PTC 5720 - Controle Estocástico - 2ª Lista
Sistemas Lineares e Filtragem

1ª Questão: Um sistema dinâmico é descrito pela equação a diferenças

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} cos(h) & sen(h) \\ -sen(h) & cos(h) \end{pmatrix} x(k)$$

onde $h = \pi/4n$. O estado inicial $x(0)$ é normal com média e covariância dadas por

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ cov(x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine o menor valor de k^* tal que as componentes $x_1(k^*)$ e $x_2(k^*)$ sejam independentes. Determine também a distribuição de $x(k^*)$ neste caso.

2ª Questão: Um sistema dinâmico é governado pela equação estocástica a diferenças

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 \\ -0.7 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix} e(k)$$

onde $\{e(k); k \geq 0\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias $N(0,1)$ independentes. Determine a matriz de covariância do processo $x(k)$ em regime permanente.

3ª Questão: Considere o o modelo ARMA

$$x(k) + ax(k-1) = e(k) + ce(k-1),\ |a| < 1.$$

onde $e(k)$, $k = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média nula e variância 1. Determine a função covariância $r(k,j)$. O processo $x(k)$ é estacionário no sentido amplo?

4ª Questão: Seja X uma variável aleatória não observável com média $E(X) = 2$ e variância $var(X) = 1$, e observações

$$Y_1 = X + Z_1$$
$$Y_2 = X + Z_2$$

onde Z_1, Z_2 são variáveis aleatórias descorrelatadas com média nula e variância unitária. Entretanto cada Z_i é correlacionado com X, com $E(Z_1 X) = E(Z_2 X) = 1/4$. Qual é o melhor estimador afim (linear + constante) de X dados Y_1 e Y_2?

5ª Questão: Um vetor aleatório $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ tem média nula e matriz covariância

$$Q = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 6 \\ -2 & 17 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Efetue uma fatorização triangular superior de Q ($Q = UU'$ onde U é triangular superior) e mostre que Y pode ser expressa na forma $Y = UZ$ onde $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)'$ é um vetor de variáveis aleatórias descorrelatadas e normalizadas. Calcule U.

b) Use esta representação para calcular $\widehat{Y}_{1|2,3}$, o melhor estimador linear de Y_1 dado (Y_2, Y_3).

c) Mostre no item anterior que a condição de ortogonalidade é realmente satisfeita.

6ª Questão: Suponha que $X, Z_1, Z_2 \ldots$ sejam variáveis aleatórias independentes de média nula com $E(X^2) = \sigma^2$, $E(Z_k^2) = a^2$,e $Y_k = X + Z_k$. Obtenha uma fôrmula recursiva para $\widehat{X}_{k-1}$ (o melhor estimador linear de X dados $Y_1, \ldots Y_{k-1}$). Mostre que

$$P_k = \frac{1}{\frac{k}{a^2} + \frac{1}{\sigma^2}}\ ,\ P_k = E((X - \widehat{X}_k)^2).$$

7ª Questão: Considere $\{X, Z_k\}$como no exercício anterior e $X_{k+1} = X_k + W_k$, $X_0 = X$, $Y_k = X_k + Z_k$ onde $\{W_k\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média nula e variância q^2, independentes de $\{X, Z_k\}$. Seja $\widehat{X}_{k|k-1}$ o melhor estimador linear de X_k dados $Y_0, \ldots Y_{k-1}$ e $P_k = E(X_k - \widehat{X}_{k|k-1})^2$. Mostre que a equação recursiva para $\widehat{X}_{k|k-1}$ obtida no exercício 6 ainda é válida para este problema com a diferença que P_k agora é dado por

$$P_k = \frac{a^2 P_{k-1}}{a^2 + P_{k-1}} + q^2, \; P_0 = \sigma^2.$$

8ª Questão: Considere o problema de filtragem

$$X_{k+1} = \frac{1}{2} X_k + V_k$$

$$Y_k = X_k + \sigma W_k$$

onde $\{V_k\}$ e $\{W_k\}$ são processos de ruído branco com média nula, variância unitária, e $E(V_k W_k) = \rho$. Calcule p^*, a covariância da estimativa do erro em regime permanente. Faça um gráfico de: a) p^* em função de σ com $\rho = 0$, e b) p^* em função de ρ com $\sigma = 1$. Comente os seus resultados.

9ª Questão: Seja $\{x_k; k = 0, 1, \ldots\}$ um processo escalar ARMA

$$x_k + 0.25 x_{k-1} - 0.375 x_{k-2} = \xi_k$$

onde $\{\xi_k; k = 0, 1, \ldots\}$ é um processo de ruído branco com variância unitária. Observamos $\{y_k; k = 0, 1, \ldots\}$ dado por

$$y_k = x_k + w_k$$

onde $\{w_k; k = 0, 1, \ldots\}$ é um processo de ruído branco com variância unitária descorrelatado de $\{\xi_k; k = 0, 1, \ldots\}$. Formule o filtro de Kalman para estimar x_k dados $y_0, \ldots, y_{k-1}$. Qual é o ganho do filtro em regime permanente e a correspondente matriz de covariância do erro?

10ª Questão: Seja $\{x(t); t \geq 0\}$ a posição de um corpo efetuando o movimento de um oscilador harmônico simples

$$\frac{d^2 x(t)}{dt} + x(t) = 0.$$

Suponha que a posição inicial x_0 e a velocidade inicial $\dot{x}_0$ sejam variáveis aleatórias descorrelacionadas, cada uma tendo média 0 e covariância 1. Observações ruidosas de $x(t)$ são feitas nos instantes $t_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ fornecendo

$$y(t_k) = x(t_k) + w_k$$

onde $\{w_k; k = 0, 1, \ldots\}$ é um processo de ruído branco com variância unitária, descorrelacionado de x_0 e $\dot{x}_0$.

a) Formule o problema de estimar $x(t_k)$ dadas as observações $\{y(t_0), \ldots, y(t_{k-1})\}$ como um problema de filtro de Kalman a tempo discreto.

b) Mostre que o sistema do item a) é observável se e somente se $h \neq n\pi$, $n = 0, 1, \ldots$. O que isto implica em termos assintóticos da covariância do erro?

c) Suponha que $h = n\pi$ e seja $P(k)$ a matriz 2×2: $P(k) = Cov(Z - \hat{Z}(k))$ onde $Z = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}$, e $\hat{Z}(k)$ o melhor estimador linear de Z dados $\{y(t_0), \ldots, y(t_{k-1})\}$. Mostre que

$$P(k) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ quando } k \to \infty$$

e explique este resultado fisicamente.

Dica: Escreva a equação de Riccati em forma recursiva para $P^{-1}(k)$ usando a seguinte fórmula válida para matrizes A e R não singulares:

$$(A + BRC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (R^{-1} + C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1}.$$