagrange: Consiste em acompanhar a partícula fluida (ξ) ao longo da trajetória de uma posição inicial $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$, para, em cada instante determinar o valor da grandeza associada à partícula fluida (ξ). Posição no instante t $B(x_0, y_0, z_0)$.

Portanto consiste no estabelecimento de equações que determinem, em cada instante, a posição e as grandezas características correspondentes à cada partícula em escoamento.

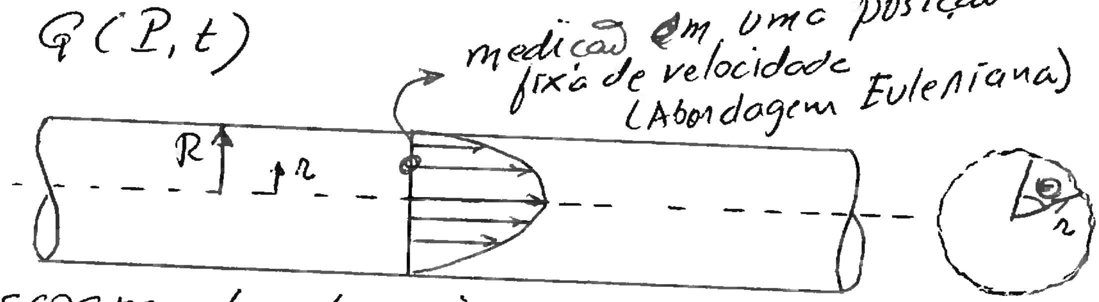
2. Método de Euler: Consiste em se fixar em um ponto geométrico $P(x,y,z)$, invariavelmente solidário ao sistema de referência S, para se medir a grandeza física ligada às partículas que, em diferentes instantes passam pelo ponto P.

Portanto consiste no estabelecimento de equações que determinam as grandezas características correspondentes às partículas, em cada ponto, em função do tempo.

3.3. NOÇÃO DE CAMPO, MOVIMENTO PERMANENTE E NÃO-PERMANENTE

O campo é obtido através da exploração simultânea de uma grandeza Q qualquer (escalar ou vetorial) em diversos pontos do escoamento.

$$Q = Q(P,t)$$



Ex: Escoamento Laminar em Conduto

Escoamento Permanente:

$Q(P,t) = Q(P,t_0)$ para qualquer t

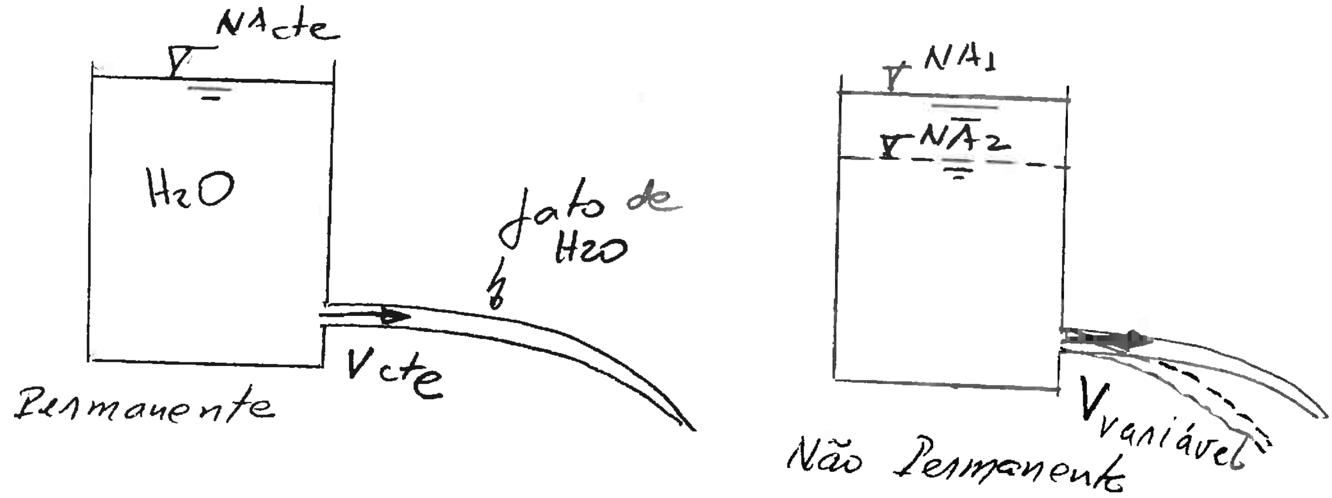
ou $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial t}\right)_P = 0$ (Variação local da grandeza Q no tempo é nula!!)

Escoamento Variável ou não Permanente

$Q(P,t) \neq Q(P,t_0)$

ou $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial t}\right)_P \neq 0$

Exemplo: Reservatório de água com um orifício lateral.



3.4. LINHAS DE ESCOAMENTO

3.4.1. Trajetória

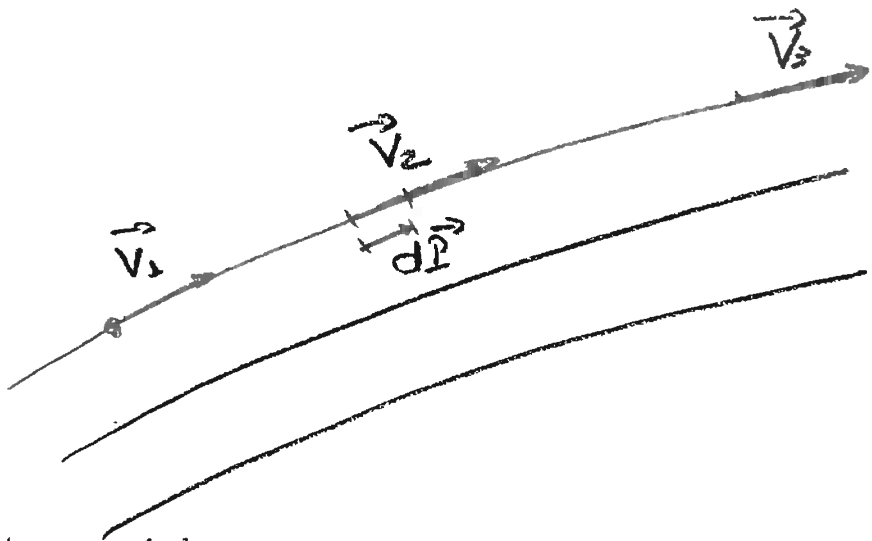
É o lugar geométrico das posições sucessivas ocupadas pelo centro de uma mesma partícula fluida (g) em movimento

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} V_x = u = \dfrac{dx}{dt} \\ V_y = v = \dfrac{dy}{dt} \\ V_z = w = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

A partir da definição da trajetória podem-se definir as equações paramétricas da trajetória, como será visto no exercício.

3.4.2. Linhas de Corrente:

São as linhas tangentes aos vetores velocidade em um dado instante. Diferentemente da trajetória englobam diferentes partículas do escoamento. (Correspondem à fotografia do escoamento em um determinado instante).



Analiticamente, sendo $d\vec{P}$ um arco elementar da L.C., então:

$$d\vec{P} \wedge \vec{V}(P,t) = 0 \quad , \quad \text{onde } d\vec{P} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

$$d\vec{P} \wedge \vec{V}(P,t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = 0$$

$$V_z dy\,\vec{i} + V_x dz\,\vec{j} + V_y dx\,\vec{k} - V_x dy\,\vec{k} - V_z dx\,\vec{j} - V_y dz\,\vec{i}$$

$$(V_z dy - V_y dz)\vec{i} + (V_x dz - V_z dx)\vec{j} + (V_y dx - V_x dy)\vec{k} = 0$$

Logo:

$$\left.\begin{array}{lll} V_z dy - V_y dz = 0 & \Rightarrow & V_z dy = V_y dz \\ V_x dz - V_z dx = 0 & \Rightarrow & V_x dz = V_z dx \\ V_y dx - V_x dy = 0 & \Rightarrow & V_y dx = V_x dy \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{V_y} = \dfrac{dz}{V_z} \\[2ex] \dfrac{dz}{V_z} = \dfrac{dx}{V_x} \\[2ex] \dfrac{dx}{V_x} = \dfrac{dy}{V_y} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

Equações da L.C.

ou

$$\frac{dx}{V_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{V_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{V_z(x,y,z,t)}$$

Em coordenadas Cilíndricas:

$$\frac{dr}{V_r(r,\theta,z,t)} = \frac{r\,d\theta}{V_\theta(r,\theta,z,t)} = \frac{dz}{V_z(r,\theta,z,t)}$$

3.4.3. Linhas de Emissão: Não é tema do programa do curso.

3.5. MÉTODOS DE VISUALIZAÇÃO DE ESCOAMENTO (Ver literatura)

3.6. EXERCÍCIOS

Exemplo 2.1 (Fox & McDonald)

Dado o campo de velocidades:

$$\vec{V} = ax\,\vec{i} - ay\,\vec{j} \qquad \begin{cases} x, y\ (m) \\ a = 0.1\ s^{-1} \end{cases}$$

Determinar:

a) Equação das LCs no plano x, y

b) Trace a LC pelo ponto I (2, 8, 0)

c) A velocidade da partícula no ponto I (2, 8, 0)

d) A posição em $t = 20\,s$ da partícula localizada em (2, 8, 0) no instante $t_0 = 0$

e) A velocidade da partícula na posição encontrada em (d)

f) Partindo das equações obtidas em d (trajetória) verificar equação da LC.

Solução:

a) Equação das LCs no plano x, y:

Equação Básica: $\dfrac{dx}{V_x} = \dfrac{dy}{V_y} = \dfrac{dz}{V_z}$

$\vec{V} = ax\vec{i} - ay\vec{j}$

$\left.\begin{aligned} V_x &= ax \\ V_y &= -ay \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dfrac{dx}{ax} = \dfrac{dy}{-ay}$

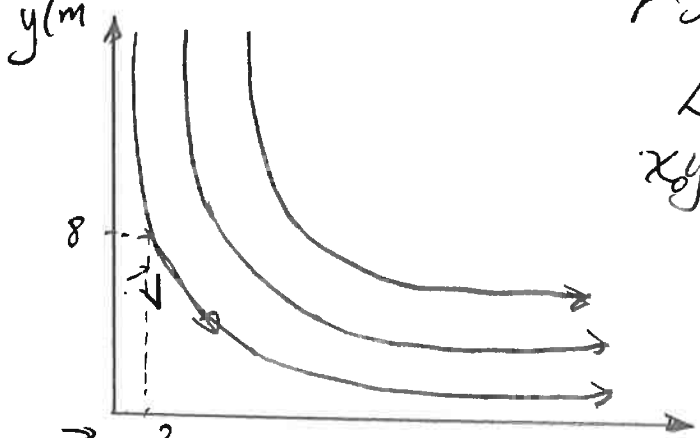
ou $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dy}{y}$

Integrando: $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y}$ ou $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln y = -\ln x + \ln k$

$\therefore \ln(xy) = \ln k \Rightarrow \boxed{xy = k}$ resposta (a)

b) Trata-se de uma família de hipérbole equilátera, que no primeiro quadrante está representado na figura a seguir:



L.C. pelo pto $P_0(2,8,0)$

$x_0 y_0 = k = 2 \times 8 = 16$

$\boxed{xy = x_0 y_0 = 16\,m^2}$

resposta (b)

c) $\vec{V}$ no pto $P_0(2,8,0)$

$\vec{V}_{P_0} = ax\vec{i} - ay\vec{j} = a(x\vec{i} - y\vec{j}) = 0{,}1 \times (2\vec{i} - 8\vec{j})$

$\boxed{\vec{V}_{P_0} = 0{,}2\,\vec{i} - 0{,}8\,\vec{j} \ m/s}$ resposta (c)

d) Posição em $t = 20\,s$ da partícula, que no instante t_0 ocupava $P_0\,(2,8,0)$

Aplicação da equação da trajetória:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = ax \implies \frac{dx}{x} = a\,dt$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -ay \implies \frac{dy}{y} = -a\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t a\,dt \implies \ln x \Big]_{x_0}^{x} = at\Big]_0^t$$

$$\therefore \ln\frac{x}{x_0} = at$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int_0^t -a\,dt \implies \ln y\Big]_{y_0}^{y} = -at\Big]_0^t$$

$$\ln\frac{y}{y_0} = -at$$

Portanto:

$$\left.\begin{aligned} \ln\frac{x}{x_0} &= at \\ \ln\frac{y}{y_0} &= -at \end{aligned}\right] \implies \left.\begin{aligned} x &= x_0 e^{at} \\ y &= y_0 e^{-at} \end{aligned}\right]$$

Equações paramétricas da trajetória

Para $P(2,8,0)$ e $t = 20\,s$ $\implies$

$$x = 2e^{0.1\times 20} = 14.8\,m$$

$$y = 8e^{-0.1\times 20} = 1.08\,m$$

$$\boxed{P(14.8;\ 1.08;\ 0)\ m}$$ resposta (d)

e) $V_P = ?$

$$\vec{V}_P = a(x\vec{i} - y\vec{j}) = 0{,}1(14{,}8\vec{i} - 1{,}08\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{V}_P = 1{,}48\vec{i} - 0{,}108\vec{j} \quad (m/s)}$$

resposta (e)

f)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 e^{at} \\ y &= y_0 e^{-at} \end{aligned}\right] \Longrightarrow \text{Equações paramétricas da trajetória}$$

$$\therefore \quad e^{at} = \frac{x}{x_0} \qquad (I)$$

$$e^{-at} = \frac{y}{y_0} \Longrightarrow e^{at} = \frac{y_0}{y} \qquad (II)$$

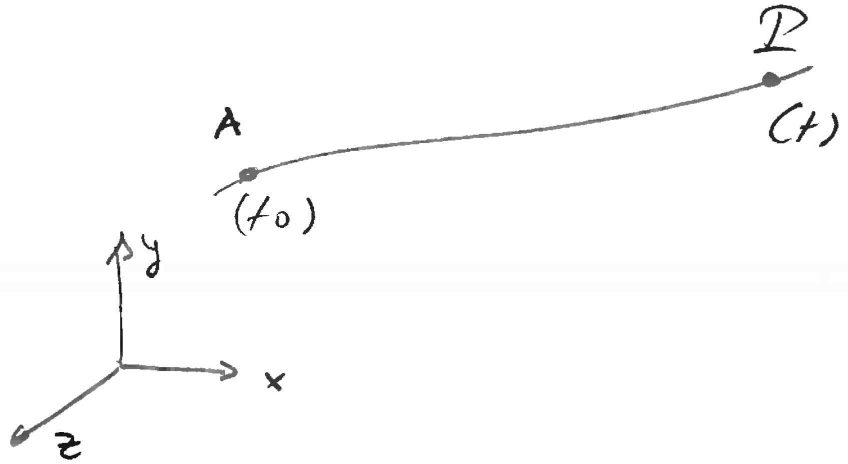
Igualando (I) e (II): $\dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y_0}{y}$

(f)

$\therefore \boxed{xy = x_0 y_0}$ Coincide com a equação da LC condição que normalmente ocorre para Escoamento Permanente.

3.7. VARIÁVEIS DE LAGRANGE E EULER CONCEITO DE DERIVADA MATERIAL, LOCAL E CONVECTIVA

Em variáveis de Lagrange: a grandeza G_L associada a partícula ξ que partiu de A (istante t_0) é, no instante t igual a grandeza G sentida pela mesma partícula ao passar pelo ponto P.



Em termos de variáveis de Lagrange:

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\xi} = \lim \frac{G(P,t) - G(A,t_0)}{t - t_0}$$

Em Variáveis de Euler:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) = \lim \frac{G(P,t) - G(P,t_0)}{t - t_0}$$

onde $G(P,t)$ e $G(P,t_0)$ se referem a partículas diferentes observadas na mesma posição.

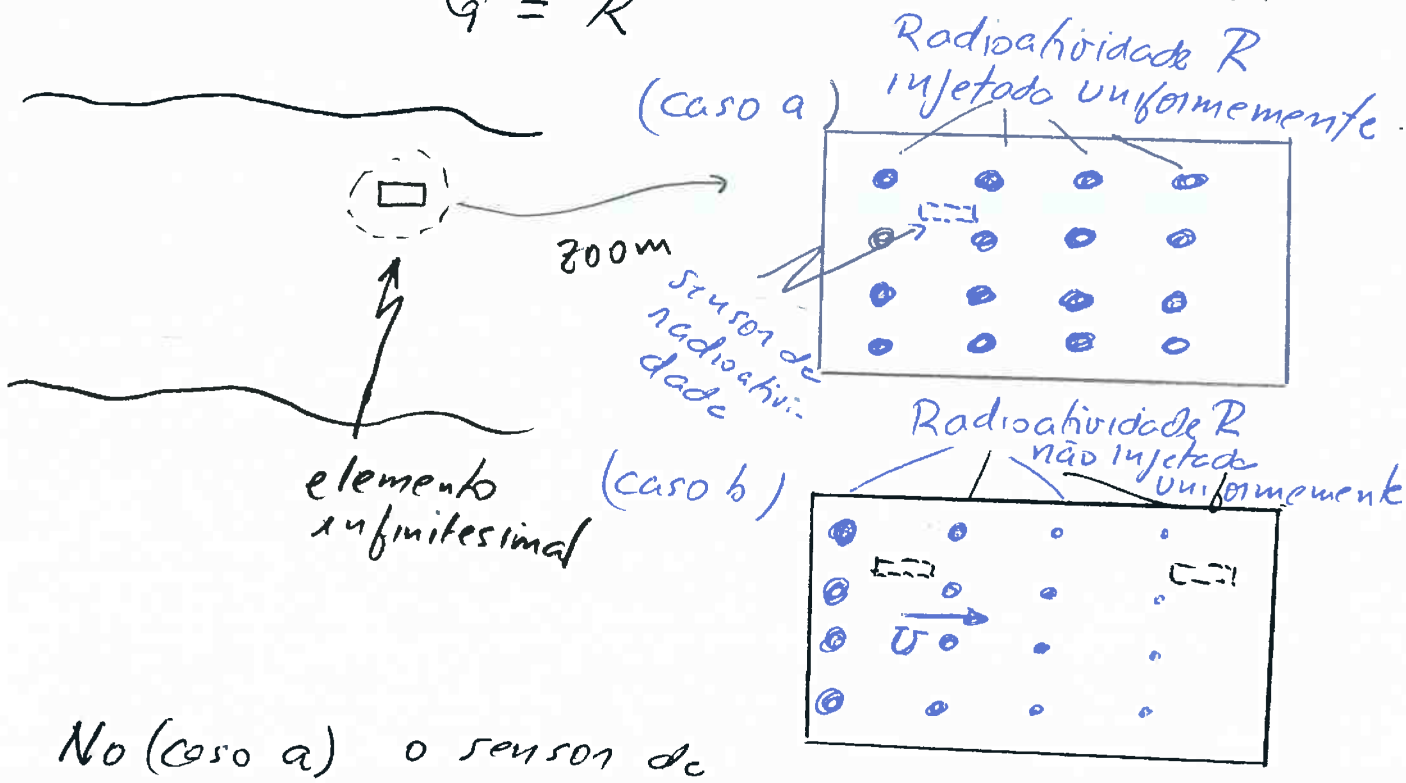
Para caracterizarmos a mudança sentida em um ponto material, em Variáveis de Euler necessitamos de dois termos:

a) a mudança da intensidade com o tempo em um pto fixo.

b) a diferença de intensidade entre pontos de estações fixas (infinitesimamente próximas) em um instante fixo.

Exemplo: Ambiente radioativo onde:

$$q = R$$



No (caso a) o sensor de radioatividade registra a variação local de radioatividade num intervalo de tempo:

$$\frac{\partial R}{\partial t} \Delta t$$

No (caso b) são necessários dois sensores de radioatividade registrando-se assim a variação local e a variação convectiva (U) entre duas estações próximas medidas no mesmo instante: $U \frac{\partial R}{\partial x} \Delta t$

Resulta portanto:

$$dR = \Delta t \left[\frac{\partial R}{\partial t} + U \frac{\partial R}{\partial x} \right]$$

ou

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + U \frac{\partial R}{\partial x}$$

$U \frac{\partial R}{\partial x}$ → variação convectiva de R

$\frac{\partial R}{\partial t}$ → variação local de R

$\frac{dR}{dt}$ → variação material de R

Generalizando para uma grandeza qualquer Q:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) Q$$

Admitindo: $Q = \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ → aceleração material

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$$

$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$ → aceleração convectiva

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ → aceleração local (igual a zero no Esc. Permanente).

3.8. Exercício:

Exemplo 4.5 (Munson)

Dado o campo de velocidades:

$$\vec{V} = \left(\frac{V_0}{\ell}\right)(x\vec{i} - y\vec{j})$$ Escoamento Bidimensional e Permanente

Determinar o campo de aceleração desse escoamento.

Solução:

Equação Básica: $$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$$

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = u\vec{i} + v\vec{j}$$ (bidimensional)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$ (esc. permanente)

$$\therefore \vec{a} = (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}$$

$$\vec{a} = u\frac{\partial}{\partial x}(u\vec{i} + v\vec{j}) + v\frac{\partial}{\partial y}(u\vec{i} + v\vec{j})$$

$$\vec{a} = \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j}$$

$$u = \frac{V_0}{\ell}x \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V_0}{\ell} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$v = -\frac{V_0}{\ell}y \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{V_0}{\ell}$$

Portanto:

$$\vec{a} = \left[\frac{v_0}{\ell} x \left(\frac{v_0}{\ell}\right) + \left(-\frac{v_0}{\ell}\right) y \times 0\right] \vec{i}$$

$$+ \left[\frac{v_0}{\ell} x \cdot 0 + \left(-\frac{v_0}{\ell} y\right)\left(-\frac{v_0}{\ell}\right)\right] \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{v_0^2}{\ell^2} x \, \vec{i} + \frac{v_0^2}{\ell^2} y \, \vec{j}}$$

Módulo da aceleração:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{\ell^2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{v_0^2}{\ell^2}\right)^2 y^2}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \left(\frac{v_0}{\ell}\right)^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$