PTC 5720 - Controle Estocástico - 1ª Lista
Revisão de Probabilidade

1ª Questão: Seja $X_1, X_2, \ldots$, uma sequência de V.A.'s contínuas, independentes e identicamente distribuídas. Diremos que um recorde ocorreu no instante n se $X_n > max\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$, $n = 2, 3, \ldots$. Para $n = 2, 3, \ldots$, defina os eventos A_n ={um recorde ocorreu no instante n} e a V.A. Y_n = número de recordes até o instante n. Calcule $P(A_n)$ e $E(Y_n)$.

2ª Questão: Considere um grupo de n homens cada um com o seu chapéu. Os chapéus são misturados e cada homem escolhe um de forma aleatória. Qual é a probabilidade de que nenhum homem escolha o seu próprio chapéu? Determine o limite quando $n \to \infty$.

3ª Questão: Considere um jogo com dois jogadores A e B. Jogador A arremessa uma moeda com probabilidade p_A de dar cara. Se sair cara, ganha o jogo. Caso contrário passa a vez para o jogador B que arremessa uma outra moeda, cuja a probabilidade de dar cara é p_B. Caso contrário passa a vez para o jogador A que re-inicia todo o processo. Determine:

a) as probabilidades dos jogadores ganharem o jogo, em função de p_A e p_B.

b) para $p_A = \frac{1}{3}$, determine p_B para que o jogo seja justo.

c) para $p_A = \frac{1}{3}$ e p_B como no item b), determine o valor esperado do número de rodadas até o jogo acabar.

4ª Questão: Qual é a confiabilidade do sistema abaixo adotando que todos os elementos funcionam de forma independente com probabilidade igual a $p = 0.9$?

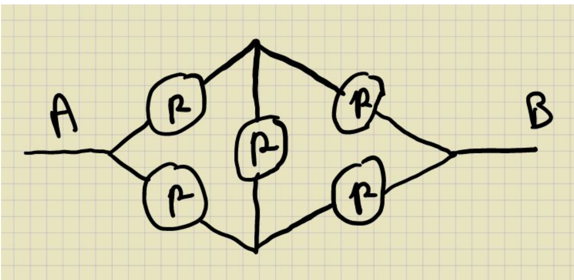

Figura 1: Sistema

5ª Questão: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $(0, 3)$ e $(0, 5)$ respectivamente.

a) Determine a função densidade de probabilidade $f_Z(z)$ de $Z = \min\{X, Y\}$.

b) Determine a função densidade de probabilidade $f_Z(z)$ de $Z = X + Y$.

6ª Questão: Sejam X e Y variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c\,exp\{-(x + y)\} & \text{para } 0 < x < y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine c.

b) Determine as funções densidade de probabilidade marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

c) Calcule $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ e $Cov(X, Y)$.

d) Determine $E(X|Y = y)$.

7ª Questão: Sejam X_1 e X_2 V.A.'s com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}}\ exp\left(- \frac{1}{2(1-\rho^2)}\ \left((\frac{x_1}{\sigma_1})^2\ - 2\rho\frac{x_1 x_2}{\sigma_1\sigma_2} +\ (\frac{x_2}{\sigma_2})^2 \right) \right)$$

onde ρ, σ_1, σ_2 são constantes satisfazendo a $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ e $-1 < \rho < 1$. Determine :

a) as funções densidade de probabilidade $f_{X_1}(x_1)$ e $f_{X_2}(x_2)$, e para que valores de ρ teremos X_1 e X_2 independentes.

b) Para ρ como no item a) (X_1 e X_2 independentes), determine a função densidade de probabilidade $f_M(m)$ quando $M = \frac{X_1}{X_2}$.

c) $E(X_1 \mid X_2)$ e $Var(X_1 \mid X_2)$.

d) uma transformação linear do tipo $Y = AX$ onde $Y' = (Y_1, Y_2)'$, $X' = (X_1, X_2)'$, de forma que Y_1 e Y_2 sejam independentes para o caso em que $\sigma_1 = \sqrt{3}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$ e $\rho = 1/\sqrt{3}$. Obtenha $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ e $f_{Y_1}(y_1)$, $f_{Y_2}(y_2)$ para este caso.

e) a função densidade de probabilidade conjunta $f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2)$ quando $Z_1 = X_1 + X_2$, $Z_2 = X_1 - X_2$, e $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0$. As variáveis Z_1 e Z_2 são independentes?

8ª Questão: Considere um jogo em que o jogador, a cada partida, perde 1 real com probabilidade $\frac{2}{3}$, e ganha 2 reais com probabilidade $\frac{1}{3}$. Suponha que o jogador comece com 2 reais, e que ele pára de jogar se quebrar ou atingir pelo menos 4 reais.

a) Escreva o diagrama de Markov e determine a matriz de transição da cadeia de Markov.

b) Qual é a probabilidade do jogador sair vencedor (ou seja, a fortuna do jogador atingir 4 reais ou mais)?

c) Qual é o valor esperado do número de jogadas até o jogo terminar (com o jogador ganhando ou perdendo)?

9ª Questão: Uma companhia de seguros recebe pedidos semanais de pagamentos de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 8$ por semana. O custo de cada acidente possui distribuição exponencial com média R\$ 1.600,00. O seguro paga o que exceder R\$ 800,00 (franquia). Determine:

1) O valor esperado e o desvio padrão da quantia paga pela seguradora em cada acidente.

2) O valor esperado e o desvio padrão da quantia paga pela seguradora em 4 semanas?

10ª Questão:: Suponha que ofertas de compra de uma casa ocorram de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 2$ por mês. Suponha que o valor de cada oferta seja uma variável aleatória com distribuição uniforme entre R\$ 200.000,00 e R\$ 300.000,00. Uma vez que a oferta é apresentada, deve-se aceitá-la ou rejeitá-la e esperar pela próxima oferta. Incorre-se em um custo a uma taxa $c =$ R\$ $5.000,00$ por mês, até que a casa seja vendida. Suponha que se vai aceitar a primeira oferta maior que y.

a) Qual deve ser o valor de y de modo a maximizar o lucro esperado (isto é, o valor da oferta menos o custo total incorrido)?

b) Qual é o valor do lucro esperado para y obtido no item a)?