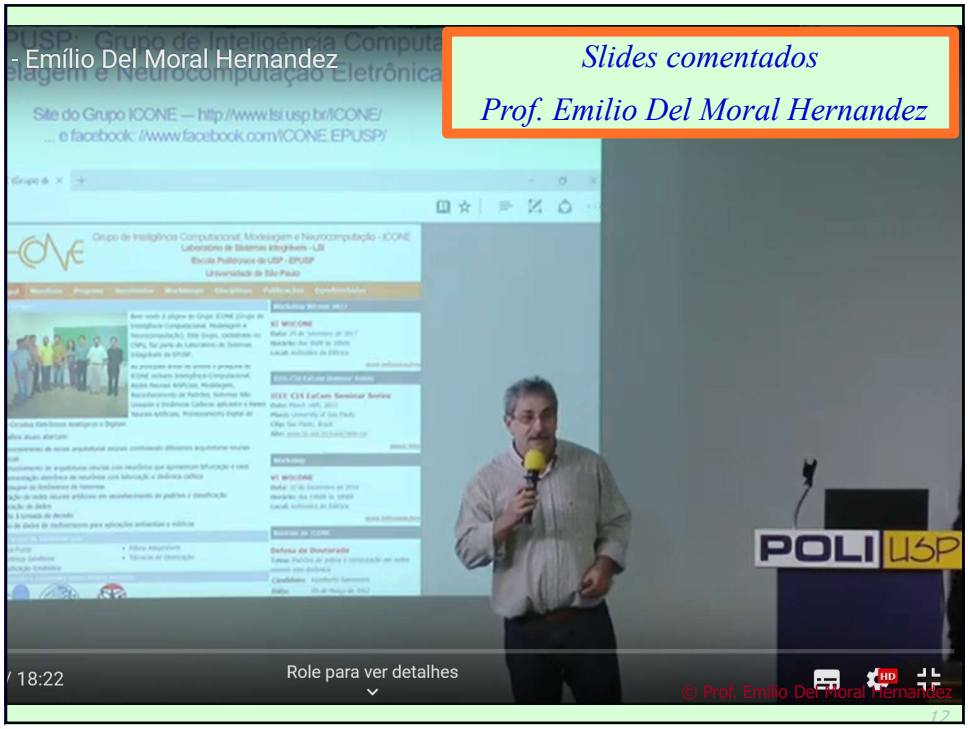
1

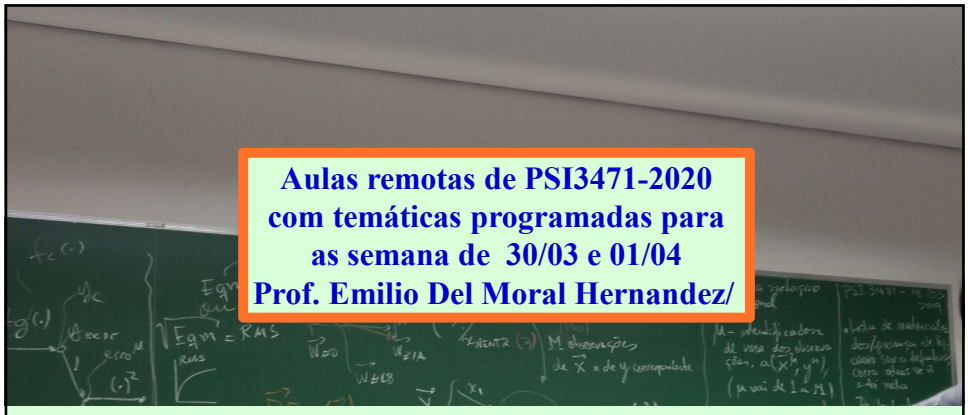
Temas programados para a 5ª semana c/ Prof. Emilio

#9 (30/março – 2ªf) Foco da semana: Regressores - Casos simples de aproximação de funções univariadas. Teorema de Cybenko: o MLP como aproximador universal de funções multivariadas; implicações práticas do teorema para a implementação de regressores e reconhecedores de padrões não lineares multivariados genéricos.
#10 (01/abril – 4ªf) ... Medidas de qualidade diversas para regressores multivariados (distintas do erro quadrático médio); Flutuação do desempenho do modelo com as particulares amostras de treino e de teste e técnicas de reamostragem; técnica de validação cruzada, k-fold cross validation e leave one out. Sobreajuste / sobreaprendizado / perda de generalização em regressão polinomial e em redes neurais; limitação do número de nós neurais para evitar o sobreajuste e otimizar a generalização da rede neural; partição do volume de observações em conjuntos de treino, validação e teste.
06 e 08 de abril: Semana Santa – não há aula

2



12



Temas da quinta semana c/ Prof Emilio

#9 (30/março – 2ªf) Foco da semana: Regressores - Casos simples de aproximação de funções univariadas. Teorema de Cybenko: o MLP como aproximador universal de funções multivariadas; implicações práticas do teorema para a implementação de regressores e reconhecedores de padrões não lineares multivariados genéricos.
#10 (01/abril – 4ªf) ... Medidas de qualidade diversas para regressores multivariados (distintas do erro quadrático médio); Flutuação do desempenho do modelo com as particulares amostras de treino e de teste e técnicas de reamostragem; técnica de validação cruzada, k-fold cross validation e leave one out. Sobreajuste / sobreaprendizado / perda de generalização em regressão polinomial e em redes neurais; limitação do número de nós neurais para evitar o sobreajuste e otimizar a generalização da rede neural; partição do volume de observações em conjuntos de treino, validação e teste.
06 e 08 de abril: Semana Santa – não há aula

... nestes slides: primeira destas 2 aulas (#9 -30/03)

13

Temas da quinta semana c/ Prof. Emilio

Nesta 2ª feira dia 30-03-2020, abordaremos ...

#9 (30/março – 2ªf) Foco da semana: Regressores - Casos simples de aproximação de funções univariadas. Teorema de Cybenko: o MLP como aproximador universal de funções multivariadas; implicações práticas do teorema para a implementação de regressores e reconhecedores de padrões não lineares multivariados genéricos.
#10 (01/abril – 4ªf) ... Medidas de qualidade diversas para regressores multivariados (distintas do erro quadrático médio); Flutuação do desempenho do modelo com as particulares amostras de treino e de teste e técnicas de reamostragem; técnica de validação cruzada, k-fold cross validation e leave one out. Sobreajuste / sobreaprendizado / perda de generalização em regressão polinomial e em redes neurais; limitação do número de nós neurais para evitar o sobreajuste e otimizar a generalização da rede neural; partição do volume de observações em conjuntos de treino, validação e teste.
06 e 08 de abril: Semana Santa – não há aula

14

14

O foco agora:

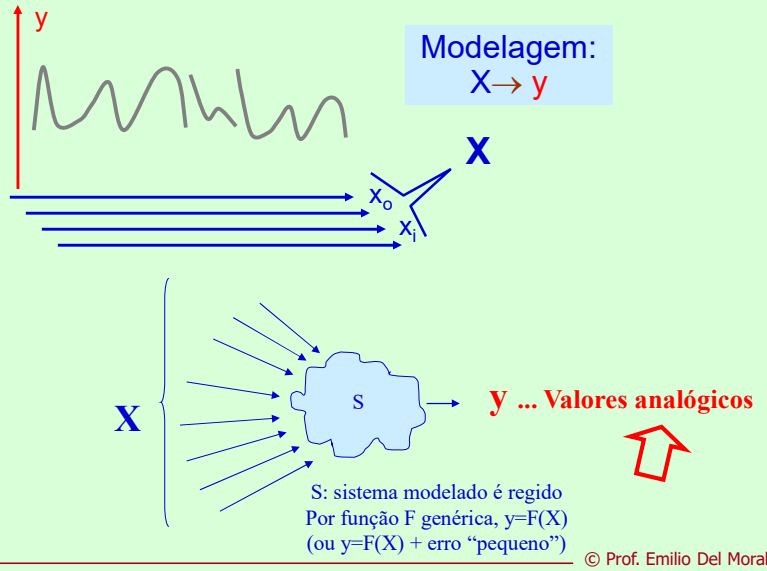
Regressores

y(X) é analógico!

(y não é binário, nem inteiro, nem categórico)

15

função com valores analógicos y(X) ....



S: sistema modelado é regido
Por função F genérica, y=F(X)
(ou y=F(X) + erro "pequeno")

16

16

Medidas de qualidade para regressores

17

Medindo qualidade de regressores ...

$RMS_{treino/teste}$ é uma possibilidade para refletir a distância média entre o modelo e dados empíricos ... E é já calculado facilmente em bibliotecas que operam otimização de parâmetros de modelo com base na minimização do Eqm sobre os dados empíricos

(note que o RMS = raiz quadrada do Eqm)

Além dessa comodidade, pode ser interpretado como o desvio padrão dos erros, ou seja tem um significado estatístico

PORÉM ... o RMS não é a única medida de qualidade para regressores e em geral **NÃO é medida mais adequada para o usuário final do modelo!**

18

18

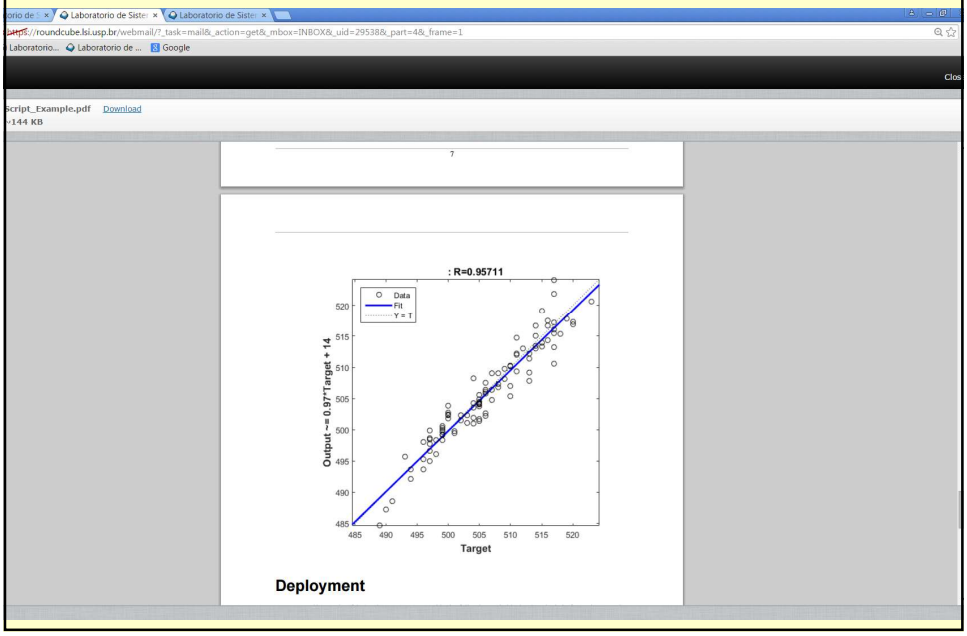
Algumas potenciais medidas de qualidade em regressores (cada aplicação pode preferir umas ou outras ...)

- ~~Eqm e RMS~~
- Módulo Médio do Erro
- Máximo Módulo do Erro
- Média dos Erros Positivos
- Máximo Módulo dos Erros Positivos
- Média dos Erros Negativos
- Máximo Módulo dos Erros Negativos
- Esses todos derivados dos erros acima, mas em suas versões normalizadas, com relação ao módulo de y
- Estes todos acima, mas sujeitos a conhecimento de X (local) – qualidade dependente do valor do argumento X da regressão
- Histograma de erros (ou seja, a "densidade de probabilidade de erros empírica")
- Faixa de valores de erros que se enquadram num certo número de "deciles" – ou terciles, ou quartiles, etc etc – da distribuição de erros (seja sobre a distribuição o erro com sinal + -, ou seja sobre o erro em módulo)
- Combinações específicas de vários acima ... Como bem percebido por colegas em sala, várias combinações fazem muito sentido, como informação de caracterização mais completa ao cliente / usuário do regressor!

11

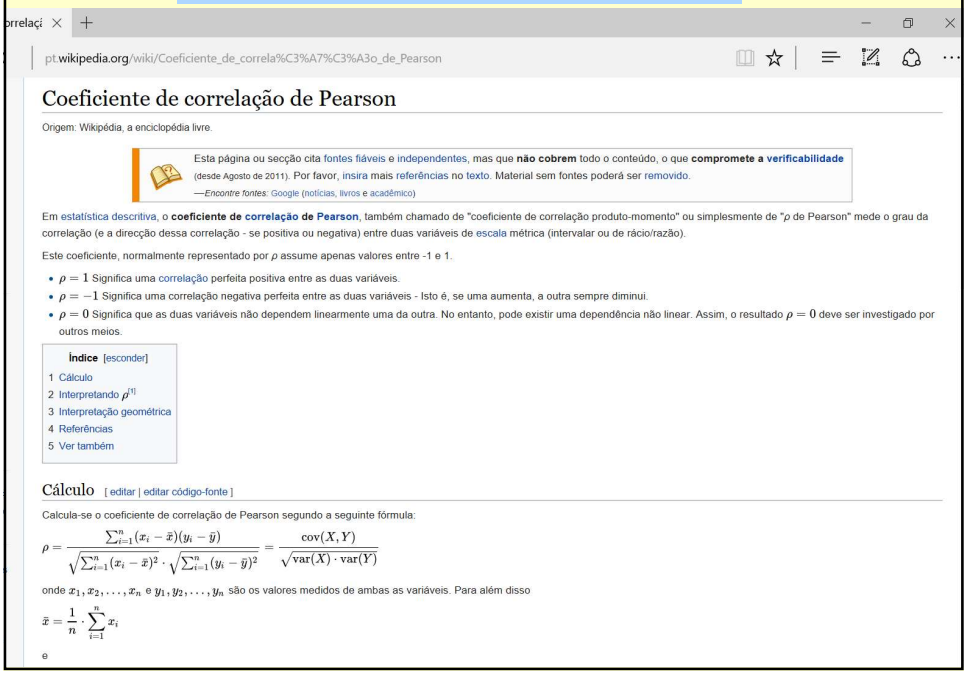
19

Medindo qualidade de regressores ... Plots y corretos versus y estimados + valor de “R” é outra possibilidade



20

Coeficiente de correlação de Pearson ...



pt.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_correla%C3%A7%C3%A3o_de_Pearson

Coeficiente de correlação de Pearson

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Esta página ou secção cita fontes fiáveis e independentes, mas que **não cobrem** todo o conteúdo, o que **compromete a verificabilidade** (desde Agosto de 2011). Por favor, insira mais referências no texto. Material sem fontes poderá ser removido.
—Encontre fontes: Google (notícias, livros e acadêmico)

Em estatística descritiva, o **coeficiente de correlação de Pearson**, também chamado de "coeficiente de correlação produto-momento" ou simplesmente de "ρ de Pearson" mede o grau da correlação (e a direcção dessa correlação - se positiva ou negativa) entre duas variáveis de escala métrica (intervalar ou de rácio/razão).

Este coeficiente, normalmente representado por ρ assume apenas valores entre -1 e 1.

- $\rho = 1$ Significa uma correlação perfeita positiva entre as duas variáveis.
- $\rho = -1$ Significa uma correlação negativa perfeita entre as duas variáveis - Isto é, se uma aumenta, a outra sempre diminui.
- $\rho = 0$ Significa que as duas variáveis não dependem linearmente uma da outra. No entanto, pode existir uma dependência não linear. Assim, o resultado $\rho = 0$ deve ser investigado por outros meios.

Índice [esconder]
1 Cálculo
2 Interpretando ρ[1]
3 Interpretação geométrica
4 Referências
5 Ver também

Cálculo [editar | editar código-fonte]

Calcula-se o coeficiente de correlação de Pearson segundo a seguinte fórmula:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X) \cdot \operatorname{var}(Y)}}$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são os valores medidos de ambas as variáveis. Para além disso

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

e

21

2 Interpretando ρ
3 Interpretação geométrica
4 Referências
5 Ver também

Cálculo [editar | editar código-fonte]

Calcula-se o coeficiente de correlação de Pearson segundo a seguinte fórmula:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X) \cdot \operatorname{var}(Y)}}$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são os valores medidos de ambas as variáveis

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

e

Coeficiente de correlação de Pearson ...

22

22

Pergunta: O Eqm (ou RMS) indica a qualidade do modelo? *Onde usar Eqm ou onde não?*

Algumas potenciais medidas de qualidade em regressores (cada aplicação pode preferir umas ou outras ...)

- Eqm e RMS
- Módulo Médio do Erro
- Máximo Módulo do Erro
- Média dos Erros Positivos
- Máximo Módulo dos Erros Positivos
- Média dos Erros Negativos
- Máximo Módulo dos Erros Negativos
- Esses todos derivados dos erros acima, mas em suas versões normalizadas, com relação ao módulo de y
- Estes todos acima, mas sujeitos a conhecimento de X (local) – qualidade dependente do valor do argumento X da regressão
- Histograma de erros (ou seja, a "densidade de probabilidade de erros empírica")
- Faixa de valores de erros que se enquadram num certo número de "deciles" – ou terciles, ou quartiles, etc etc – da distribuição de erros (seja sobre a distribuição o erro com sinal + -, ou seja sobre o erro em módulo)
- Combinações específicas de vários acima ... Como bem percebido por colegas em sala, várias combinações fazem muito sentido, como informação de caracterização mais completa ao cliente / usuário do regressor!

11

PSI2672 – Reconhec. de Padrões, Modelagem e Redes Neurais – Prof. Emilio Del Moral Hernandez – © 2015

rnandez

23

Aproximação univariada

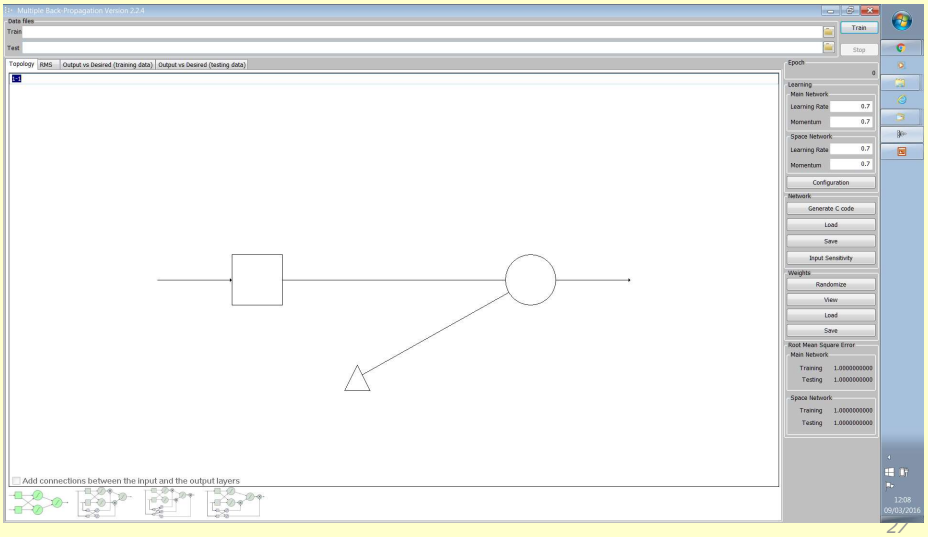
24

... Um parênteses para discutirmos um pouco a aproximação universal usando tangentes hiperbólicas, sigmoides, etc ... (funções em formato de "S")

*Abordemos o caso simples e bem particular de função escalar **univariada**, ou seja, pensemos sobre a aproximação de uma função de uma única variável x_1: $y(x_1)$*

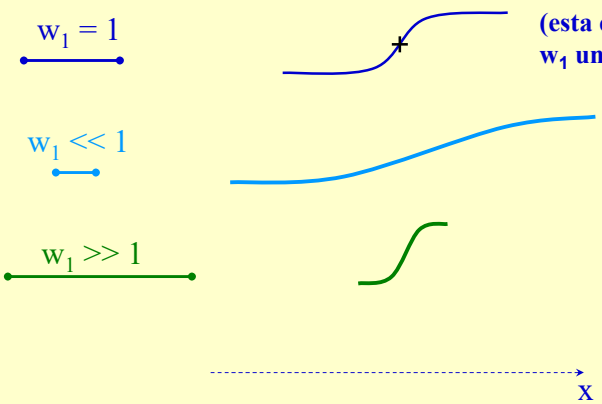
25

O que conseguimos fazer com um único neurônio sigmoidal, no caso de regressões (“y contínuo”)?



27

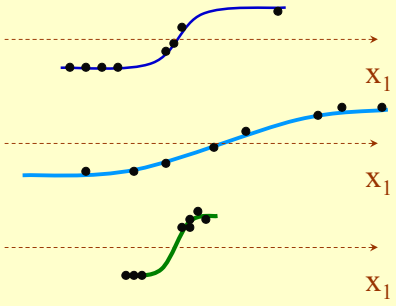
O que conseguimos fazer com um único neurônio sigmoidal $y(w_1.x_1)$ c/ escalamento de x_1 via w_1 e ***VIÉS NULO***



(esta é a tgh “de fábrica”: w_1 unitário e w_0 nulo)

28

... e que tipo de dados empíricos conseguimos modelar com um único neurônio sigmoidal em regressões "$y(x_1)$"?



Os pontos pretos são pares empíricos (x^μ, y^μ); As curvas coloridas, são regressões sigmoidais aderentes a tais pares.

29

29

Em termos de Excel, teriamos ...

recordando

Cliente (μ)	Idade (x_1)	Renda (x_2)	Clics (x_3)	Consumo do Produto B (x_4)	Consumo do Produto C (x_5)	Consumo do Produto A (y)
			302	958	136	9800
			186	985	196	8760
3						520
.....	...					.....
M-2	16					11640
M-1	30					9640
M	19					5320

Equivalente em txt Para uso do MBP

treino em txt para exemplo de consumo A e B - Bloco de notas

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

```
Idade   Renda   Clics   ConsumoA ConsumoB ConsumoA

50      78      302     958      136      9800
65      128     186     985      196      8760
57      150     221     1093     35       520

(...)

16      19      51      707      131      11640
30      75      7       29       78       9640
19      47      116     285      124      5320
```

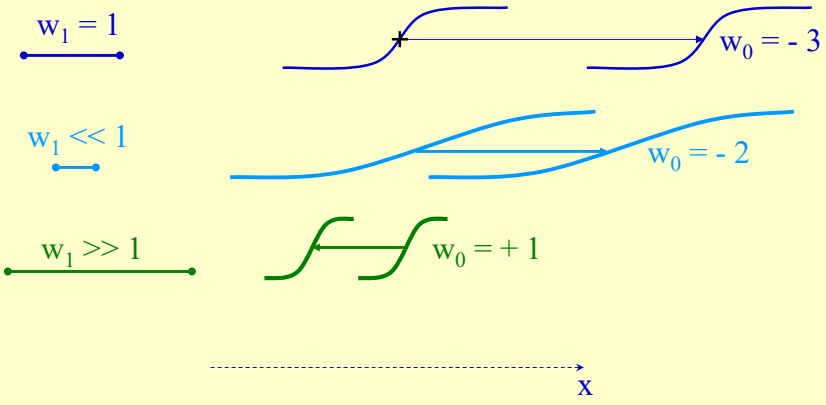
75

Moral – EPUSP

30

O que conseguimos fazer com um único neurônio sigmoidal $y(w_1.x_1 + w_0.1)$, c/ escalamento de x_1 via w_1

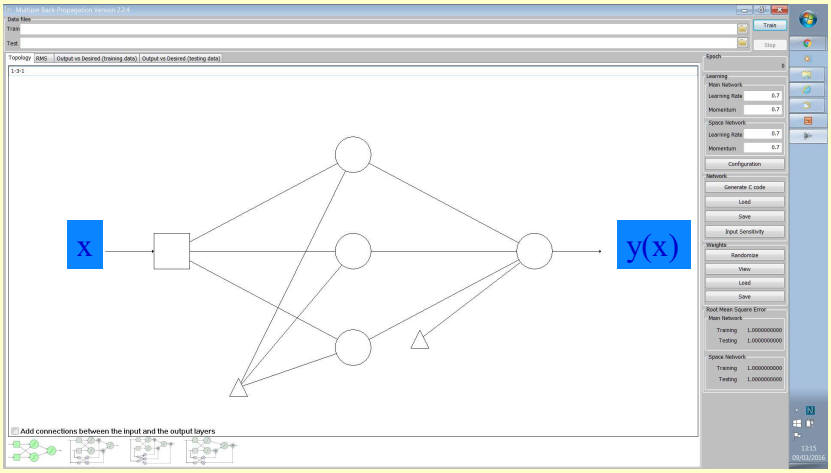
... e agora também com o viés, via viés w_0



31

31

Regressão univariada com Cybenko "café com leite" de 3 nós na primeira camada ...

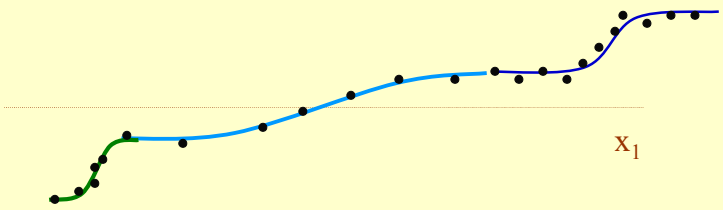


34

34

Cybenko "café com leite" (regressão genérica univariada), para aproximação universal de funções de 1 variável x_1 apenas?

... superposição de várias sigmóides deslocadas e escaladas



Vocês enxergam acima 3 nós "tgh" na primeira camada, com com 3 viéses distintos e 3 escaladores de x_1 distintos, e mais um 4o nó combinador (somatória simples de 3 entradas) na camada de saída?

35

35

Algumas discussões adicionais sobre o Cybenko "café com leite" da regressão univariada ...

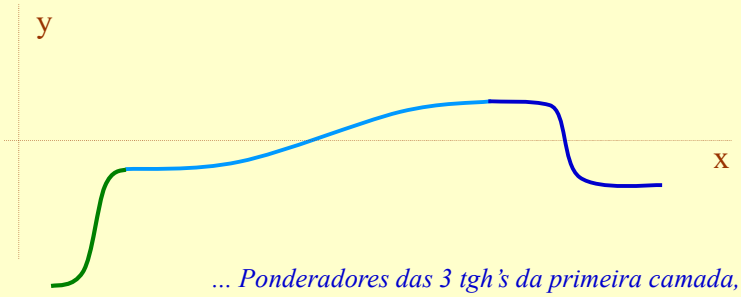
- *Vimos acima como se comporta o regressor univariado de Cybenko "café com leite" quando o nó de saída tem função de ativação identidade, seus pesos ponderadores das saídas da primeira camada são todos unitários positivos e o peso de viés é nulo.*
- *O que ocorre se os esses pesos ponderadores não forem mais unitários? (podem ser agora positivos, negativos, encolhedores (módulo < 1) ou amplificadores (módulo > 1))*
- *E se o seu peso de viés do 4o nó não for mais nulo?*

36

36

Cybenko "café com leite", para aproximação universal de funções de 1 variável x apenas?

... superposição de várias sigmóides deslocadas e escaladas:



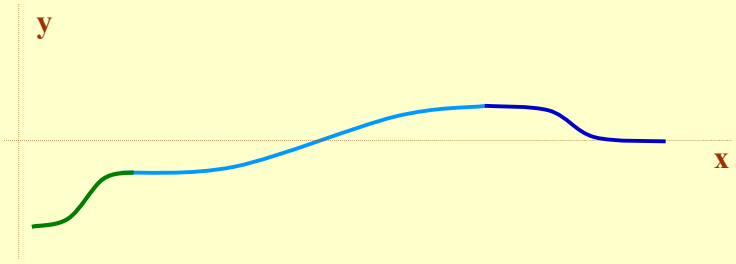
... Ponderadores das 3 tgh's da primeira camada, que são implemantados nos pesos sinápticos do 4o nó, não são mais unitários nem necessariamente positivos

37

37

Cybenko "café com leite", para aproximação universal de funções de 1 variável x apenas?

... superposição de várias sigmóides deslocadas e escaladas:



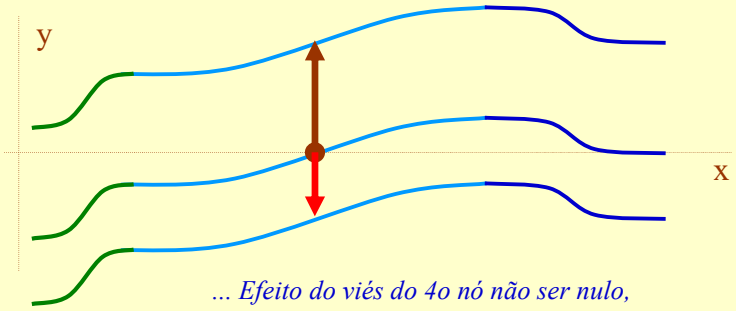
... Ponderadores das 3 tgh's da primeira camada, que são implemantados nos pesos sinápticos do 4o nó, não são mais unitários nem necessariamente positivos

38

38

Cybenko "café com leite", para aproximação universal de funções de 1 variável x apenas?

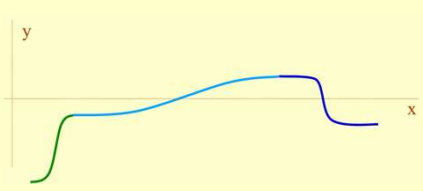
... superposição de várias sigmóides deslocadas e escaladas:

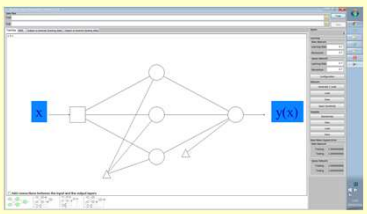


... Efeito do viés do 4o nó não ser nulo, exemplificado em dois valores distintos de viés

39

A discussão anterior indica claramente que ao menos no caso de funções univariadas no domínio e na imagem (uma única variável x no argumento e uma única variável y na "saída" da função) uma RNA de duas camadas (com vários neurônios na segunda, não apenas 3 como ilustrado) pode aproximar qualquer função contínua univariada com erro bem pequeno se necessário: se desejado, basta usarmos mais e mais nós na segunda camada do MLP, aumentando assim arbitrariamente a precisão da aproximação da função alvo da modelagem.





40

A) Cybenko foi além de mostrar a viabilidade de aproximação em casos unidimensionais, ele fez a prova de *Aproximação Universal* no âmbito de funções de múltiplas variáveis!

Qualquer Função(X) genérica pode ser aproximada por um MLP – O que é bom para Estimação / Regressão Contínua (um dos alvos de aplicação deste curso) !!!

E ...

É também bom para o Reconhecimento de Padrões (outro alvo de modelagem)

41

Cybenko – Teorema;

Enunciado, Premissas, "Sumário Executivo"

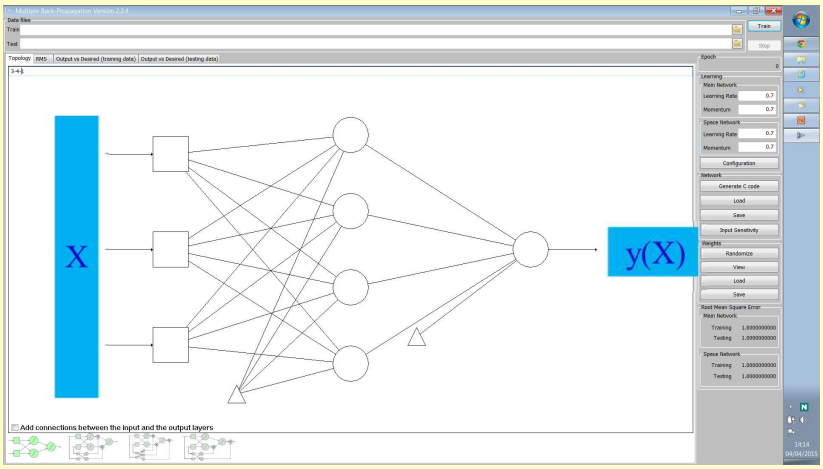
O objetivo não é demonstrá-lo, mas entende-lo

42

A aproximação universal com RNAs do tipo MLP, segundo Cybenko (& Kolmogorov)

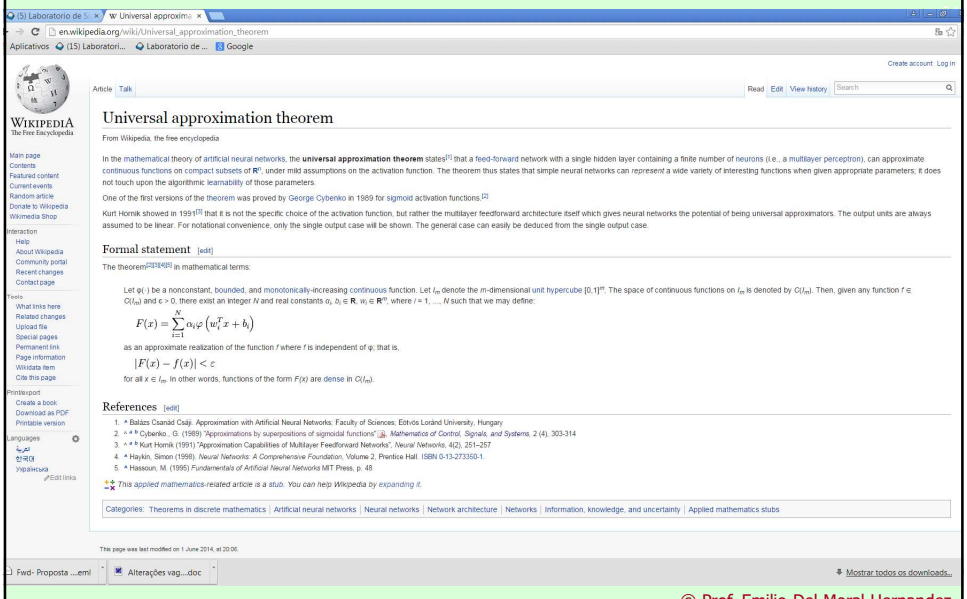
43

Cybenko foi para um terreno mais complexo: temos um vetor de entradas X em lugar de um x unidimensional



45

Cybenko – Enunciado da Prova ... (premissas + resultado)



Universal approximation theorem

From Wikipedia, the free encyclopedia

In the mathematical theory of artificial neural networks, the **universal approximation theorem** states[1] that a feed-forward network with a single hidden layer containing a finite number of neurons (i.e., a multilayer perceptron), can approximate continuous functions on compact subsets of $\mathbf{R}^n$, under mild assumptions on the activation function. The theorem thus states that simple neural networks can *represent* a wide variety of interesting functions when given appropriate parameters; it does not touch upon the algorithmic learnability of those parameters.

One of the first versions of the theorem was proved by George Cybenko in 1989 for sigmoid activation functions.[2]

Kurt Hornik showed in 1991[3] that it is not the specific choice of the activation function, but rather the multilayer feedforward architecture itself which gives neural networks the potential of being universal approximators. The output units are always assumed to be linear. For notational convenience, only the single output case will be shown. The general case can easily be deduced from the single output case.

Formal statement [edit]

The theorem[2][3][4][5] in mathematical terms:

Let $\varphi(\cdot)$ be a nonconstant, bounded, and monotonically-increasing continuous function. Let I_m denote the m-dimensional unit hypercube $[0,1]^m$. The space of continuous functions on I_m is denoted by $C(I_m)$. Then, given any function $f \in C(I_m)$ and $\varepsilon > 0$, there exist an integer N and real constants $\alpha_i, b_i \in \mathbf{R}$, $w_i \in \mathbf{R}^m$, where $i = 1, \ldots, N$ such that we may define:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi\left(w_i^T x + b_i\right)$$

as an approximate realization of the function f where f is independent of φ; that is,

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon$$

for all $x \in I_m$. In other words, functions of the form $F(x)$ are dense in $C(I_m)$.

References [edit]

1. ^ Balázs Csanád Csáji. Approximation with Artificial Neural Networks; Faculty of Sciences; Eötvös Loránd University, Hungary
2. ^ ^a ^b Cybenko, . G. (1989) "Approximations by superpositions of sigmoidal functions", *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2 (4), 303-314
3. ^ ^a ^b Kurt Hornik (1991) "Approximation Capabilities of Multilayer Feedforward Networks", *Neural Networks*, 4(2), 251–257
4. ^ Haykin, Simon (1998). *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Volume 2. Prentice Hall. ISBN 0-13-273350-1.
5. ^ Hassoun, M. (1995) *Fundamentals of Artificial Neural Networks* MIT Press, p. 48

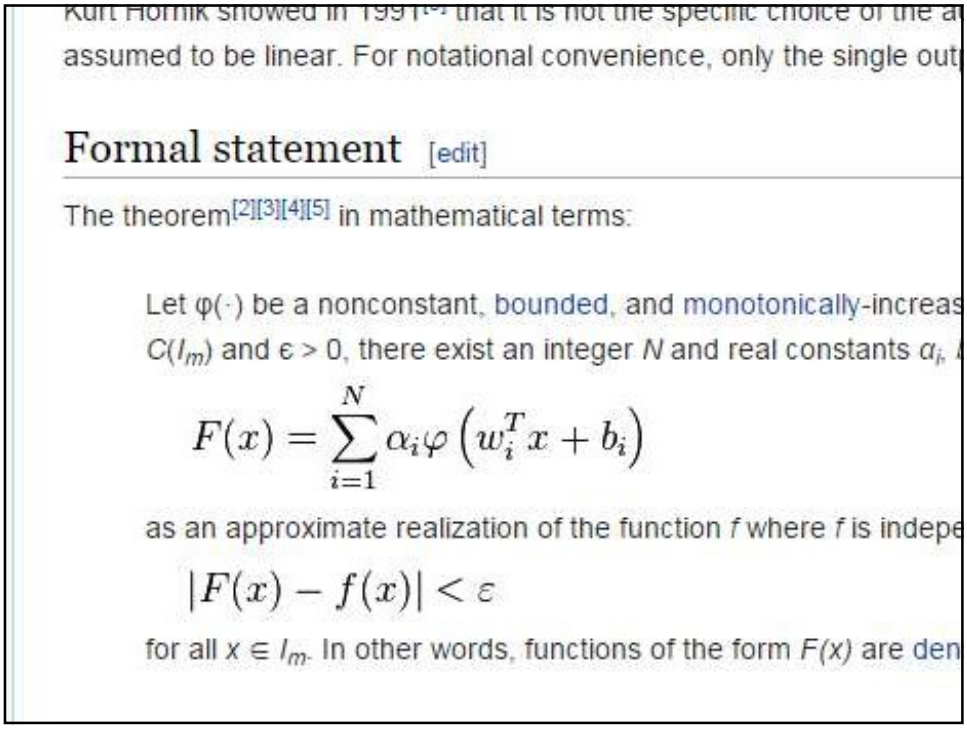
This applied mathematics-related article is a stub. You can help Wikipedia by expanding it.

Categories: Theorems in discrete mathematics | Artificial neural networks | Neural networks | Network architecture | Networks | Information, knowledge, and uncertainty | Applied mathematics stubs

This page was last modified on 1 June 2014, at 20:06.

54

54



assumed to be linear. For notational convenience, only the single out

Formal statement [edit]

The theorem[2][3][4][5] in mathematical terms:

Let $\varphi(\cdot)$ be a nonconstant, bounded, and monotonically-increas

$C(I_m)$ and $\epsilon > 0$, there exist an integer N and real constants α_i,

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi\left(w_i^T x + b_i\right)$$

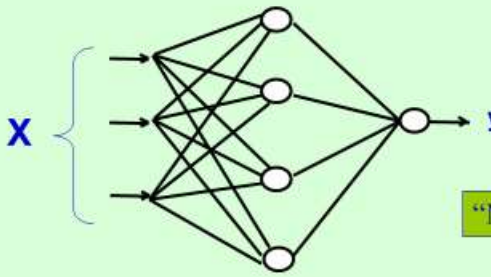
as an approximate realization of the function f where f is indepe

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon$$

for all $x \in I_m$. In other words, functions of the form $F(x)$ are den

56

Rede de uma única camada de neurônios sigmoidais + um neurônio de saída



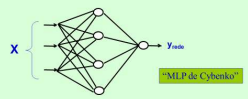
"MLP de Cybenko"

57

Kurt Hornik showed in 1991[6] that it is not th

assumed to be linear. For notational conven

Rede de uma única camada de neurônios sigmoidais + um neurônio de saída



Formal statement [edit]

The theorem[2][3][4][5] in mathematical terms:

$y_{rede}(X)$

X

Let φ(·) be a nonconstant, bounded, and monotonically-increas

$C(I_m)$ and ϵ > 0, there exist an integer N and real constants α_i,

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi\left(w_i^T x + b_i\right)$$

$viés_i$: viés do nó escondido i

as an approximate sigmoidal of the function f where f is indepe

W_i : vetor de pesos do nó escondido i

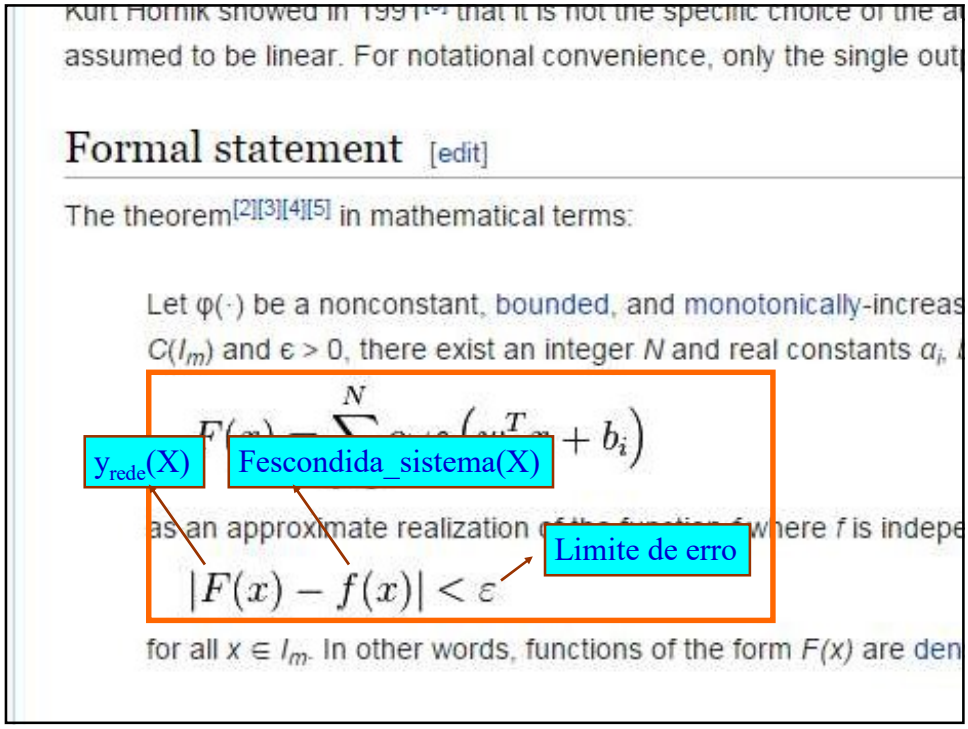
número de nós escondidos

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon$$

elementos do vetor de pesos do nó linear de saída W_s

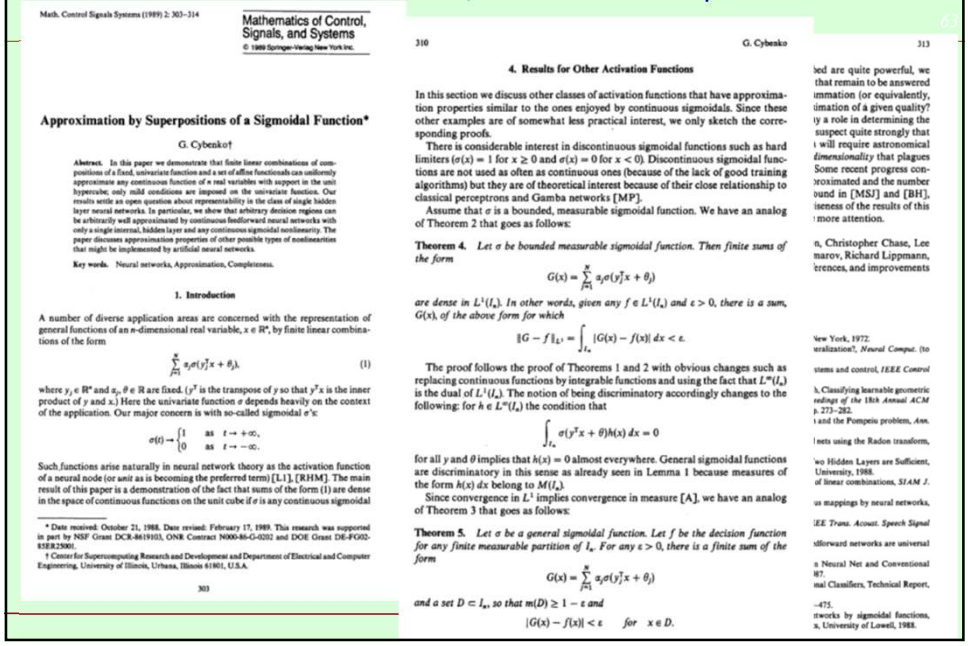
for all $x \in I_m$. In other words, functions of the form $F(x)$ are den

59



61

Cybenko – a prova matemática, disponível para download na internet, é bastante complexa



63

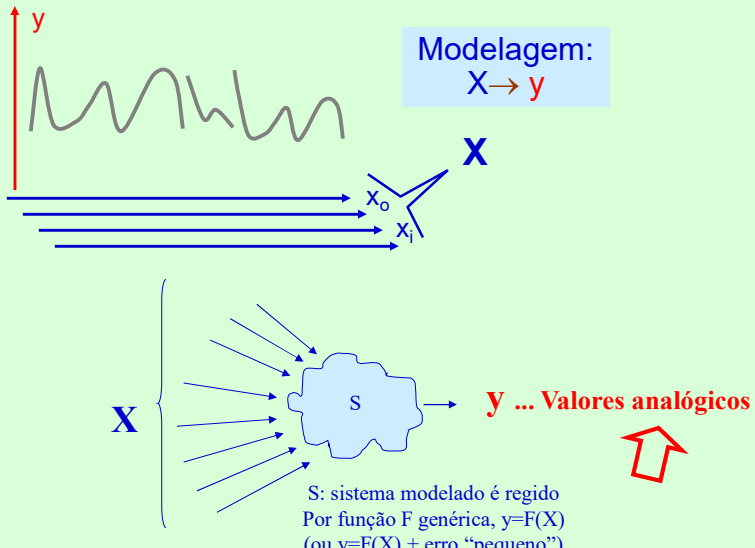
De onde vem o grande poder do MLP em resolver tantos problemas diversos?

A prova de Cybenko nos respondeu essa dúvida!!

64

64

função com valores analógicos y(X) ....



65

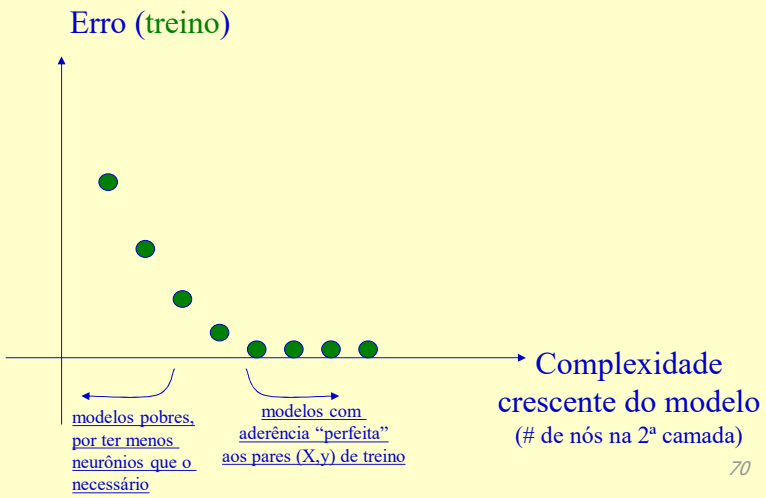
65

Questões intrigantes, p/ esta aula e p/ pensar em casa ...

- *No que impacta escolhermos o "epslon" de Cybenko de alto valor? O que muda na estrutura de Cybenko com isso?*
- *No que impacta escolhermos o "epslon" de Cybenko de baixo valor?*
- *Como definimos o número de nós da primeira camada do MLP ? Isto pode ser definido a priori, antes de testar o seu desempenho? (por exemplo com base no número de entradas da rede e/ou com base no número de exemplares de treino M?)*
- *O que ganhamos e o que perdemos se escolhermos usar POUCOS nós na construção da rede neural?*
- *O que ganhamos e o que perdemos se escolhermos usar MUITOS nós na construção da rede neural?*

69

Aumento de aderência aos dados de treino com o aumento de nós da RNA ...



70

Resumindo, Cybenko foi além de mostrar a viabilidade de aproximação em casos unidimensionais; e foi além de mostrar a viabilidade de fronteiras de separação genéricas.

Qualquer Função(X) genérica pode ser aproximada por um MLP

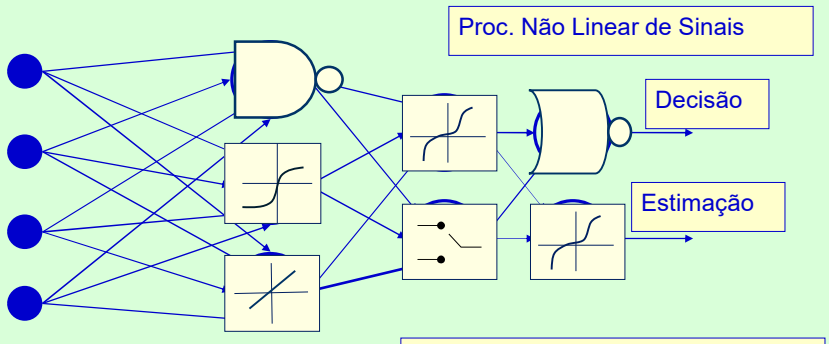
– Isso é bom para Estimação / Regressão Contínua (um alvo neste curso) !!!

- É também bom para o Reconhecimento de Padrões (outro alvo de modelagem do curso)

88

O Multi Layer Perceptron (MLP)

- Múltiplas entradas / Múltiplas saídas / Múltiplas camadas
- Variáveis (internas e externas) analógicas ou digitais
- Relações lineares ou não lineares entre elas



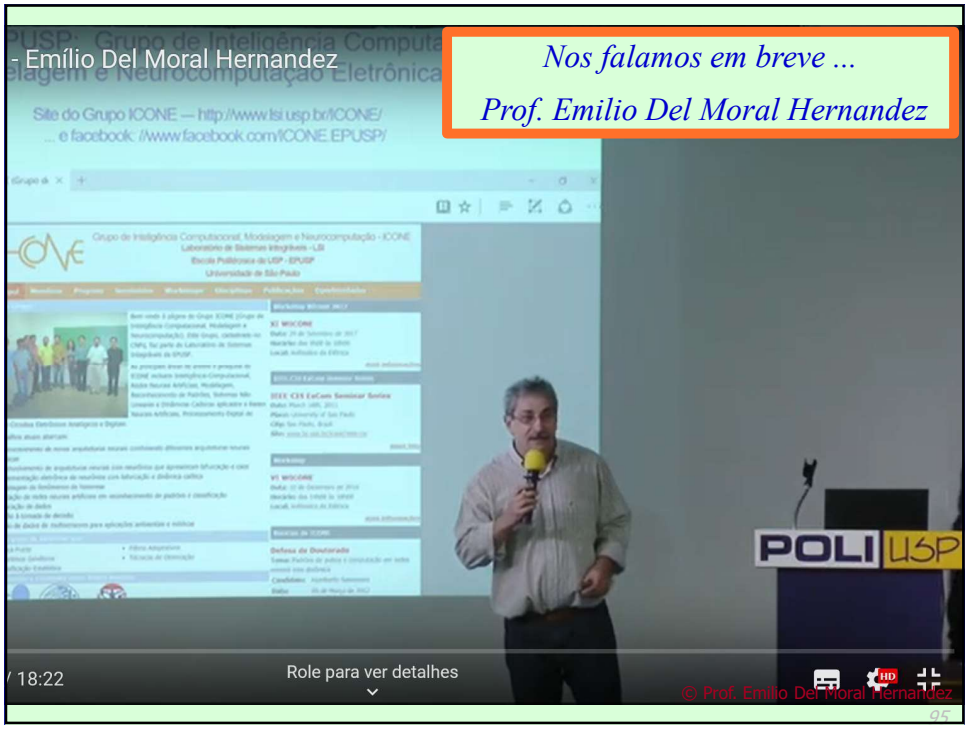
90

+ Questões, p/ esta aula e p/ pensar em casa ...

- ***Segundo Cybenko, quando queremos um aproximador universal de funções com um MLP que tenha os ingredientes da prova que ele demonstrou, que funções de ativação (função não linear do nó neural) podem ou não podem ser usadas na implementação das camadas internas?***
- ***Podemos usar a Tgh, a Sigmóide, a Linear, a Linear por etapas (todas dessa classe ou só algumas?), a Relu, a função Sinal, a função Degrau, a Gaussiana?***
  (basta checar quais obedecem às premissas de Cybenko e quais não)

93

93



95

95