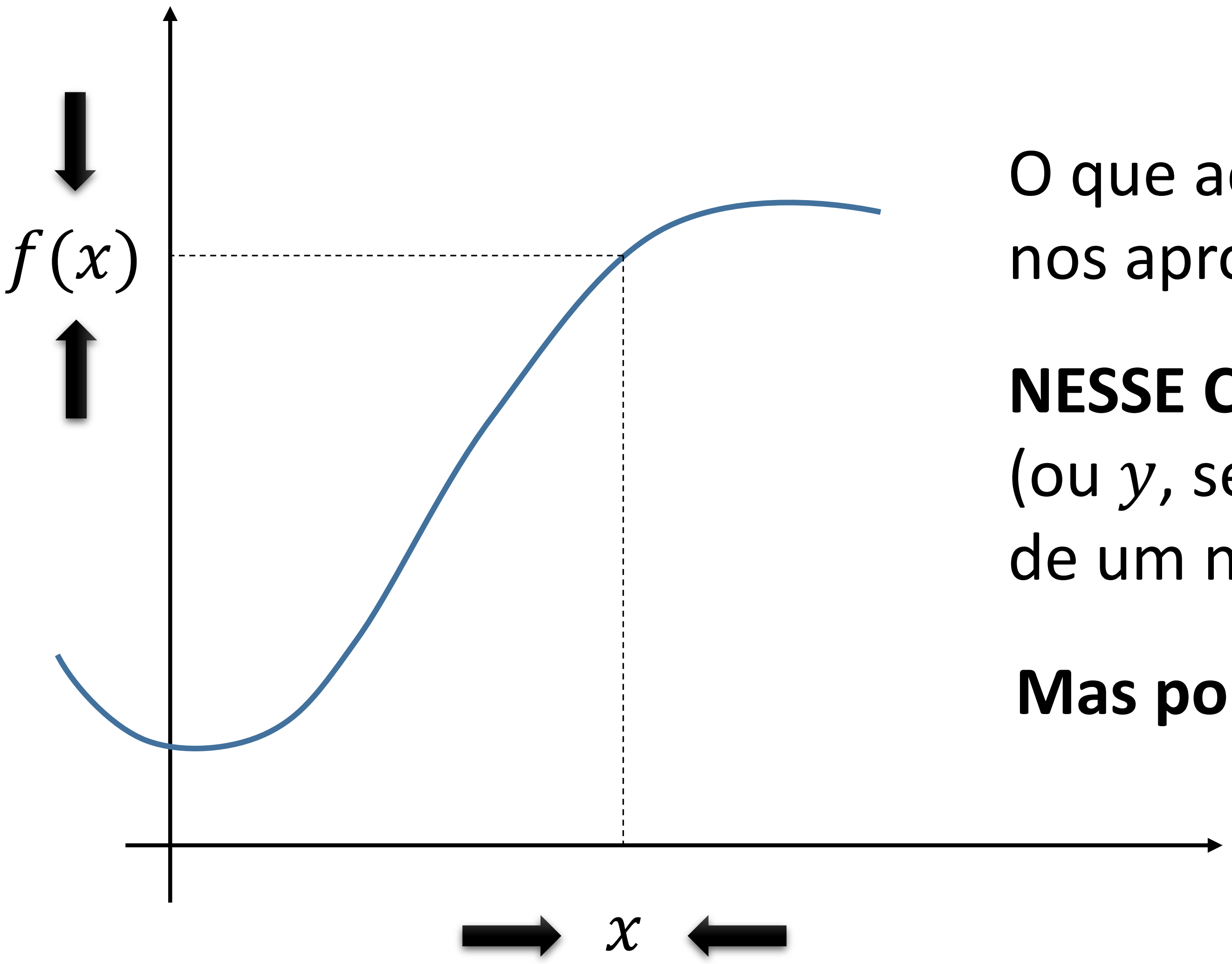
Limites

Limites

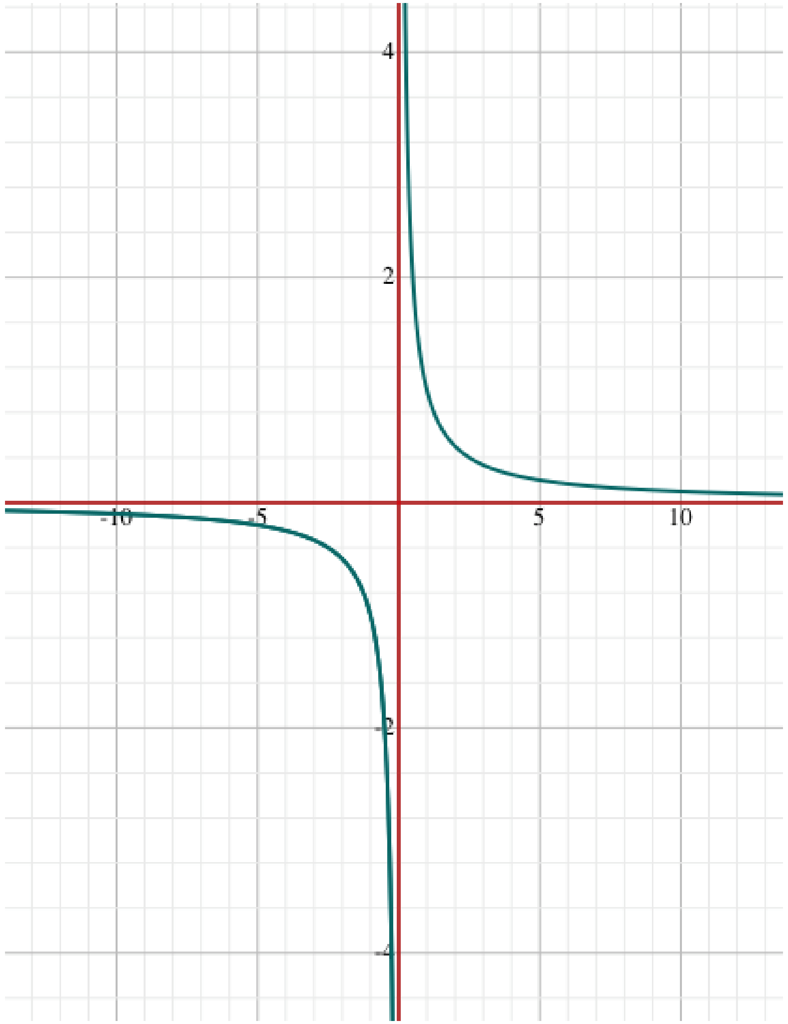


O que acontece na função quando nos aproximamos de x?

NESSE CASO... Parece que $f(x)$ (ou y, se preferirem) se aproxima de um número real

Mas por que "nesse caso"?

Limites



Exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

O que acontece com o y quando x se aproxima de 0?

Limites

- Um exemplo mais prático...
  - Uma fábrica de computadores determina que um empregado após x dias de treinamento, monta N computadores por dia, onde

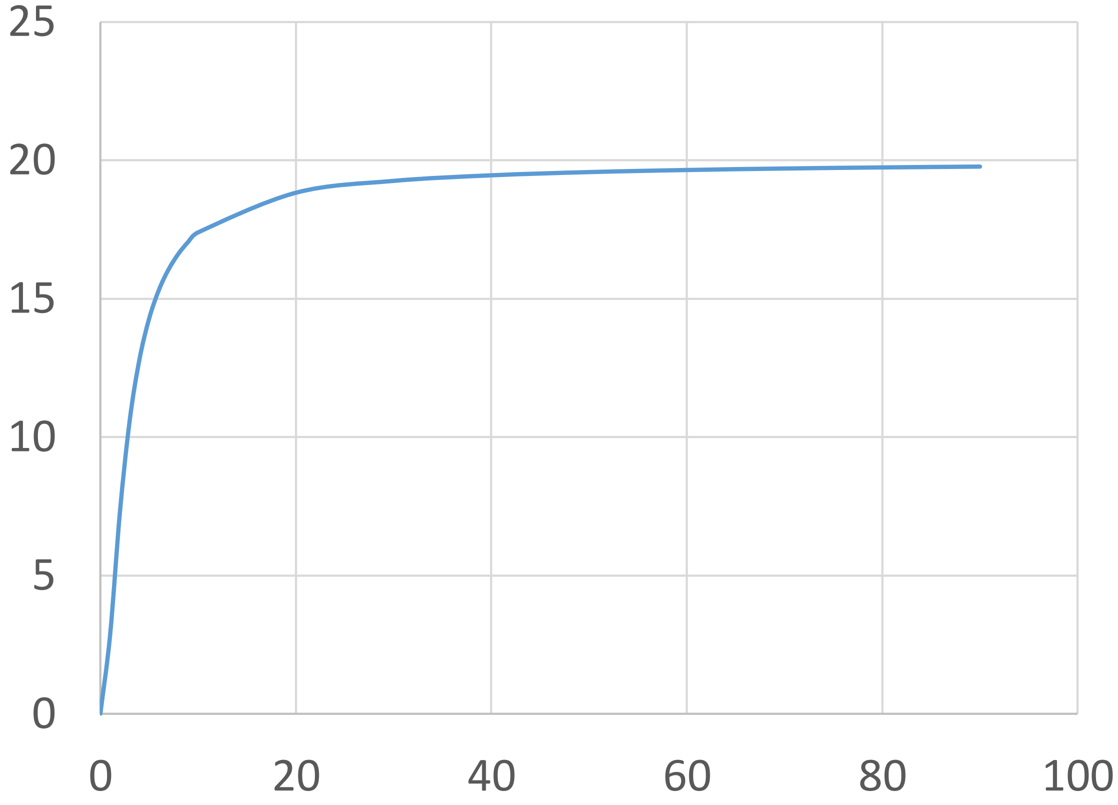
$$N(x) = \frac{20x^2}{x^2 + x + 5} \; (x \geq 0)$$

  - Qual a carga ótima de treinamento
  - $Benefício\ marginal = custo\ marginal$?

Limites

x	f(x)
0	0
1	2,857143
2	7,272727
3	10,58824
4	12,8
5	14,28571
6	15,31915
7	16,06557
8	16,62338
9	17,05263
10	17,3913
20	18,82353
30	19,25134
40	19,45289
50	19,56947
60	19,64529
70	19,69849
80	19,73786
90	19,76815

A que conclusão se chega com isso?

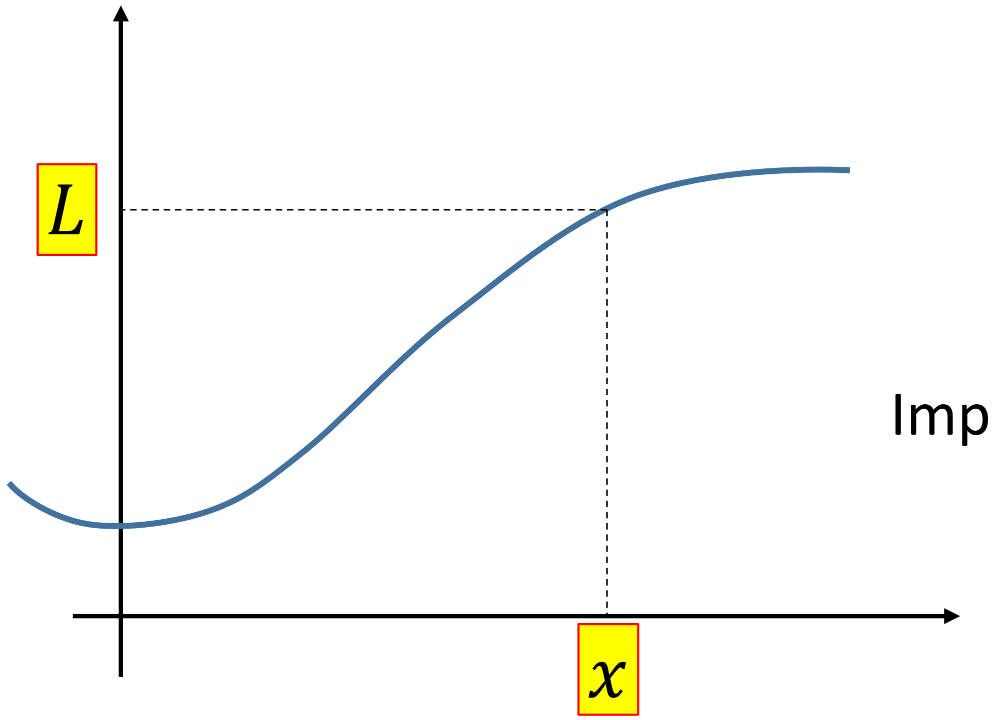


E quando não tiver Excel!?!?!?!?

Definição de Limite

- Se $f\ (x)$ puder ser tornada tão próxima quanto queiramos de L, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (<u>**mas não iguais a a**</u>), temos...

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



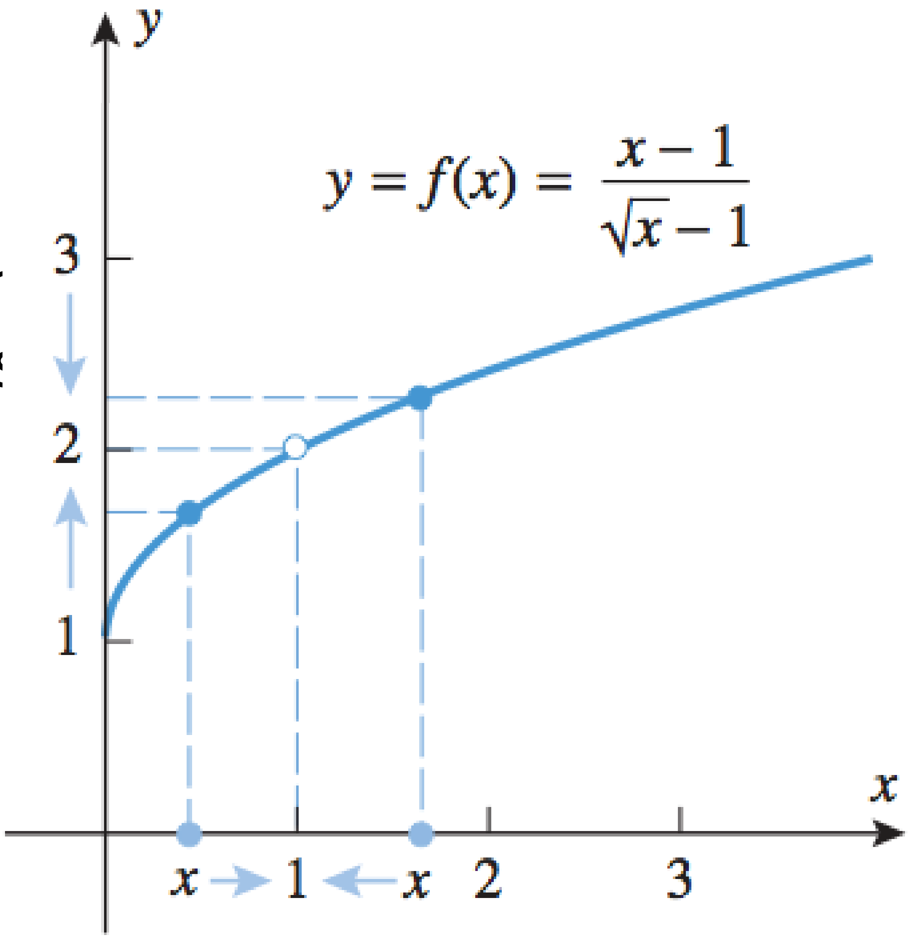
Importante: L é um número real

Definição de Limite

- Se $f\ (x)$ puder ser tornada tão próxir
desde que tomemos os valores de x s
(**<u>mas não iguais a $\boldsymbol{a}$</u>**), temos...

- Exemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad D: \{x \in R | x \neq 1\}$$



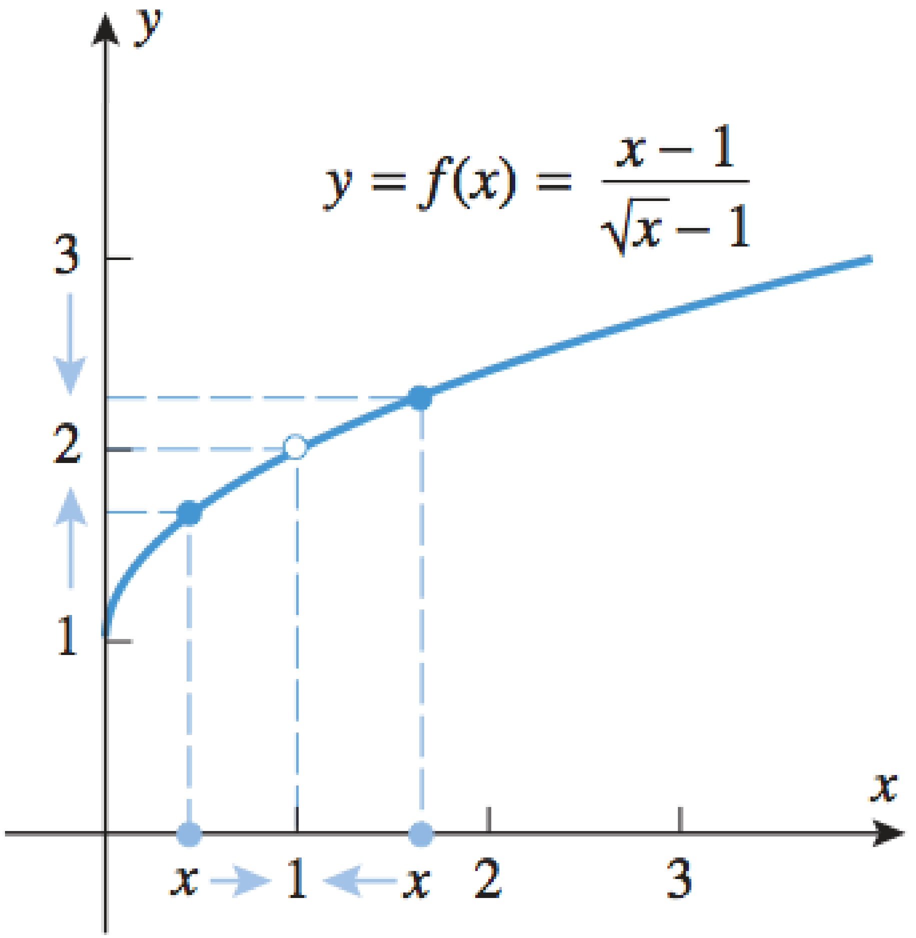
x	0,99	0,999	0,9999	0,99999	1	1,00001	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,994987	1,999500	1,999950	1,999995		2,000005	2,000050	2,000500	2,004988

Lado esquerdo → ← Lado direito

Definição de Limite

- Repare que $f(1)$ não está definida
- Precisamos entender que f(x) é uma coisa...
- ... e o $\lim_{x\to a} f(x)$ é outra!!!!!

- Podem até ter o mesmo valor, mas são coisas diferentes!!!!!



x	0,99	0,999	0,9999	0,99999	1	1,00001	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,994987	1,999500	1,999950	1,999995		2,000005	2,000050	2,000500	2,004988

Lado esquerdo → ← Lado direito

Exercício

- $\lim_{x \to 1} 5$
- $\lim_{x \to 1} (1 - 3x^2)$
- $\lim_{x \to 2} (\frac{2x+1}{x+4})$
- $\lim_{x \to -3} \sqrt{2x^4 + x^2}$
- $\lim_{x \to -1} \left(\frac{\sqrt{x^2+8}}{2x+5}\right)$

Exercício

- $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

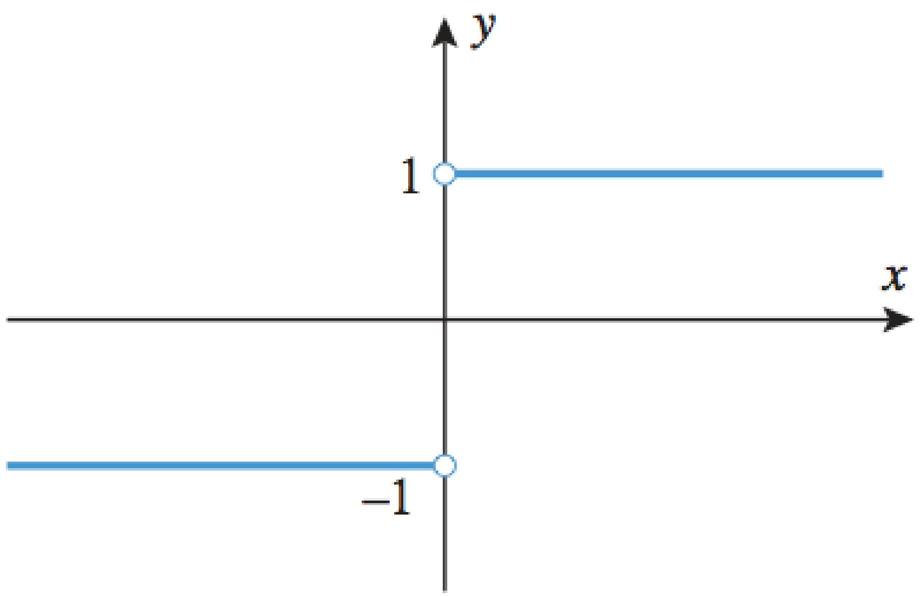
x	**0,9**	**0,99**	**0,999**	**1**	**1,001**	**1,01**	**1,1**
$f(x)$	100	10.000	1.000.000	$\nexists$	1.000.000	10.000	100

- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

x	**0,9**	**0,99**	**0,999**	**1**	**1,001**	**1,01**	**1,1**
$f(x)$							

Limites Laterais

- $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$



- Como seria então $\lim_{x \to 0} f(x)$?

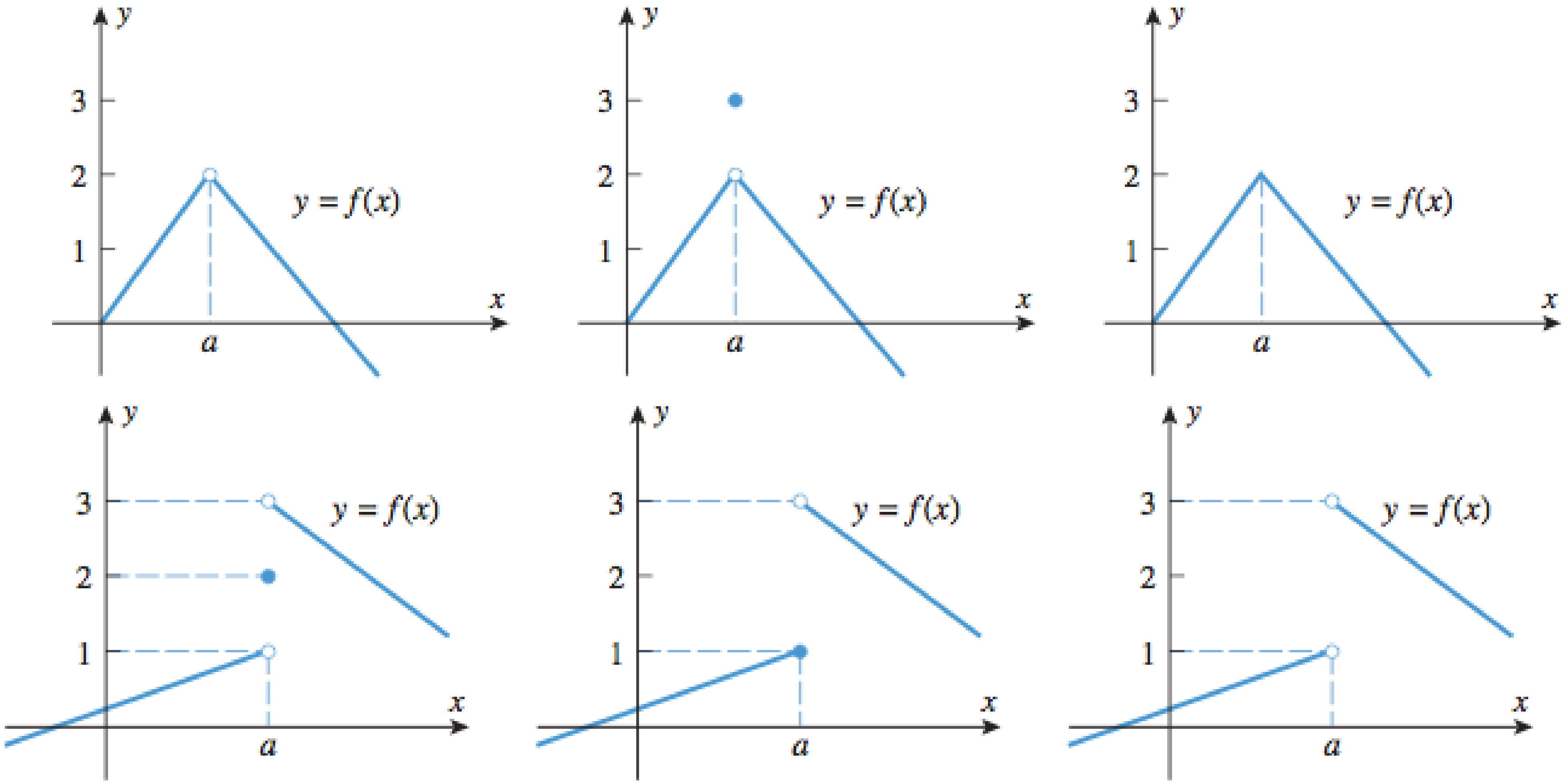
- Se nos aproximarmos de $x = 0$ pela esquerda temos que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$
- Por outro lado, temos $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$
- Os limites laterais são diferentes!!!!

Limites Laterais

- Ou seja, nem sempre uma função tem limite bilateral em um dado x
  - Nestes casos $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \nexists$

- Em suma, para que o limite de $f\ (x)$ exista em um ponto $x = a$...
  - Os valores de $f\ (x)$ devem tender a algum número real L quando x tende a a
  - Esse número deve ser o mesmo, independentemente de x tender a a pela esquerda ou pela direita
  - Em outras palavras, os limites bilaterais devem ser iguais!!!

Explique o que ocorre em $x \to a$



Exercícios

- Calcule os limites, caso existam...
- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2-3x}{x}$
- $\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-2}$

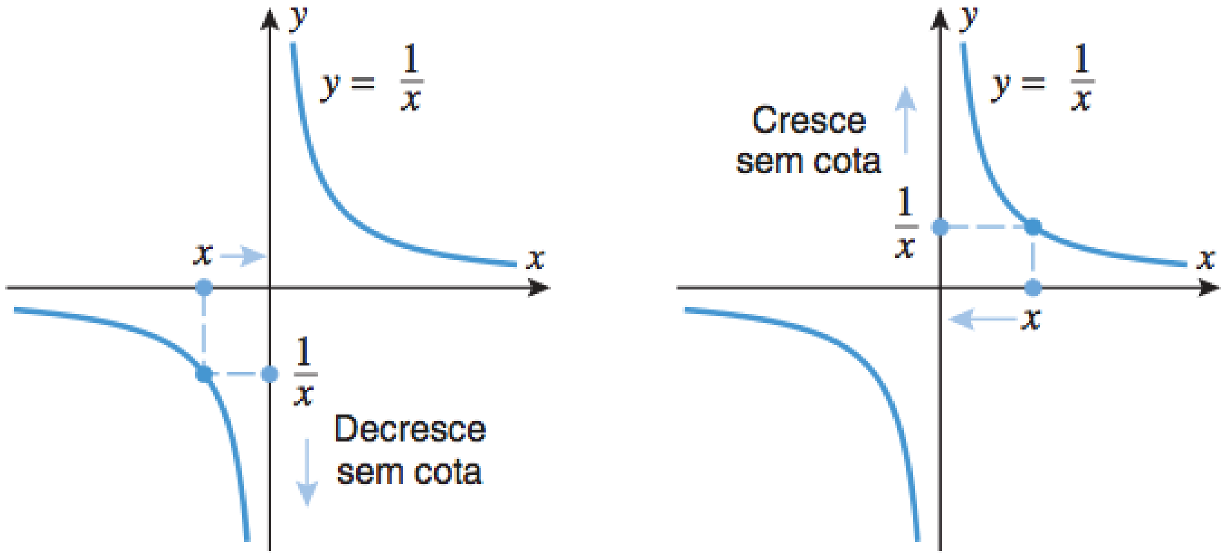
Limites Infinitos

- O terceiro caso do slide anterior representa o (de)crescimento sem cota
  - **Na medida que x se aproxima de a, $f(x)$ tende a $\pm\infty$**

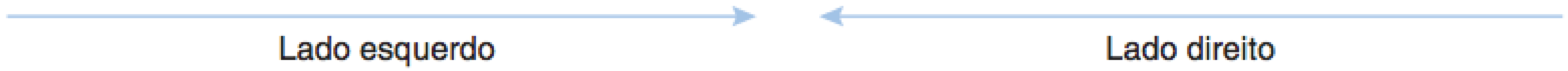
- Importante: se um ou ambos os limites laterais não tende(m) a um número real, o limite da função não existe!!!!
  - $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty = \nexists$
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty = \nexists$
- **De novo: o limite de fato só existe se os limites laterais convergem para o mesmo valor $\mathbf{L} \in \mathbb{R}$**

Limites Infinitos

- Por exemplo,
  - $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
  - $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

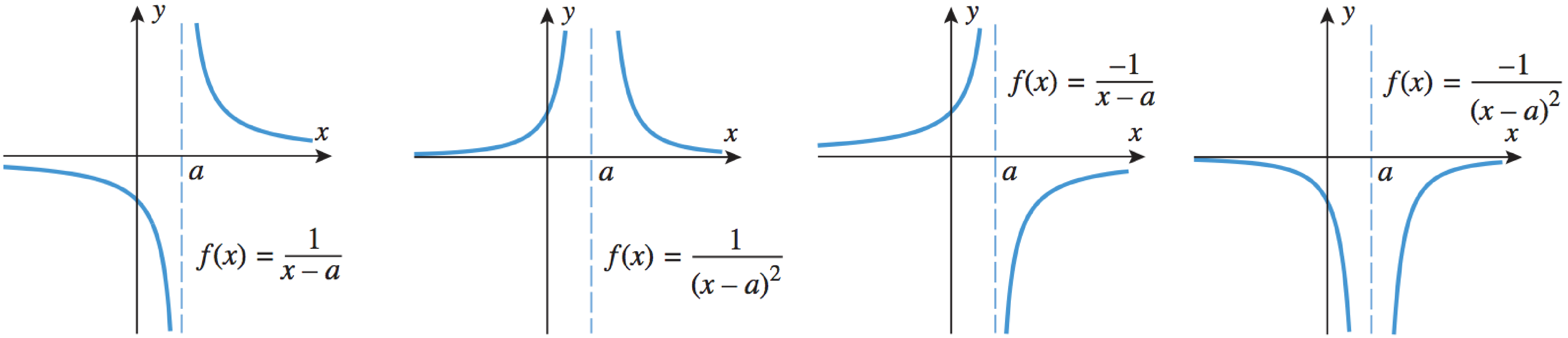


x	–1	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001	0	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
$\frac{1}{x}$	–1	–10	–100	–1.000	–10.000		10.000	1.000	100	10	1



Esboce graficamente $f(x)$ dados os limites...

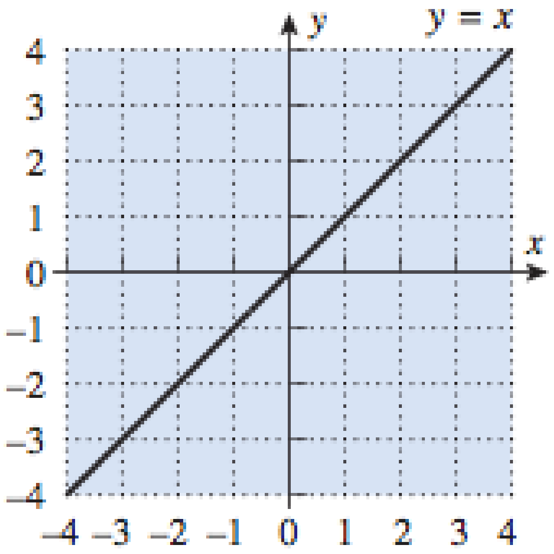
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \qquad \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^2} \qquad \lim_{x \to a} \frac{-1}{x-a} \qquad \lim_{x \to a} \frac{-1}{(x-a)^2}$$

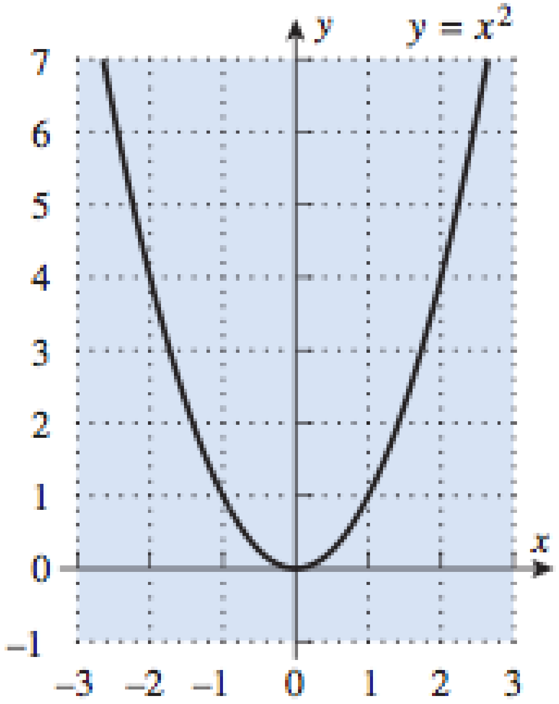


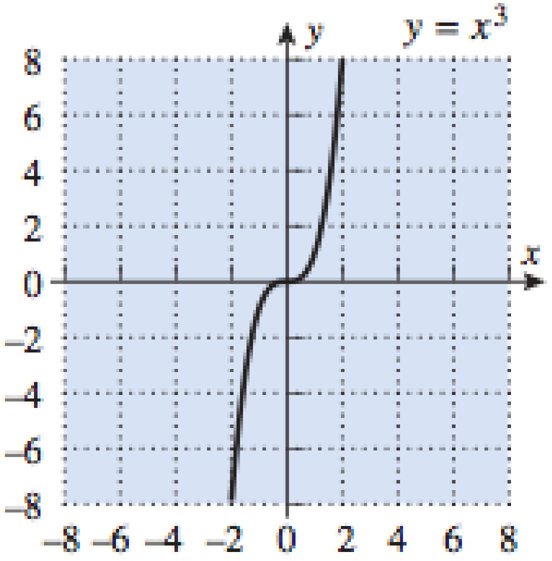
(a) (b) (c) (d)

Limites de Polinômios e Funções Racionais

- Polinômios são funções contínuas com $D \in \mathbb{R}$ e $Im \in \mathbb{R}$







- Portanto, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Limites de Polinômios e Funções Racionais

- Calcule o limite de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ quando $x \to 5$... Calcule também $f(5)$
- Idem para $f(x) = (x^7 - 2x^5 + 1)^{35}$ quando $x \to 1$

- Agora, calcule o $\lim_{x \to 2} \frac{5x^3+4}{x-3}$
- Sem problemas aqui... Mas nem sempre é assim!!!!!
- $\lim_{x \to 3} \frac{5x^3+4}{x-3}$

Limites de Polinômios e Funções Racionais

- Lembram desses casos?

Exercícios

- Calcule os limites, caso existam...
- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2-3x}{x}$
- $\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-2}$

Limites de Polinômios e Funções Racionais

- Verique a $f(x)$ no "x" de interesse
  - Se o denominador for diferente de 0, teremos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
    - Como vimos em $\lim_{x \to 2} \frac{5x^3+4}{x-3}$
  - Se o numerador for diferente de zero e o denominador igual a zero
    - Abra os limites laterais
    - Ex.: $\lim_{x \to 4} \frac{2-x}{x^2-2x-8}$
  - Se numerador e denominador são iguais a zero, procure por fatores comuns que simplifiquem a expressão
    - Ex.: $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$

Limites de Polinômios e Funções Racionais

- Encontre

  - $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x+1}{x+3}$

  - $\lim\limits_{x \to -4} \frac{2x+8}{x^2+x-12}$

  - $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-10x+25}$

Limites envolvendo radicais

- Encontre
  - $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$
  - $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

- Dica prática…
  - Multiplique pelo conjugado da expressão

Exercícios

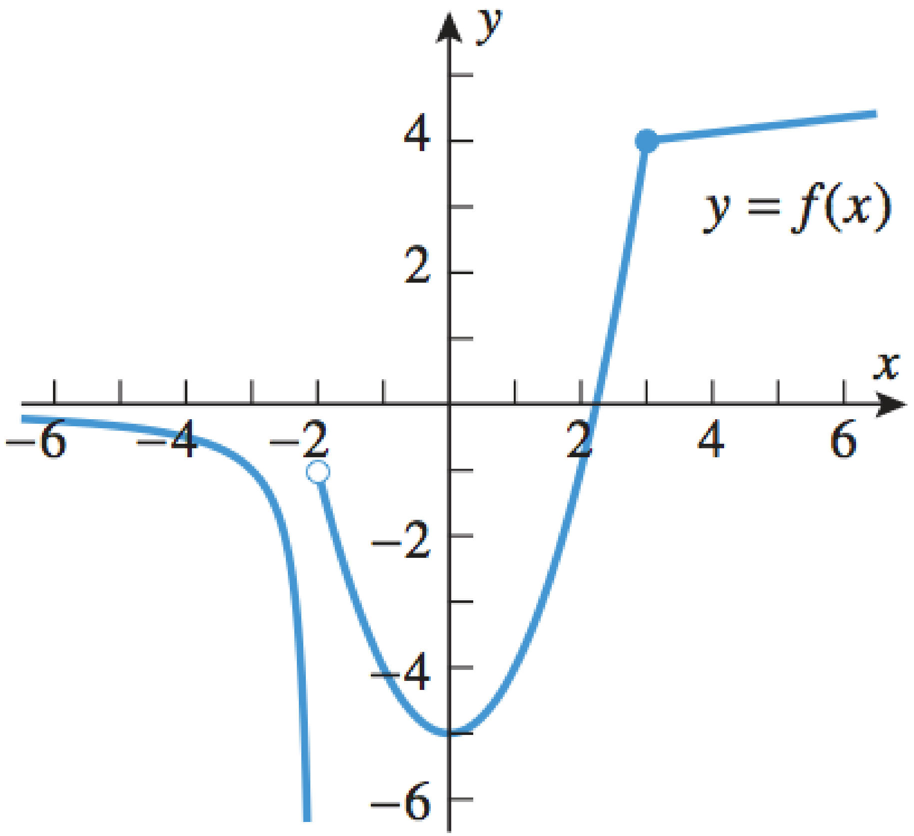
- $\lim_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

- $\lim_{x \to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

Limites de funções definidas por partes

- Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, se\ x \leq -2 \\ x^2 - 5, se\ -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+13}, se\ x > 3 \end{cases}$$



Encontre

$\lim_{x\to -2} f(x)$ $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\lim_{x\to 3} f(x)$

Limites de funções definidas por partes

- Exercícios

1. $f(t) = \begin{cases} t - 2\,, se\ t < 0 \\ t^2, se\ 0 \leq t \leq 2 \\ 2t, se\ t > 2 \end{cases}$

Encontre:

$\lim_{t \to 0} f(t) \quad \lim_{t \to 1} f(t) \quad \lim_{t \to 2} f(t)$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3}, se\ x \neq -3 \\ k, x = -3 \end{cases}$

Determine k de modo que

$f\ (-3) = \lim_{x \to -3} f(x)$

Comportamento Final de uma Função

- Indique o limite quando $x \to \pm\infty$ e esboce o gráfico
- $f(x) = x$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^4$
- $f(x) = x^5$
- …

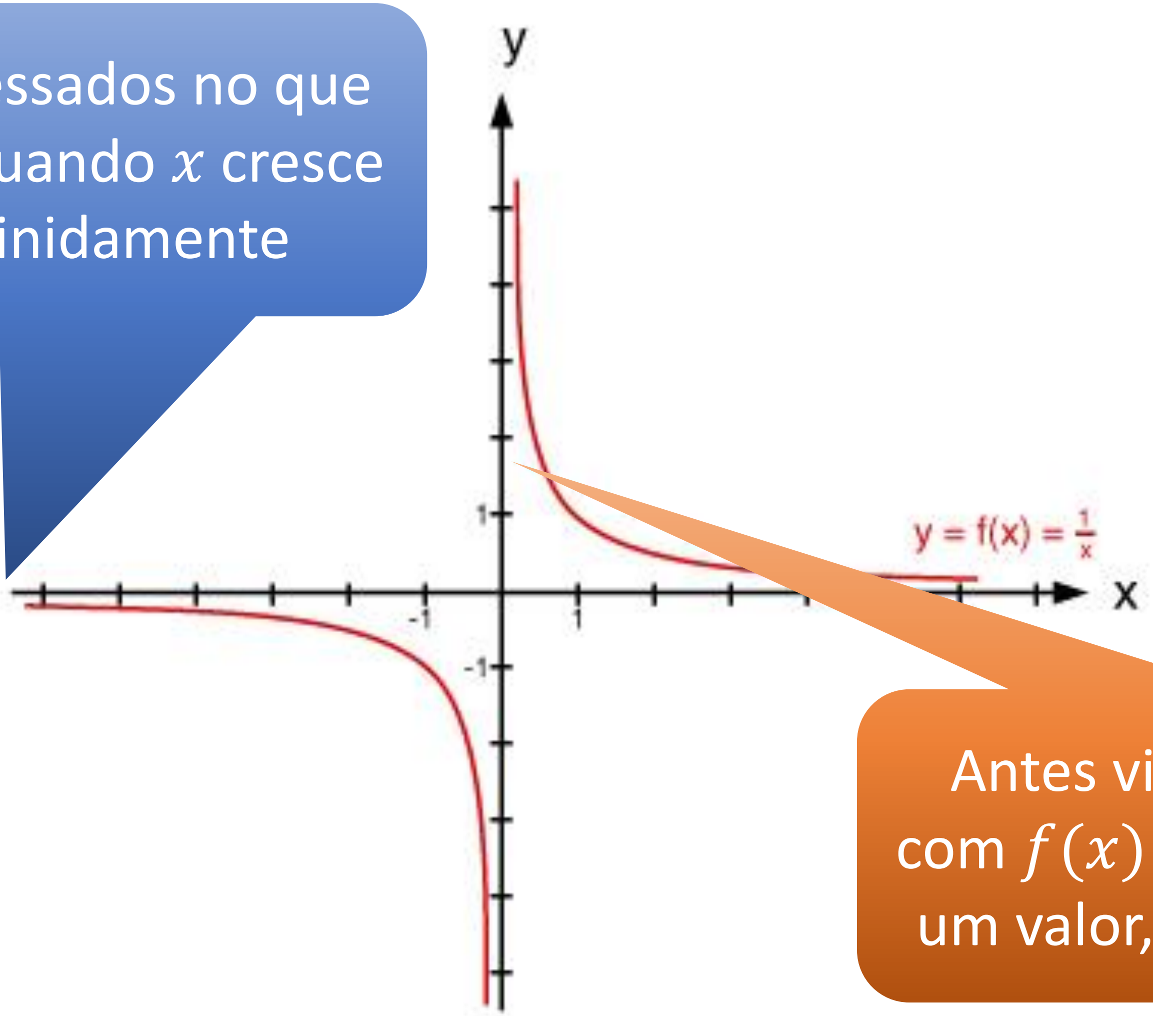
Comportamento Final de uma Função

- Já falamos de limites infinitos... as assíntotas verticais
- **Vamos ver agora limites NO infinito**
  - O comportamento de $f(x)$ quando $\boldsymbol{x}$ cresce ou decresce sem cota
  - $\boldsymbol{x} \to \pm\infty$
- Por exemplo, qual o comportamento final de $f(x) = \frac{1}{x}$?

	VALORES						CONCLUSÃO
x	-1	-10	-100	-1.000	-10.000	$\cdots$	Quando $x \to -\infty$, o valor de $1/x$ cresce tendendo a 0.
$1/x$	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$	$\cdots$	
x	1	10	100	1.000	10.000	$\cdots$	Quando $x \to +\infty$, o valor de $1/x$ decresce tendendo a 0.
$1/x$	1	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$	$\cdots$	

Comportamento Final de uma Função

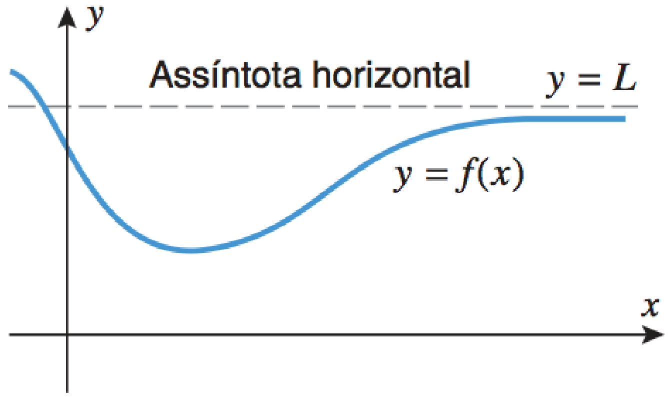
Agora estamos interessados no que acontece com $f(x)$ quando x cresce ou decresce indefinidamente

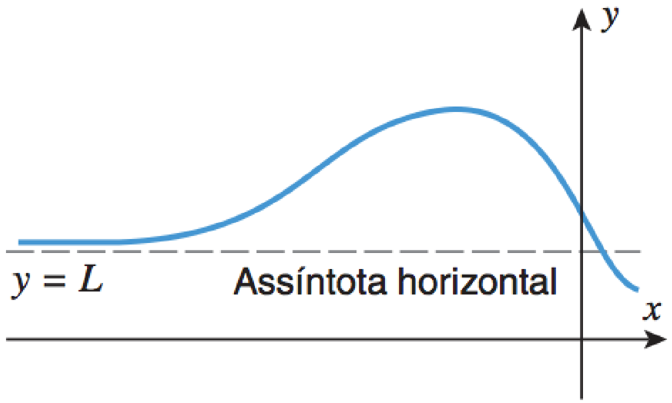


Antes vimos o que acontece com $f(x)$ com x se aproxima de um valor, no caso aqui... $x = 0$

Comportamento Final de uma Função

- Se os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de uma constante L à medida que x (de)cresce sem cota...
  - $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$



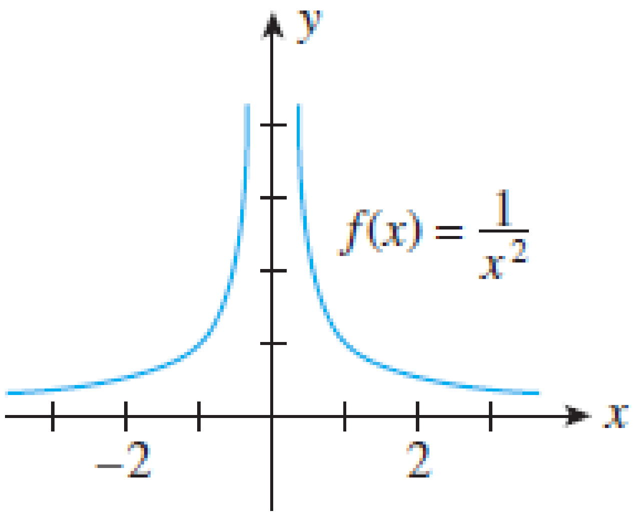


$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Comportamento Final de uma Função

- Verifique os limites (se existirem) quando $x \to \pm\infty$
  - $f(x) = 2x^2 - 10$
  - $f(x) = x^3 - x$
  - $f(x) = \frac{1}{x^2}$
  - $f(x) = \frac{3x+5}{6x-8}$



Comportamento Final de uma Função

- $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?
- Procedimento: divide pela maior potência de x do denominador
    - Mesmo grau no numerador e denominador
        - $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x-1000}$
    - Maior grau no denominador
        - $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2-x}{2x^3-5}$
    - Maior grau no numerador
        - $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5-2x^2+2}{1-2x}$

Comportamento Final de uma Função

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 1}{x + 2}$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - x^3 + x - 1}{x^6 + 2x^2 + 1}$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^3 + x^2 + 1}$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^4 - 3x^2 + 1}{2x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$

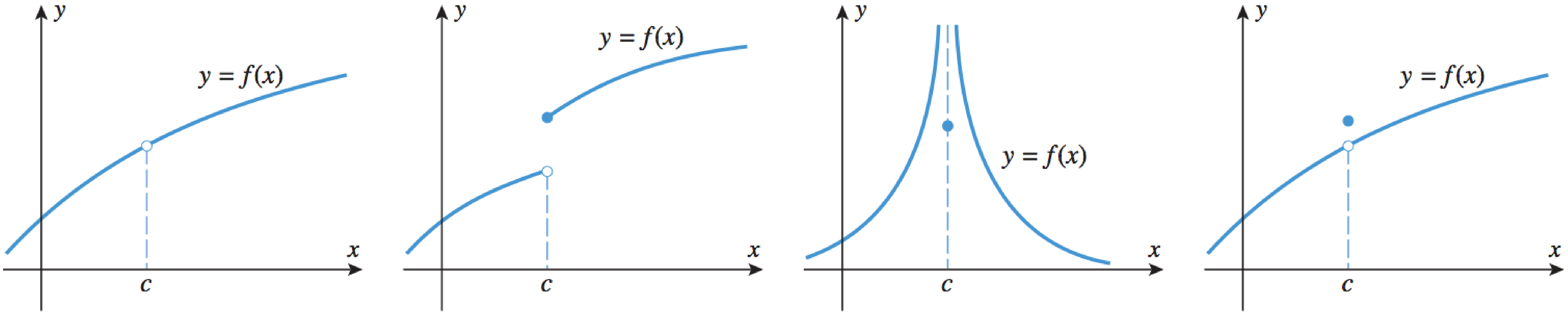
Comportamento Final de uma Função

- Funções envolvendo radicais
  - $\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{2+3x-5x^2}{1+8x^2}}$
  - $\lim_{x \to \infty} \sqrt[5]{\frac{3x+5}{6x^2-8}}$

Ache o limite do que está dentro da raiz e depois aplique a raiz no resultado!

Continuidade

- Conceito importante para o cálculo diferencial e integral
- Para ser continua em um dado ponto, o gráfico da funçao não pode ter nenhum tipo de “falhas” ou “quebras”

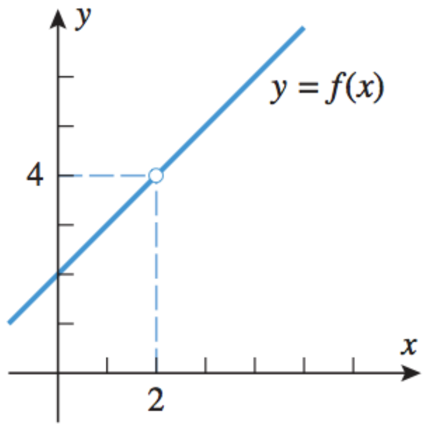


Continuidade

- Condições para que uma função seja contínua no ponto $x = c$
  - $f(c)$ existe, ou seja, está definida (c pertence ao domínio da função)
  - $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, ou seja, os limites laterais são iguais
  - $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, ou seja, as duas condições anteriores estão presentes
- Se uma ou mais das condições dessa definição falhar, dizemos que f tem uma descontinuidade em $x = c$
- Exemplo
  - $\lim_{x \to 2} x^2$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

Continuidade

- Determine se as seguintes funções são contínuas no ponto $x = 2$
  - $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
  - $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, se\ x \neq 2 \\ 3, se\ x = 2 \end{cases}$
  - $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, se\ x \neq 2 \\ 4, se\ x = 2 \end{cases}$



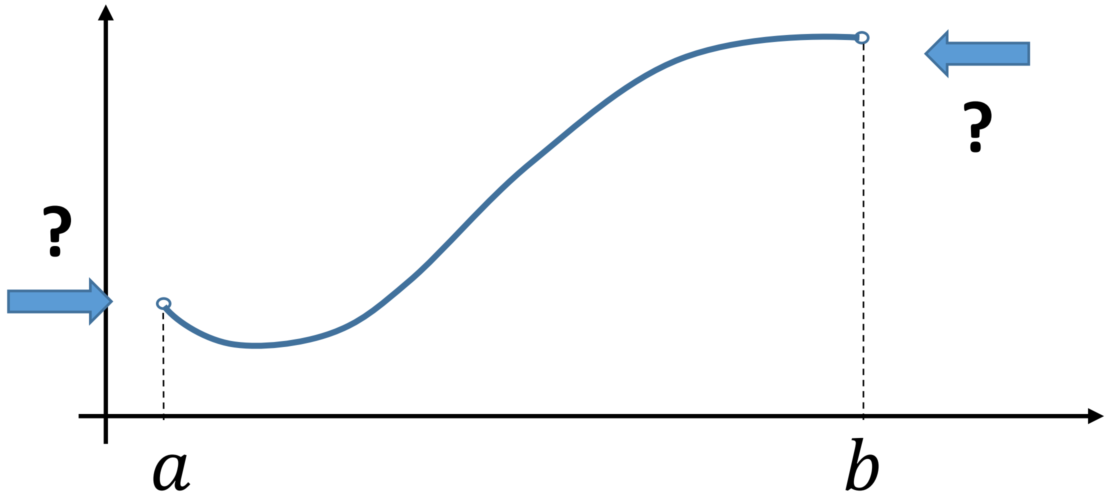
Continuidade

- Existe descontinuidade em...

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, se\ x \leq 4 \\ 7 + \dfrac{16}{x}, x > 4 \end{cases}$$

Continuidade em um intervalo

- Uma função é **contínua** quando for de fato **contínua** em todos os pontos de seu domínio (Ex.: $f(x) = x^2$)
- Mas muitas deseja-se saber se f é contínua em **um determinado intervalo de interesse**
  - $(a, b), (-\infty, a), (b, \infty), etc.$
  - Repare que por enquanto falamos de intervalos abertos

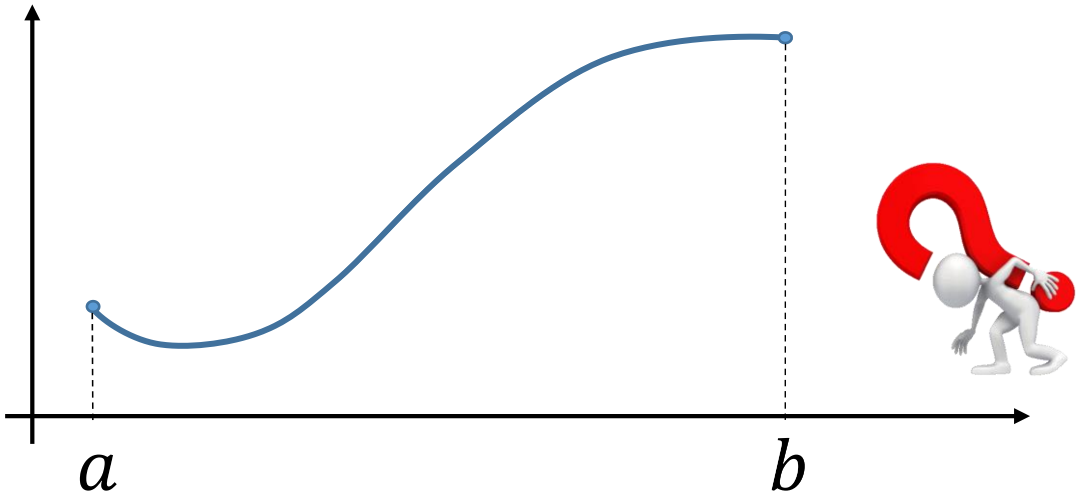


Continuidade em um intervalo

- Por exemplo...
- Verifique a continuidade no intervalo $(-1,1)$ para $f(x) = x^3$
- Idem para $g(x) = 1/x$ no intervalor $(2,3)$

Continuidade em um intervalo

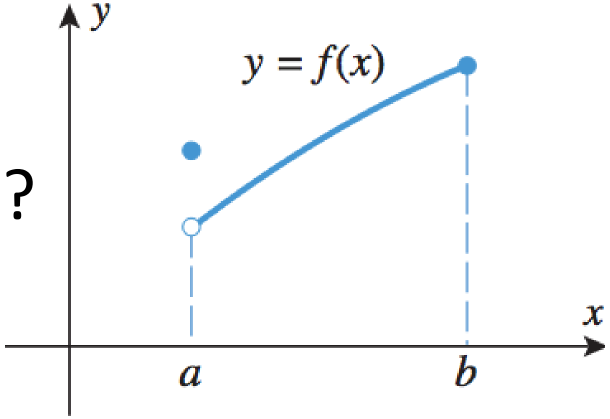
- Problema: intervalos fechados
  - $[a, b]$,$[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ ou $[a, +\infty)$
- Aceita-se que f é contínua numa **extremidade de um intervalo** se $f(x)$ nessa extremidade for igual ao limite lateral naquele ponto
- As seguintes condições precisam ser satisfeitas:
  - f é contínua em (a, b)
  - f é contínua à direita em a
  - f é contínua à esquerda em b

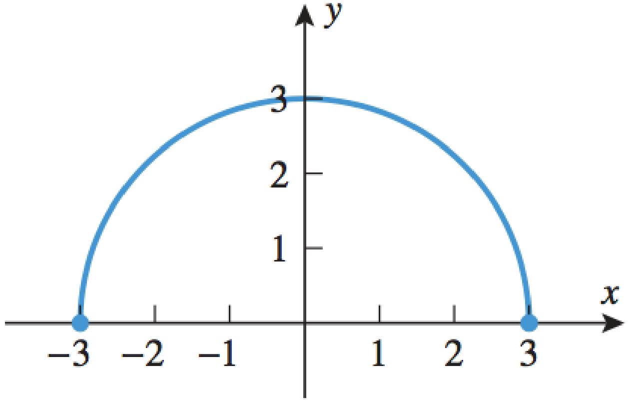


Continuidade em um intervalo

- Por exemplo…

$f(x)$ é continua no interval $[a, b]$?





- A função é contínua em (a, b) e na extremidade direita
  - $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
- Mas não é contínua na extremidade esquerda
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$
- O que pode ser dito sobre a continuidade da função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
  - Dica: observe o domínio

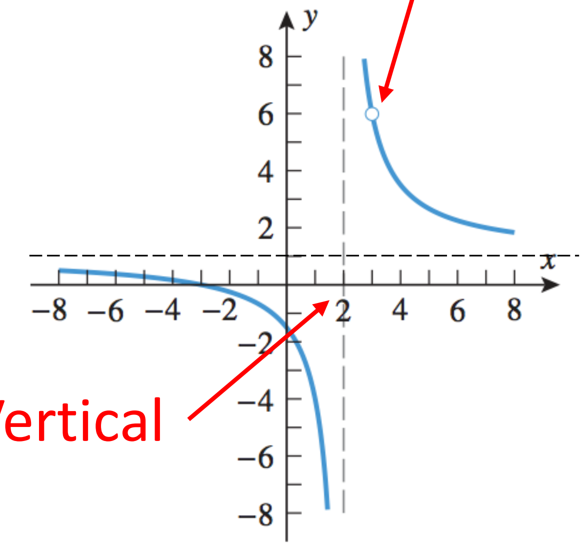
Propriedades das funções contínuas

- Se f e g forem contínuas em c e k for uma constante, então…
  - $f \pm g$ é contínua em c
  - fg é contínua em c
  - kf é contínua em c
  - $\frac{f}{g}$ é contínua em c se $g(c) \neq 0$

Propriedades das funções contínuas

- Para quais valores de x há uma descontinuidade (e o tipo) no gráfico de
  - $y = \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

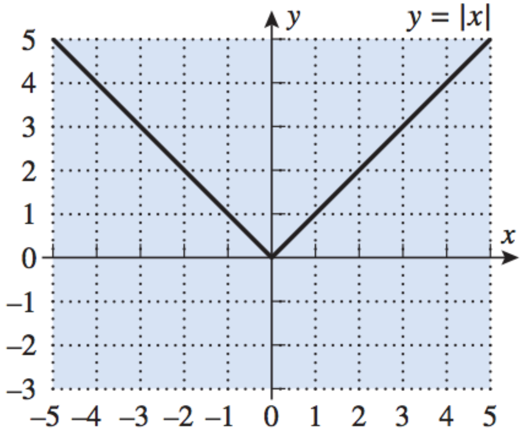
$f(3)$ não é definida



Assíntota Vertical

- Mostre que $y = |x|$ é contínua em toda parte

$$|x| = x, se\ x \geq 0$$
$$|x| = -x, se\ x < 0$$



Exercícios

- Valores de x para os quais $f(x)$ é contínua
  - $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$
  - $f(x) = \begin{cases} -2x+1, se\ x < 0 \\ x^2+1, se\ x \geq 0 \end{cases}$
  - $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}$

Exercícios

- Para que valor de k $f(x)$ é contínua entre $\pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, se\ x \leq 1 \\ kx^2, x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, se\ x \neq -2 \\ k, x = -2 \end{cases}$$