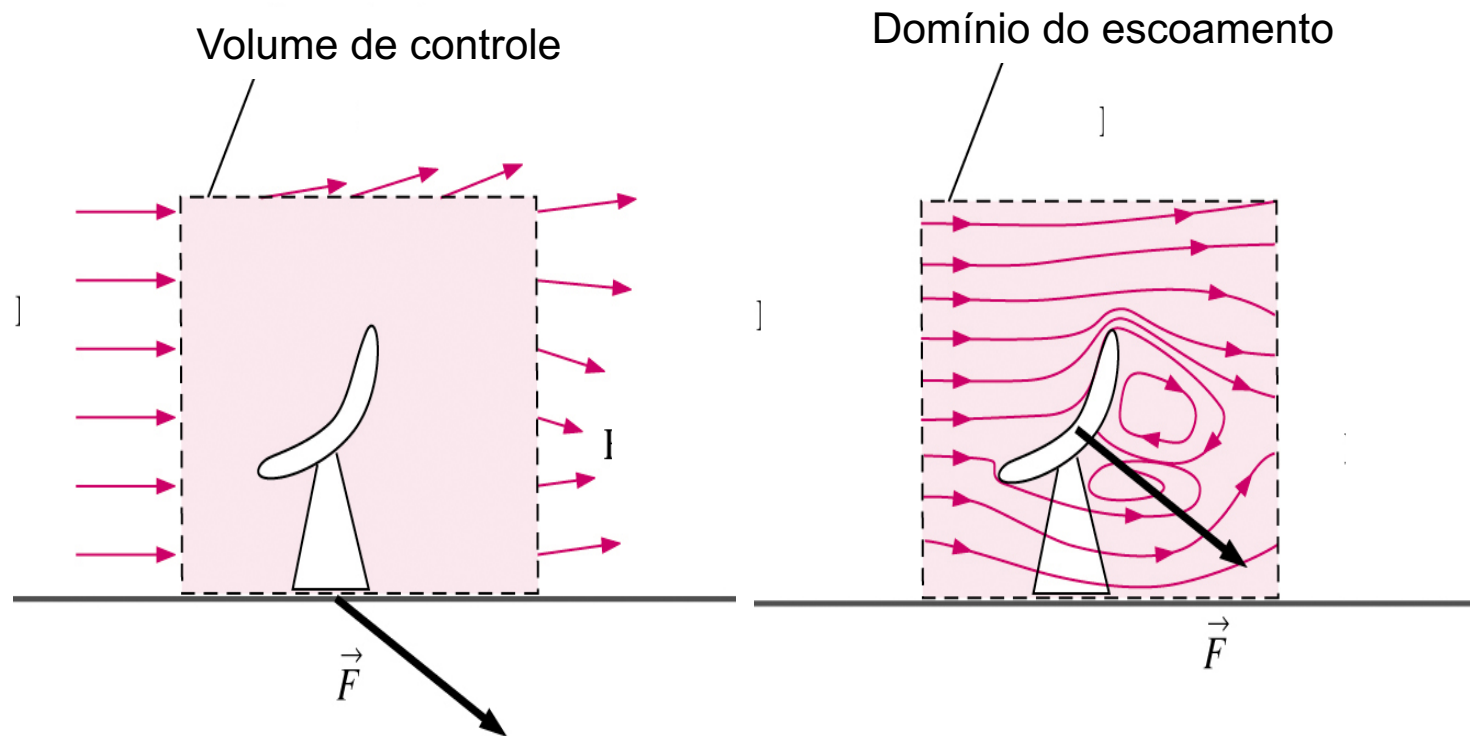


Análise Diferencial de Escoamentos de Fluidos

Prof. Dr. Marcos Tadeu Pereira

PME 3222 - 2020

- **Equações Integrais**, de conservação com VC, para *Massa*, *Energia* e *QDM* são **úteis para determinar efeitos globais**
- Todavia, não obtém conhecimento sobre o escoamento **dentro** do VC \Rightarrow motivação para **análise diferencial**



Conservação de massa na forma diferencial – 1º modo

Conservação da massa para um VC na forma integral:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

Teorema da Divergência para substituir a integral de área:

$$\int_{VC} \nabla \cdot \vec{G} d\forall = \int_A \vec{G} \cdot \vec{n} dA$$

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] d\forall = 0$$

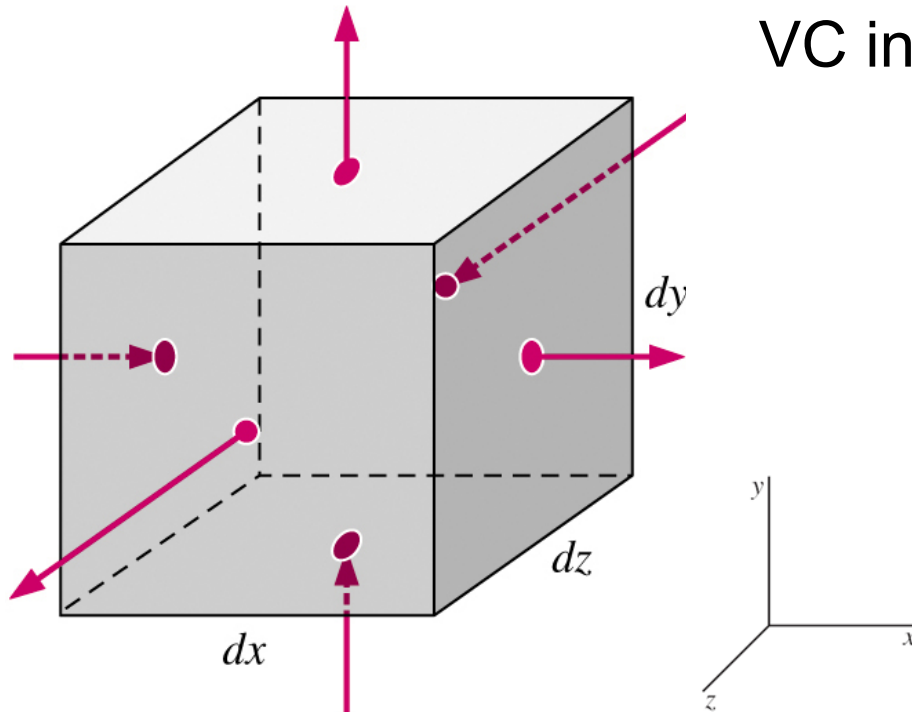
Conservação de massa na forma diferencial – 1º modo

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\forall + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] d\forall = 0$$

e como a integral vale para qualquer VC, então tem-se a **equação diferencial da conservação da massa**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Conservação de massa na forma diferencial – 2º modo de obtenção

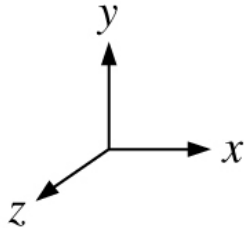


VC infinitesimal $dx \, dy \, dz$

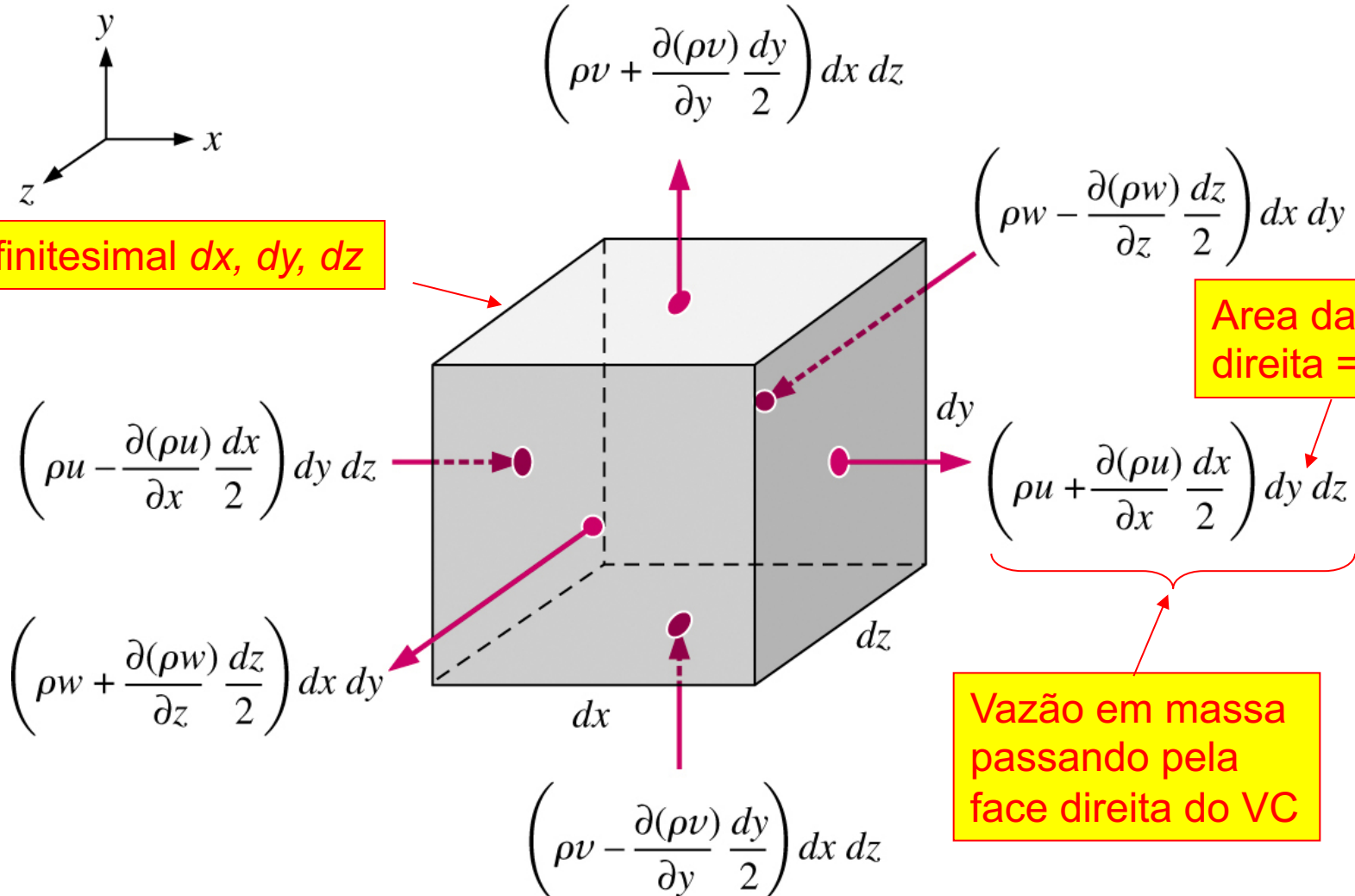
Vazão mássica saindo pela face direita, com expansão em series de Taylor:

$$(\rho u)_{\text{centro da face direita}} = \rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 (\rho u)}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 + \dots$$

Conservação de massa na forma diferencial



VC infinitesimal dx, dy, dz



Area da face direita = $dy dz$

Vazão em massa passando pela face direita do VC

A seguir, somam-se as vazões em massa que entram e saem das 6 faces do VC

Vazão líquida de massa entrando no VC:

$$\sum_{in} \dot{m} \approx \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy$$

Vazão líquida de massa saindo do VC:

$$\sum_{out} \dot{m} \approx \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz + \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy$$

Tomando-se a equação da conservação da massa na forma integral se tem:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

Após as substituições das equações:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

e, dividindo pelo volume $dx dy dz$, resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Ou, se for aplicada a definição da divergência de um vetor:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

**Equação da
conservação
da massa,
diferencial**

Equação da Conservação da Massa

Na forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

Na forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Casos particulares da Eq. Continuidade Diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Fluido **Compressível** em regime permanente:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

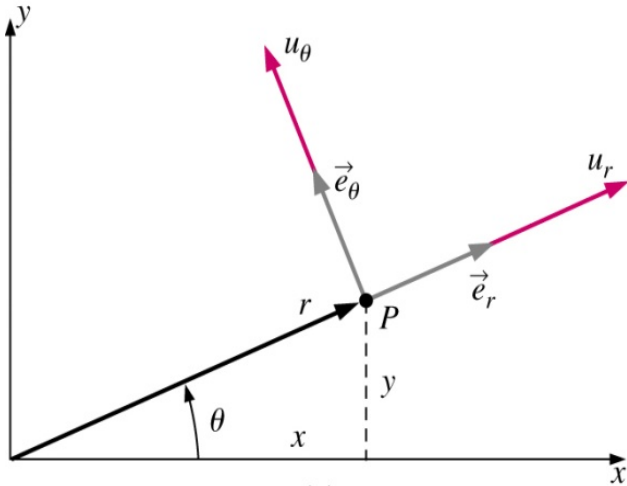
Fluido **Incompressível**

$$\rho = \text{const} \rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div} \vec{v} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Relação poderosa
Perceba que não é
preciso ser regime
permanente

Continuidade em coordenadas cilíndrico-polares



$$\nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial(r)}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \quad \vec{V} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

Continuidade em coordenadas cilíndrico-polares

■ Escoamento em Regime Permanente Compressível

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Cartesianas

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho U_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0$$

Continuidade em coordenadas cilíndrico polares

■ Escoamento incompressível

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{e } \rho = \text{constante}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(U_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(U_z)}{\partial z} = 0$$

Em geral, a **equação da continuidade** não pode ser usada por si só para resolver o campo de velocidades, mas pode ser usada para:

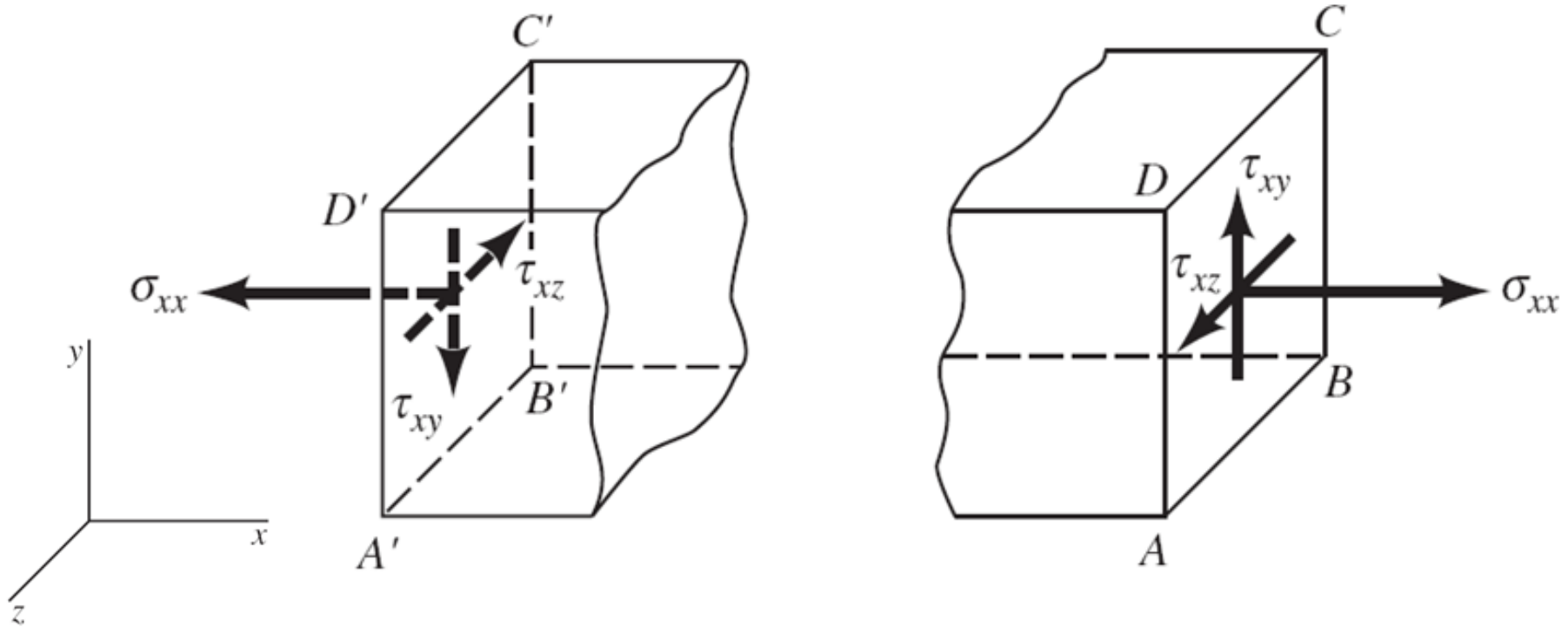
1. Determinar se o campo de velocidades é incompressível
2. Encontrar componentes desconhecidas de velocidades

Conservação da Quantidade de Movimento Linear na forma integral

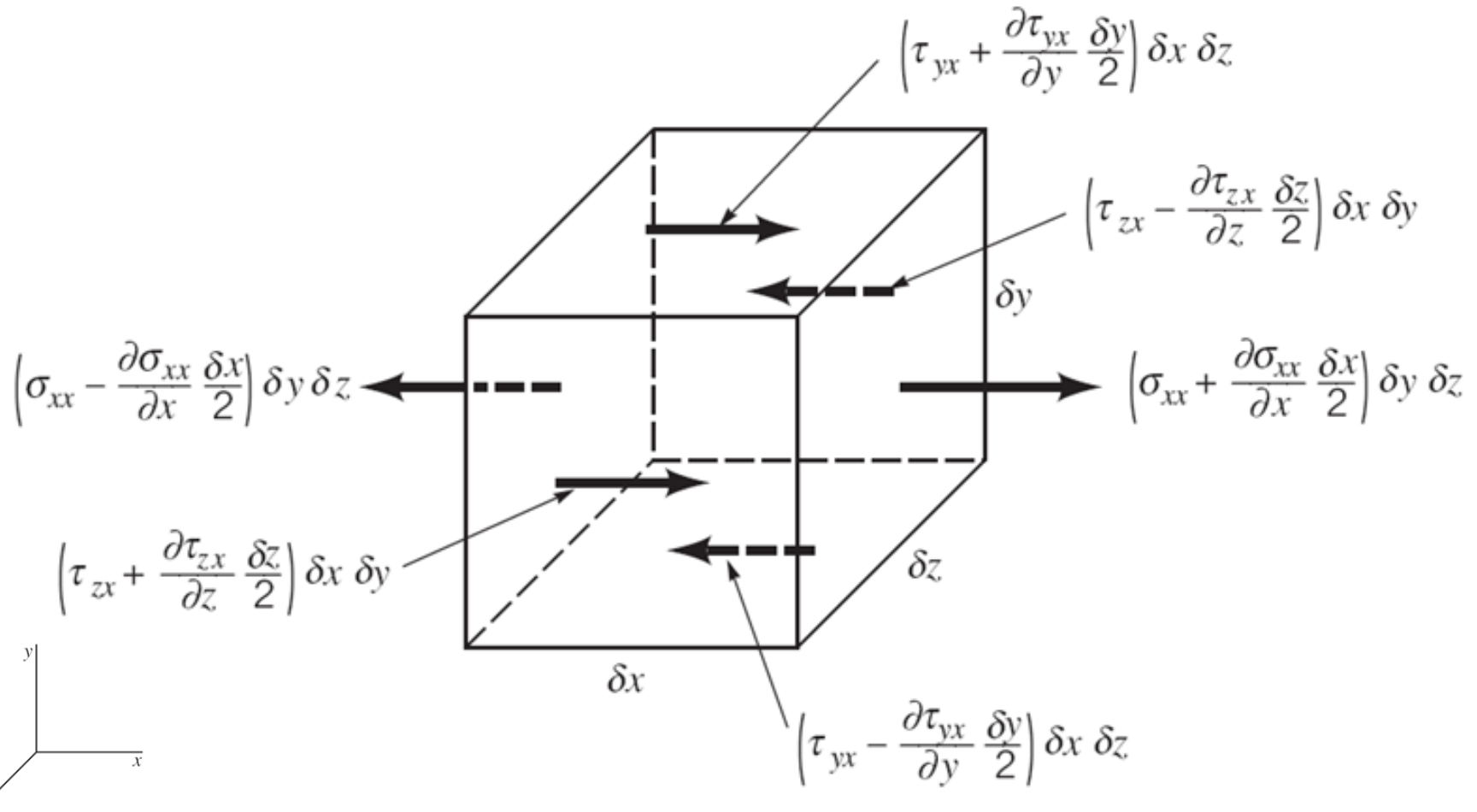
$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v}\rho dVC + \int_{SC} \vec{v}\rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dS$$

Distribuição de tensões em um elemento pequeno de fluido ($\delta_x, \delta_y, \delta_z$)

Notação subscrita dupla para tensões: o 1º é o plano e o 2º é a direção



Distribuição de tensões em um elemento de fluido $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$



Forças de superfície decorrentes de **tensões normais e tangenciais** atuando em elemento de fluido na **direção x**.
Forças de campo não aparecem na figura.

Equação do movimento

$$\delta F_x = \delta m a_x$$

$$\delta F_y = \delta m a_y$$

$$\delta F_z = \delta m a_z$$



$$\delta F_{cont\ x} + \delta F_{campo\ x} = \delta m a_x$$

$$\delta F_{cont\ y} + \delta F_{campo\ y} = \delta m a_y$$

$$\delta F_{cont\ z} + \delta F_{campo\ z} = \delta m a_z$$

e, como $\delta m = \rho \delta_x \delta_y \delta_z = \rho dV$

Forma-se o **conjunto I** de equações

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Incógnitas: tensões, velocidades e ρ

Importante

São aplicáveis a qualquer continuum (sólido ou fluido), em movimento ou parado

Para fluidos, estas equações diferenciais da QDM possuem muito mais incógnitas (todas as tensões, a velocidade e a massa específica) que equações.

1ª simplificação: escoamento invíscido

Se $\mu_{\text{água}}$ e μ_{ar} forem pequenos na equação anterior,
 $\mu_{\text{água}}$ e $\mu_{\text{ar}} \rightarrow 0$ e $\tau \rightarrow 0$

No curso já foi mostrado que as tensões normais independem da direção e são iguais a pressão:

$$-P = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$$

O sinal negativo foi adotado por convenção para que as tensões de compressão (que são as mais comuns nos fluidos) forneçam sinal + para a pressão

Do **conjunto I** de equações diferenciais da QDM para um fluido, com $\boldsymbol{\mu} \rightarrow \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\tau} \rightarrow \mathbf{0}$ geram-se as:

Equações de Euler do Movimento

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Válidas para
escoamento
sem
viscosidade

$$\rho \vec{g} - \nabla P = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right]$$

Deve ser entendido que até o século XIX havia uma profunda divisão no estudo e projeto de sistemas fluidos: o tratamento teórico proporcionado pela equação de Euler (sem a viscosidade) e o tratamento empírico, baseado em dados coletados em séculos de experimentação e tentativa e erro de projetos.

A situação foi atacada brilhantemente por Ludwig Prandtl em 1904 ao estabelecer o conceito de camada limite.

A situação era muito ruim sem se considerar a viscosidade, como se pode perceber pela excelente história de como Euler projetou as fontes do palácio Sans Souci, encomendadas pelo rei Frederico I:

Breve digressão: Palácio Sans souci (“sem preocupação”) em Potsdam





ONDE ESTÃO AS FONTES?



Frederico o grande, Rei da Prússia -1712-1786, encomendou as fontes para Euler.

Euler: um dos maiores matemáticos do mundo.



Frederico, o Grande:

“Minha planta foi projetada matematicamente, e não pode levantar uma única gota de água à distância de cinquenta pés do reservatório. Vaidade das vaidades! Vaidade da matemática”

Conclusão: faltou a viscosidade

Navier, em 1827 e Stokes, em 1842 desenvolveram um conjunto de equações, de forma independente ao que parece, que possibilitaram teoricamente resolver qualquer problema de escoamento. Entretanto, não conseguimos resolver estas equações analiticamente até hoje.



L.M.Navier
1758-1836



Sir G.G. Stokes
1819-1903

Como simplificar o conjunto I de equações:

Foi mostrado experimentalmente com um elevado grau de exatidão que **muitos fluidos podem ser considerados Newtonianos**, ou seja, as tensões são linearmente relacionadas às derivadas da velocidade ($\tau = \mu \partial v / \partial y$).

Adicionalmente a maior parte dos fluidos são **isotrópicos** (sem direções preferidas no espaço) e com isso as tensões normais ou de cisalhamento (σ e τ) não possuem direções preferenciais em relação à coordenada de posição, o que facilita a apresentação matemática pois a simetria evita muito trabalho braçal. (Ver Pierre Curie e conceitos de simetria)

Também assumimos que as diferenças de temperatura são pequenas, e por isso propriedades como massa específica e viscosidade não variam muito.

Isso nos permite ignorar a equação de conservação de energia e concentrar apenas nas equações da continuidade e do momento da quantidade de movimento.

Com esta informação podem-se introduzir informações novas referentes às tensões, que são difíceis de medir e, portanto, ruins para serem usadas em equacionamentos.

Felizmente existem algumas abordagens que relacionam as tensões normais à pressão e as tensões de cisalhamento a taxas de mudança de deformação, ou gradientes de velocidade.

O trabalho matemático está além dos objetivos do curso, mas nesse estágio podemos abordar de duas formas.

Para fluidos Newtonianos, Stokes mostrou em **1845** que:

$$\sigma_{xx} = \lambda \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

e

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

μ é a viscosidade dinâmica, nossa velha conhecida, e λ é o coeficiente de viscosidade total (**bulk viscosity**).

Stokes fez a hipótese de que $\lambda = \frac{2}{3}\mu$, que é frequentemente usada, mas **ainda não foi confirmada até hoje!**

Como se vê, o terreno é pantanoso: a equação mais abrangente de toda a mecânica dos fluidos está alicerçada em hipóteses que podem ser discutidas e criticadas, o que reflete nos níveis de incerteza dos cálculos realizados (por exemplo, no cálculo de tubulações, que parte de uma incerteza de 15%!)

Para fluidos newtonianos incompressíveis, é sabido após Stokes, que as tensões estão relacionadas linearmente com as taxas de deformação:

$$\sigma_{xx} + P = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} + P = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} + P = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

A utilização destas equações com as do **conjunto I** e as da continuidade resulta nas **Equações de Navier-Stokes** para escoamentos incompressíveis com viscosidade constante

Equações de Navier Stokes para escoamentos incompressíveis com viscosidade constante:

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

observe que sabendo o campo de velocidades se resolve o escoamento

Equações de Navier Stokes para escoamentos incompressíveis com viscosidade constante:

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Força gravitacional

força de pressão

termos viscosos
(taxa de entrada difusiva líquida da QDM)

termos de aceleração
(aceleração local + aceleração convectiva)

Forma condensada:

$$\vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P + \nu \nabla^2 \vec{v} = \vec{a}$$

Observações:

A pressão P aparece só como gradiente, ou seja, não é o valor da pressão que importa, mas sim as **diferenças de pressão**.

As 3 equações de N-S combinadas com a equação da conservação da massa, fornecem uma descrição matemática completa do escoamento incompressível de um fluido Newtoniano, porque temos 4 equações com 4 incógnitas (u, v, w e P). Em termos matemáticos estamos ok.

Infelizmente a complexidade (equações de derivadas parciais de 2ª ordem e não lineares) impede sua solução, exceto para casos bem simples.

A maior dificuldade: não linearidade dos termos das acelerações convectivas $(u \frac{\partial u}{\partial x}, w \frac{\partial v}{\partial z}, \text{ etc})$

A matéria da prova se encerra na apresentação e usos das equações de Navier-Stokes para resolver alguns poucos problemas simples, onde o escoamento seja laminar.

Os slides seguintes são apresentados apenas para dar uma visão geral da complexidade das equações de N-S.

Dificuldades imensas para resolver as equações diferenciais não lineares mas podem-se individualizar algumas soluções. Como os escoamentos turbulentos apresentam flutuações aleatórias, as soluções analíticas são impossíveis, mas podem-se resolver alguns casos de escoamentos laminares:

- 1) Escoamento de Hagen-Poiseuille, laminar em duto cilíndrico
- 2) Escoamento de Poiseuille, laminar entre duas placas paralelas infinitas
- 3) Escoamento de Couette, laminar, entre duas placas paralelas, sem gradiente de pressão causado por bombeamento, sendo o movimento causado unicamente pela placa superior movendo-se com velocidade V . Ou por eixo girando em mancal.
- 4) Escoamento de Couette, idem acima, mas com gradiente de pressão provocado por bombeamento.

É bom lembrar que cada componente da velocidade pode ser escrita em termos da soma da velocidade média mais a velocidade instantânea ($u = \bar{u} + u'$) o que complica extraordinariamente a equação. Após esta substituição e simplificações importantes, restam as equações de N-S médias no tempo (isto não é assunto do curso):

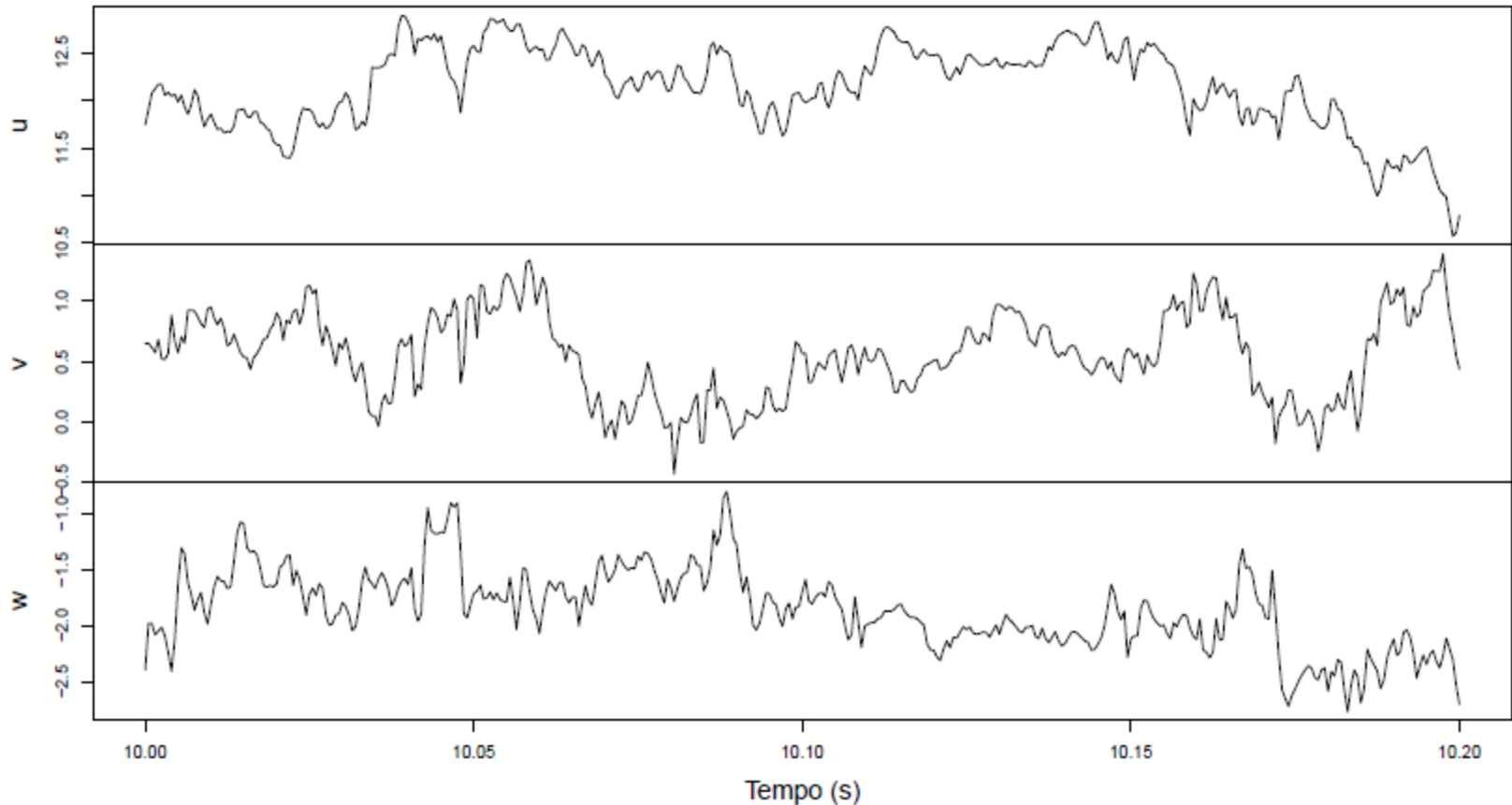
$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = F_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = F_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \Delta \bar{w} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right)$$

A última parcela à direita representa os tensores de Reynolds, e são geralmente a parte dominante da tensão total de cisalhamento (observe que μ ainda permanece)

Componentes de velocidade (m/s)



Os gráficos acima mostram a complexidade do sinal da velocidade em um ponto de um escoamento qualquer. São mostradas as três componentes da velocidade, U, V e W. Observe que U está ao redor de 12m/s, enquanto V está ao redor de 0,5 m/s e W de -1,5m/s.

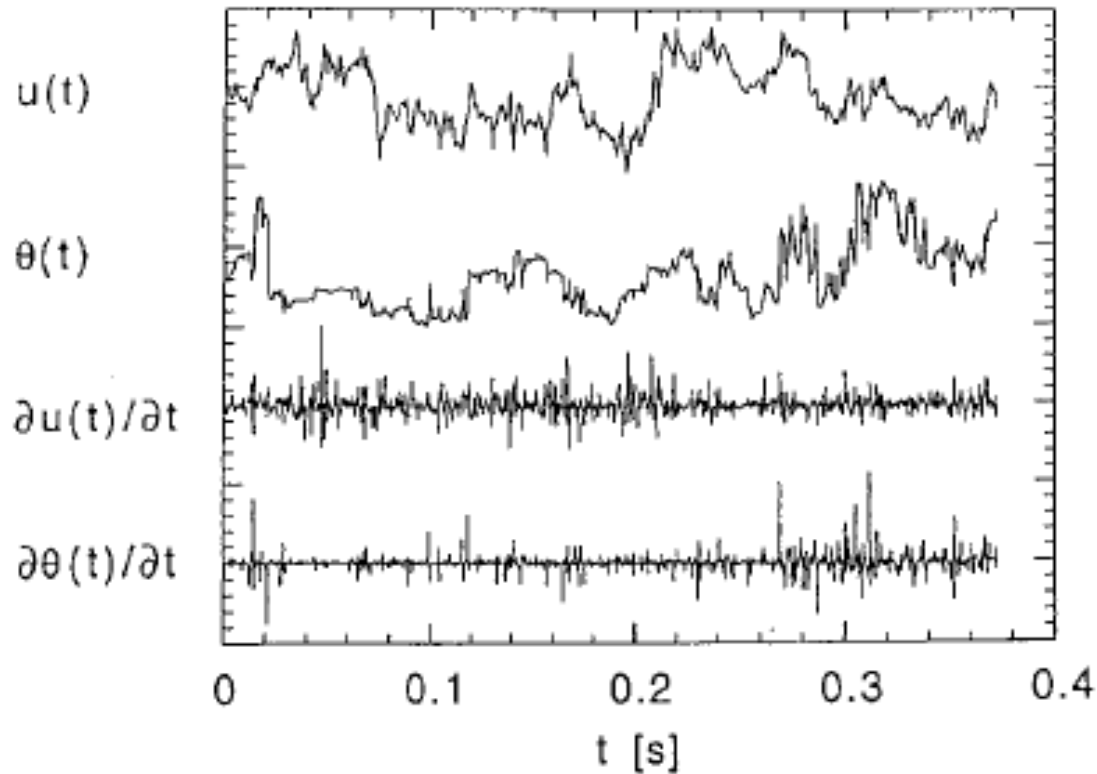


Fig. 5. Time series of the longitudinal velocity fluctuations, $u(t)$, and their derivative, $\partial u(t)/\partial t$. Also shown is the time series of scalar fluctuations, $\theta(t)$, and their derivative, $\partial \theta(t)/\partial t$, in the same flow. Notice the higher intermittency in the scalar (bottom trace). $R_\lambda = 582$. Measurements by L. Mydlarski and Z.W.

O gráfico acima mostra as flutuações nos valores de velocidade e temperatura em um escoamento. Observe a forma do gráfico da velocidade (pode ser considerado Gaussiano) e compare com o gráfico da aceleração (fortemente não Gaussiano). Isto tem a ver com dissipação de energia, de forma intermitente como mostrado no gráfico da aceleração.

Recordação

- Operador Nabla:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

- Operador Laplaceano:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Gradiente:

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

Recordação

- Vetor Gradiente:

$$\nabla \mathbf{u} = (\nabla u, \nabla v, \nabla w)$$

- Divergente:

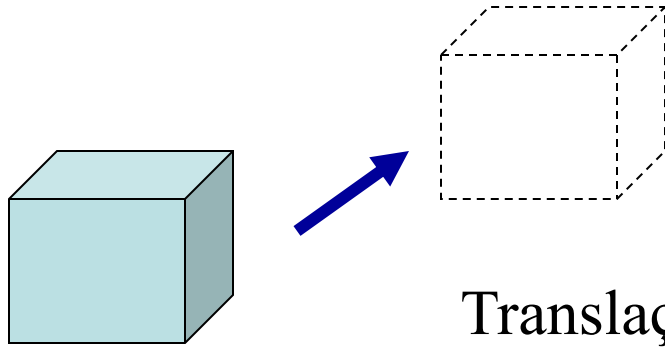
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

- Derivada Direcional:

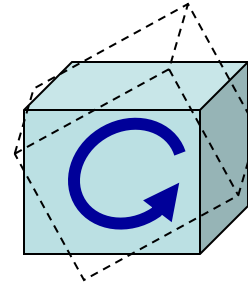
$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Recordação

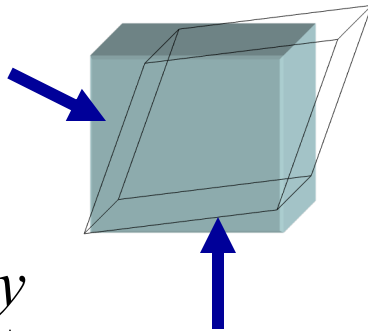
❖ Movimentos de um Elemento Fluido



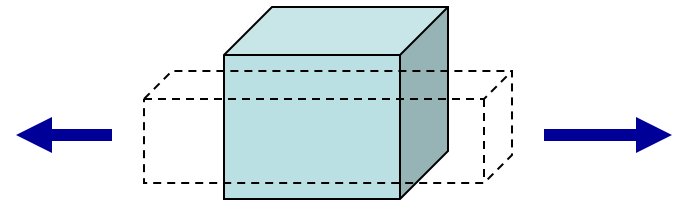
Translação



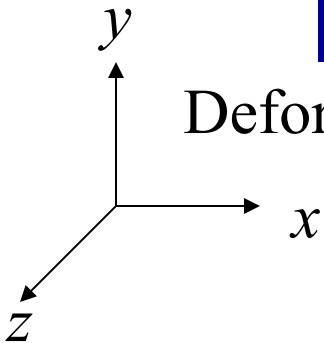
Rotação



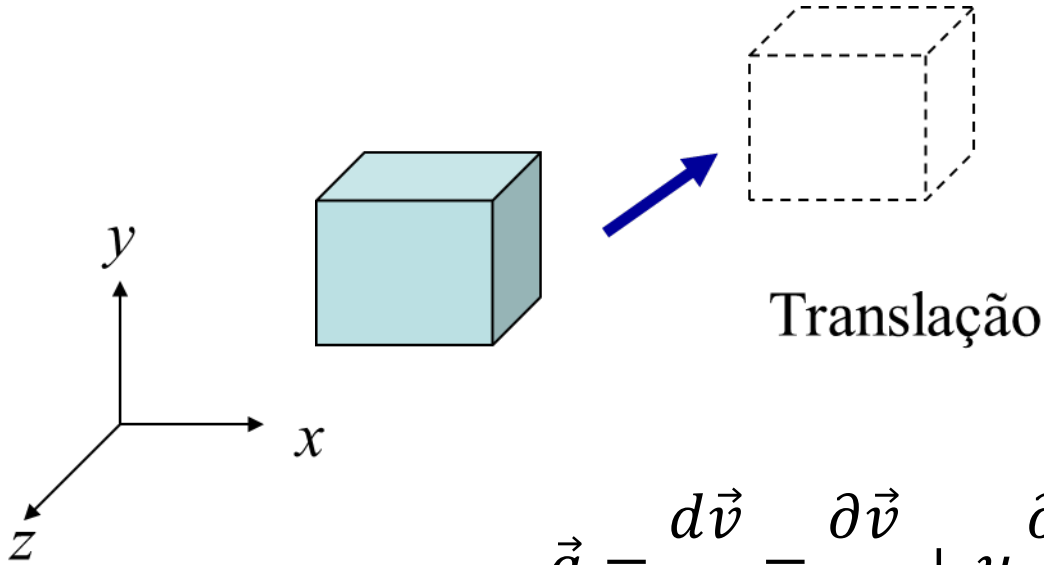
Deformação Angular



Deformação linear



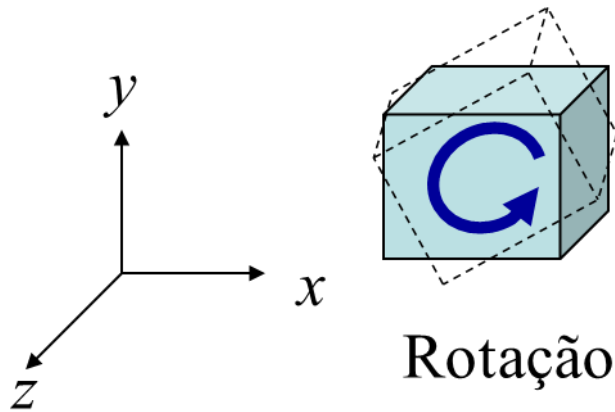
Recordação



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

ou

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$



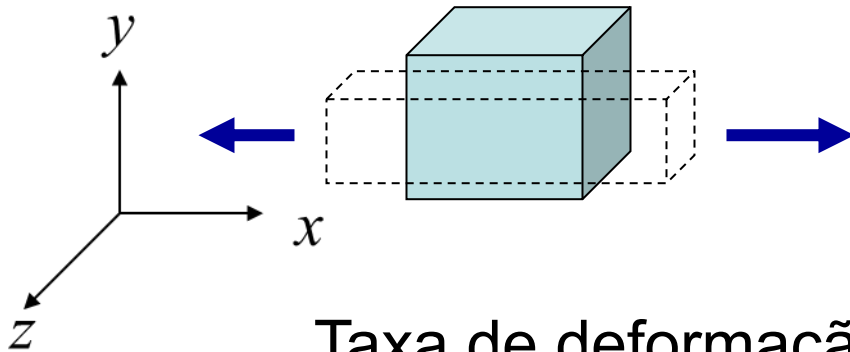
Velocidade angular $\vec{\omega}$ (ou vetor turbilhão)

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}\end{aligned}$$

Se $\omega = 0$, o fluido é irrotacional.

Define-se ainda o vetor vorticidade como $\xi = \text{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$. A vorticidade é uma medida da rotação do elemento fluido

Recordação



Deformação linear

Taxa de deformação normal na direção x

$$\epsilon_{xx} = \frac{\left[u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} - \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right]}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

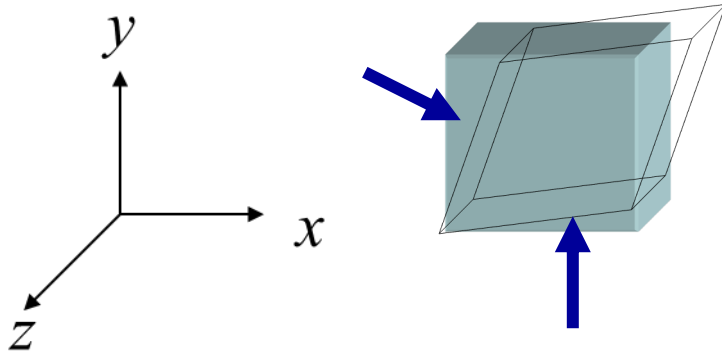
deformação volumétrica $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

Representa a taxa de variação de volume por unidade de volume

O divergente mostra se o fluido é incompressível: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Recordação

Deformação Angular



Tensor taxa de deformação: componente ε_{xy} no plano xy

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Recordação

Teorema da Divergência ou de Gauss: permite transformar uma integral de volume da divergência de um vetor em uma integral de área sobre a superfície que define o volume.

$$\int_{VC} \nabla \cdot \vec{G} d\forall = \int_A \vec{G} \cdot \vec{n} dA$$

onde $\forall = VC$

Ex) Determinar a componente V_y da velocidade, para o escoamento de um fluido incompressível, com o campo de velocidade dado por: (5)

$$V_x = x^2 - yz \quad (\text{esc. bidimensional})$$

Solução - Para ser incompressível, $\text{div} \vec{V} = 0$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$2x + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial y} = -2x \Rightarrow \int dV_y = -\int 2x dy$$

$$\therefore V_y = -2xy + C$$

2) - Dado o campo de velocidade:

$$V_x = x^2 y$$

$$V_y = x + y + z$$

$$V_z = x^2 + z^2, \text{ Este}$$

escoamento caracteriza o movimento de um fluido incompressível?

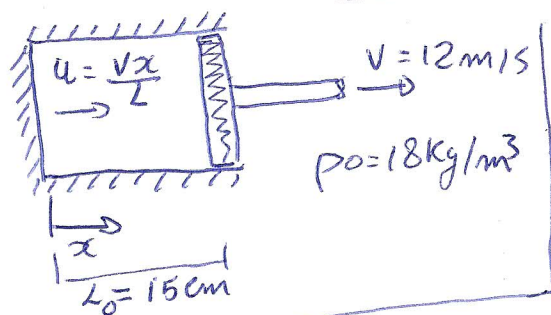
Solução:

$$\text{div} \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$2xy + 1 + 2z \neq 0$$

Não é identicamente nulo em todos os pontos e portanto o campo de velocidades não caracteriza um esc. de fluido incompressível.

Ex 5.2 - Fox - Conjunto Pistão-cilindro, determinar: a) taxa de variação de ρ e b) $\rho(t)$



Eq. barica Continuidade ~~forma diferencial~~

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = 0$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

e, como $u = u(x)$, e as outras derivadas parciais convectivas são nulas:

Regra da cadeia \rightarrow pois ρ pode ser considerada uniforme no VC considerado e ρ_0

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} = - \rho \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \rho \frac{\partial u}{\partial x}} \quad \textcircled{I}$$

Como $u = \frac{v x}{L} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{L}$, que, substituindo em \textcircled{I} , resulta:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \rho \frac{v}{L}}$$

resposta a) e ~~como~~ $\rho = \rho(t)$ apenas \Rightarrow

~~...~~ $\frac{d\rho}{dt} = - \rho \frac{v}{L}$ e como $L = L_0 + vt$ e separando variáveis:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = - \int_0^t \frac{v dt}{L_0 + vt} \quad \text{Substituindo variáveis}$$

Como $L = L_0 + vt \Rightarrow \frac{dL}{dt} = v \Rightarrow dL = v dt$ e os limites de integração:

$$t=0 \Rightarrow L=L_0 \quad \text{e} \quad t=t \Rightarrow L=L_0 + vt \Rightarrow$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = - \int_{L_0}^{L_0+vt} \frac{dL}{L} \Rightarrow \ln \frac{\rho}{\rho_0} = - \ln \frac{L_0 + vt}{L_0} = \ln \frac{L_0}{L_0 + vt}$$

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{L_0}{L_0 + vt} \right) \quad \textcircled{b}$$

Em $t=0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = - \rho_0 \frac{v}{L_0} = - 18 \times \frac{12}{0,15} = - 1440 \text{ kg/m}^3/\text{s}$