PTC-3440 Modelos Probabilísticos

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aulas 12 a 15 - 2020

PTC-EPUSP

Recordação

Para 2 eventos A e B lembramos que a probabilidade condicional de A dado B é:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ para } P(B) > 0.$$

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias discretas com função massa conjunta de probabilidade dada por $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ e função marginal para X_2 dada por $p_{X_2}(x_2)$. Chamando

$$A = \{X_1 = x_1\}, \ B = \{X_2 = x_2\},$$

segue que

$$P(A|B) = P(X_1 = x_1|X_2 = x_2) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(x, x_2)}{p_{X_2}(x_2)}$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Para 2 variáveis aleatórias discretas X_1 e X_2 com função massa conjunta $p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$, define-se a função massa condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ da seguinte forma:

$$p_{X_1|X_2}(x|x_2) = \frac{p_{X_1,X_2}(x,x_2)}{p_{X_2}(x_2)}$$

e o valor esperado condicional como

$$E(X_1|X_2 = x_2) = \sum_x x \frac{p_{X_1,X_2}(x,x_2)}{p_{X_2}(x_2)}.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Para o caso contínuo a definição é similar, suponha que 2 variáveis aleatórias contínuas X_1 e X_2 com função densidade de probabilidade conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$. Define-se a função densidade de probabilidade condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ da seguinte forma:

$$f_{X_1|X_2}(x|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

e o valor esperado condicional como

$$E(X_1|X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X_1,X_2}(x, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx.$$

Exemplo

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias de Poisson com médias λ_1 e λ_2, e independentes. Calcule o $E(X_1|X_1+X_2=n)$.

$$
\begin{aligned}
P(X_1=k|X_1+X_2=n) &= \frac{P(X_1=k, X_1+X_2=n)}{P(X_1+X_2=n)} \\
&= \frac{P(X_1=k, X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)} \\
&= \frac{P(X_1=k)P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}
\end{aligned}
$$

Exemplo

$X_1 + X_2$ é Poisson com média $\lambda_1 + \lambda_2$ (mostre isso). Logo

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!} / e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Logo $X_1|X_1+X_2$ é binomial com parâmetros n e $p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$. Com isso temos que

$$E(X_1|X_1+X_2=n)=n\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Exemplo

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis binomiais identicamente distribuídas e independentes com parâmetros n e p. Para $k \leq \min\{m, n\}$ calcule $P(X_1 = k | X_1 + X_2 = m)$. Como antes,

$$\begin{aligned} P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{P(X_1 = k, X_1 + X_2 = m)}{P(X_1 + X_2 = m)} \\ &= \frac{P(X_1 = k, X_2 = m - k)}{P(X_1 + X_2 = m)} \\ &= \frac{P(X_1 = k) P(X_2 = m - k)}{P(X_1 + X_2 = m)} \end{aligned}$$

Exemplo

$X_1 + X_2$ é Binomial com parâmetros $(2n, p)$. Logo

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = m) =$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k} / \binom{2n}{m} p^m (1-p)^{2n-m}$$

$$= \binom{n}{k} \binom{n}{m-k} / \binom{2n}{m}$$

Distribuição hipergeométrica com parâmetros (n, n, m).

Exemplo

Experimento pode levar a um entre 3 resultados resultados, sendo p_i a probabilidade do resultado i. n réplicas independentes desse experimento são realizadas. Seja X_i o número de vezes que o resultado i ocorre, $i = 1, 2, 3$. Calcule $P(X_1 = k|X_2 = m)$, e $E(X_1|X_2 = m)$.

Resposta: $X_1|X_2 = m$ é uma binomial com parâmetros $n - m$ e $\frac{p_1}{p_1+p_3}$.

Logo

$$P(X_1 = k|X_2 = m) =$$

$$\binom{n-m}{k} (\frac{p_1}{p_1 + p_3})^k (\frac{p_3}{p_1 + p_3})^{n-m-k}$$

Logo

$$E(X_1|X_2 = m) = (n - m)\frac{p_1}{p_1 + p_3}.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Podemos encarar $E(g(X_1)|X_2)$ como uma função da variável aleatória X_2 e portanto também uma variável aleatória. Da mesma forma pode-de encarar $P(X_1 \in A|X_2)$ como uma função da variável aleatória X_2 e portanto também uma variável aleatória. Tem-se o seguinte resultado importante.

$$E(g(X_1)) = E(E(g(X_1)|X_2))$$

e

$$P(X_1 \in A) = E(P(X_1 \in A|X_2))$$

Valor Esperado Condicional

$$E(g(X_1)|X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx_1$$

$$\begin{aligned} E(E(g(X_1)|X_2)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx_1 \right) f_{X_2}(x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1 = E(g(X_1)) \end{aligned}$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Calcule o valor esperado e a variância de uma variável aleatória geométrica com parâmetro p.
X é o número de jogadas até o 1o sucesso, e $Y = 1$ se a 1a jogada é sucesso, $Y = 0$ se for fracasso.

$$E(X|Y = 1) = 1$$

$$E(X|Y = 0) = 1 + E(X),$$

$$E(X) = 1 \times p + (1 + E(X)) \times (1 - p) \Longrightarrow E(X) = \frac{1}{p}.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

$$E(X^2|Y=1) = 1$$

$$E(X^2|Y=0) = E((1+X)^2) = E((1+2X+X^2)) = 1 + \frac{2}{p} + E(X^2),$$

$$E(X^2) = 1 \times p + (1 + \frac{2}{p} + E(X^2)) \times (1-p)$$

$$\implies E(X^2) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

$$Var(X) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Considere X e Y independentes e contínuas com função densidade de probabilidade $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Calcule $P(X \leq Y)$.

$$P(X \leq Y) = E(P(X \leq Y|Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq y|Y = y) f_Y(y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Suponha que no exemplo anterior X e Y independentes e exponenciais com parâmetros λ_X e λ_Y. Calcule $P(X \leq Y)$.

$$P(X \leq Y) = \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Um mineiro está preso em uma mina com 3 portas. A primeira leva à liberdade depois de 2 horas. A segunda volta à mina depois de 3 horas, e a terceira volta à mina depois de 5 horas. Seja N o número de horas até o mineiro sair da mina.

A) Supondo que o mineiro esquece as portas escolhidas sempre que volta à mina, calcule $E(N)$ e $Var(N)$.

B) Supondo que o mineiro lembra das portas escolhidas sempre que volta à mina, calcule $E(N)$ e $Var(N)$.

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

X - primeira porta escolhida, $X \in \{1, 2, 3\}$. Temos para o item a) que

$$
\begin{aligned}
&E(N|X=1) = 2, \\
&E(N|X=2) = 3 + E(N), \\
&E(N|X=3) = 5 + E(N), \\
&\qquad E(N) = \frac{1}{3}(2 + 3 + E(N) + 5 + E(N)) \Longrightarrow E(N) = 10.
\end{aligned}
$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

$$E(N^2|X=1) = 4,$$
$$E(N^2|X=2) = E((3+N)^2) = 9 + 6E(N) + E(N^2) = 69 + E(N^2),$$
$$E(N^2|X=3) = E((5+N)^2) = 25 + 10E(N) + E(N^2) = 125 + E(N^2),$$
$$E(N^2) = \frac{1}{3}(4 + 69 + E(N^2) + 125 + E(N^2)) \Longrightarrow E(N^2) = 198,$$
$$Var(N) = 198 - 10^2 = 98.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

X - primeira porta escolhida, $X \in \{1, 2, 3\}$. Temos para o item b) que

$$E(N|X=1) = 2,$$
$$E(N|X=2) = 3 + \frac{1}{2}(7+2) = \frac{15}{2},$$
$$E(N|X=3) = 5 + \frac{1}{2}(5+2) = \frac{17}{2},$$
$$E(N) = \frac{1}{3}(2 + \frac{15}{2} + \frac{17}{2}) \Longrightarrow E(N) = 6.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

N_i numero de horas até sair excluindo a porta i.

$$
\begin{aligned}
E(N^2|X=1) &= 4, \\
E(N^2|X=2) &= E((3+N_2)^2) = 9 + 6E(N_2) + E(N_2^2) = \frac{125}{2} \\
E(N^2|X=3) &= E((5+N_3)^2) = 25 + 10E(N_3) + E(N_3^2) = \frac{149}{2}, \\
E(N^2) &= \frac{1}{3}(4 + \frac{125}{2} + \frac{149}{2}) = 47, \\
Var(N) &= 47 - 36 = 11.
\end{aligned}
$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Sejam X e Y variáveis aleatórias e para uma função $e(y)$ defina

$$H(e) = E((g(X) - e(Y))^2).$$

Deseja-se resolver o seguinte problema (problema de filtragem):

$$min_{e(.)} H(e) = min_{e(.)} E((g(X) - e(Y))^2)$$

Solução ótima e^*:

$$e^*(Y) = E(g(X)|Y).$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Defina o produto interno $< Z_1; Z_2 >= Cov(Z_1, Z_2)$. Mostre que

$$< g(X) - e^*(Y); e(Y) >= 0$$

(isto é, $g(X) - e^*(Y) \perp e(Y)$), e como isso mostre que $e^*(Y)$ é a solução ótima desejada.

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

$$
\begin{aligned}
< g(X) - e^*(Y); e(Y) > &= E((g(X) - e^*(Y))e(Y)) \\
&= E(E((g(X) - e^*(Y))e(Y)|Y))
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
E((g(X) - e^*(Y))e(Y)|Y) &= E((g(X) - e^*(Y))|Y)e(Y) \\
&= (E(g(X)|Y) - E(e^*(Y)|Y))e(Y) \\
&= (E(g(X)|Y) - e^*(Y))e(Y) \\
&= (E(g(X)|Y) - E(g(X)|Y))e(Y) = 0.
\end{aligned}
$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Logo

$$\begin{aligned}\|g(X) - e(Y)\|^2 &= < g(X) - e(Y); g(X) - e(Y) > \\ &= < g(X) - e^*(Y) + \tilde{e}(Y); g(X) - e^*(Y) + \tilde{e}(Y) >\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{e}(Y) = e^*(Y) - e(Y)$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Portanto

$$\begin{aligned}\|g(X) - e(Y)\|^2 &= \|g(X) - e^*(Y)\|^2 + \|\tilde{e}(Y)\|^2 \\ &+ 2 < g(X) - e^*(Y); \tilde{e}(Y) > \\ &= \|g(X) - e^*(Y)\|^2 + \|\tilde{e}(Y)\|^2\end{aligned}$$

pela ortogonalidade $g(X) - e^*(Y) \perp \tilde{e}(Y)$, e como o primeiro termo não depende da função e, o mínimo é atingindo quando se faz $\tilde{e}(Y) = 0$, isto é

$$e(Y) = e^*(Y).$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Suponha que a função conjunta de X_1 e X_2 seja

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 4x_2(x_1 - x_2)e^{-(x_1+x_2)} & 0 < x_1 < \infty,\ 0 \leq x_2 < x_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Calcule $E(X_1|X_2 = x_2)$.

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Nota-se que

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{x_2}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1 = \int_{x_2}^{\infty} 4x_2(x_1-x_2)e^{-(x_1+x_2)}dx_1$$
$$= 4x_2e^{-2x_2}.$$

Obtém-se que para $x_1 > x_2$,

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{4x_2(x_1-x_2)e^{-(x_1+x_2)}}{4x_2e^{-2x_2}} = (x_1-x_2)e^{-(x_1-x_2)}.$$

Portanto,

$$E(X_1|X_2=x_2) = \int_{x_2}^{\infty} x_1(x_1-x_2)e^{-(x_1-x_2)}dx_1 = 2+x_2.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

$$X(k) = \begin{cases} 1 & \text{se subiu no instante } k \\ 0 & \text{se desceu no instante } k \end{cases}.$$

Logo $S(t) = S(t-1)u^{X(t)}d^{1-X(t)}$ e $N(t)$ é uma variável binomial com parâmetros t e p. Segue que

$$P(N(t) = n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, n = 0, \ldots, t.$$

e a probabilidade do valor do ativo é dada por

$$P(S(t) = S(0)u^n d^{t-n}) = P(N(t) = n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, n = 0, \ldots, t.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Considere um ativo livre de risco com rentabilidade $1 + r$. Para não termos arbitragens devemos ter

$$u > 1 + r > d.$$

Caso isso não ocorresse poderíamos montar uma operação de arbitragem (carteira no instante $t = 0$ vale zero $V_0 = 0$ e no instante seguinte, $V_1 > 0$ com probabilidade 1).

O Modelo Binomial para Apreçamento

Opção call (européia): é um contrato que dá ao proprietário o direito de comprar um número fixo de determinada ação a um preço fixado K em uma data específica T. Na data de vencimento, o valor C_T da opção call é:

$$C_T = \max\{0, S_T - K\} = (S_T - K)^+.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Opção put (européia): é um contrato que dá ao proprietário o direito de vender um número fixo de determinada ação a um preço fixado K em uma data específica T. Na data de vencimento, o valor P_T da opção put é:

$$P_T = \max\{0, K - S_T\} = (K - S_T)^+.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

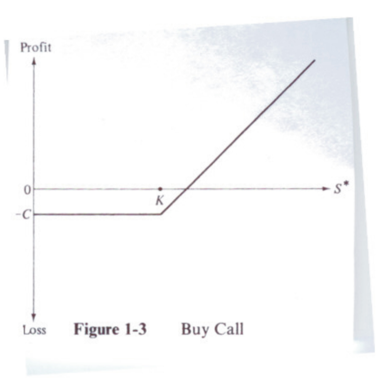

Figura: Payoff da call compra

O Modelo Binomial para Apreçamento

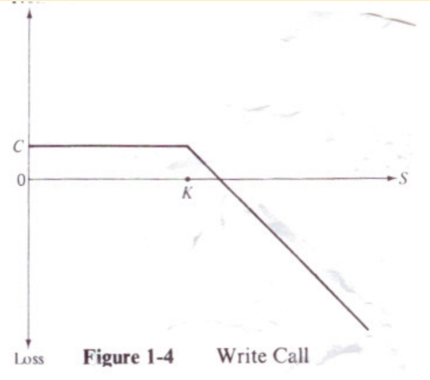

Figura: Payoff da call venda

O Modelo Binomial para Apreçamento

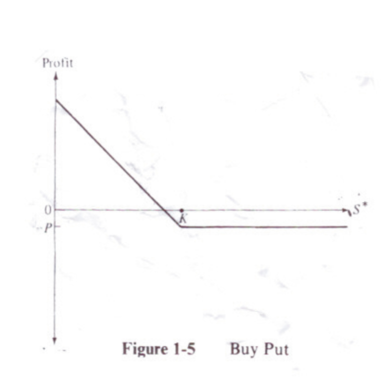

Figura: Payoff da put compra

O Modelo Binomial para Apreçamento

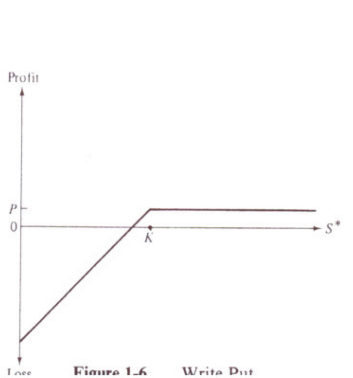

Figura: Payoff da put venda

O Modelo Binomial para Apreçamento

Como dar um valor a uma opção? Vamos considerar um modelo binomial com $T = 1$. Nesse caso o valor da opção inicial é C e no instante $T = 1$ pode valer C_u se a ação subir, e C_d se a ação descer. Por exemplo, no caso de uma call,

$$
\begin{aligned}
C_u &= (uS_0 - K)^+ \text{ se a ação subir} \\
C_d &= (dS_0 - K)^+ \text{ se a ação descer.}
\end{aligned}
$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Vamos montar um portfolio replicante contendo Δ unidades da ação e B do ativo livre de risco. Queremos determinar Δ e B de forma a replicar o valor da opção no instante $T = 1$. Logo em $T = 0$

$$V_0 = B + S_0\Delta$$

e no instante $T = 1$

$$\begin{aligned} V_u &= (1+r)B + uS_0\Delta = C_u \text{ se a ação subir} \\ V_d &= (1+r)B + dS_0\Delta = C_d \text{ se a ação descer.} \end{aligned}$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Com isso obtemos que

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0},$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}.$$

Para não termos arbitragens, devemos ter:

$$\begin{aligned} C = V_0 &= B + \Delta S_0 \\ &= \frac{1}{1+r}(qC_u + (1-q)C_d), \end{aligned}$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

onde

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} > 0.$$

Importante: não depende de p.

q é conhecida como a probabilidade neutra ao risco. É a única probabilidade $\tilde{q}$ tal que

$$E_{\tilde{q}}(S_{t+1}|S_t) = \tilde{q}uS_t + (1 - \tilde{q})dS_t = (1 + r)S_t.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

A fórmula acima nos diz que

$$C = \frac{1}{1+r} E_q(C_1)$$

Isso sugere que em geral devemos ter

$$C = \frac{1}{(1+r)^T} E_q(C_T).$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

No caso de uma call, $C_T = (S_T - K)^+$, com

$$S_T = S_0 u^{N(T)} d^{T-N(T)},$$

$$P(N(T) = n) = \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}, n = 0, \ldots, T.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Logo,

$$C = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{n=0}^{T} (S_0 u^n d^{T-n} - K)^+ \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Temos que

$$S_0 u^n d^{T-n} > K \Leftrightarrow ln(S_0 d^T) + n\, ln(\frac{u}{d}) > ln(K) \Leftrightarrow n > \frac{ln(\frac{K}{S_0 d^T})}{ln(\frac{u}{d})}.$$

Seja

$$\hat{n} = min\{n \in \{0, \ldots, T\}; n > \frac{ln(\frac{K}{S_0 d^T})}{ln(\frac{u}{d})}\}.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Temos que

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{n=\hat{n}}^{T} (S_0 u^n d^{T-n} - K)^+ \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \\
&= S_0 \sum_{n=\hat{n}}^{T} \binom{T}{n} (\frac{uq}{1+r})^n (\frac{(1-q)d}{1+r})^{T-n} \\
&- \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{n=\hat{n}}^{T} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \\
&= S_0 \sum_{n=\hat{n}}^{T} \binom{T}{n} \hat{q}^n (1-\hat{q})^{T-n} - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{n=\hat{n}}^{T} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n},
\end{aligned}
$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

onde

$$\hat{q} = \frac{uq}{1+r}.$$

Note que

$$1-\hat{q} = 1-\frac{uq}{1+r} = \frac{1+r-uq}{1+r} = \frac{1+r-u\frac{1+r-d}{u-d}}{1+r}$$
$$= \frac{(1+r)(u-d)-u(1+r-d)}{(1+r)(u-d)} = \frac{d(u-(1+r))}{(1+r)(u-d)} = \frac{(1-q)d}{1+r}.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

A fórmula de apreçamento binomial de uma opção call é:

$$C = S_0 \Phi(\hat{n}, T, \hat{q}) - \frac{K}{(1+r)^T} \Phi(\hat{n}, T, q).$$

onde

$$q = \frac{1+r-d}{u-d},$$
$$\hat{q} = \frac{uq}{1+r},$$
$$\hat{n} = min\{n \in \{0, \ldots, T\}; n > \frac{ln(\frac{K}{S_0 d^T})}{ln(\frac{u}{d})}\},$$

e

$$\Phi(i, t, \ell) = \sum_{n=i}^{t} \binom{t}{n} \ell^n (1-\ell)^{t-n}.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

Considere o seguinte exemplo: $S_0 = 80$, $T = 3$, $K = 80$, $u = 1,5$, $d = 0,5$, $r = 0,1$. Segue que

$$q = 0,6$$

e o valor da opção call em $t = 0$ deve ser

$$C = 34,065.$$

O Modelo Binomial para Apreçamento

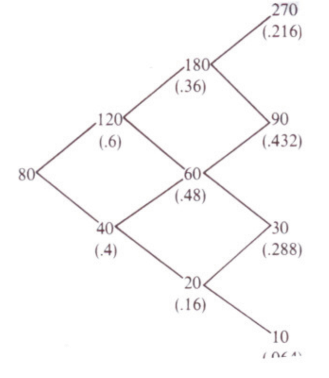

Figura: Evolução do Valor da Ação

O Modelo Binomial para Apreçamento

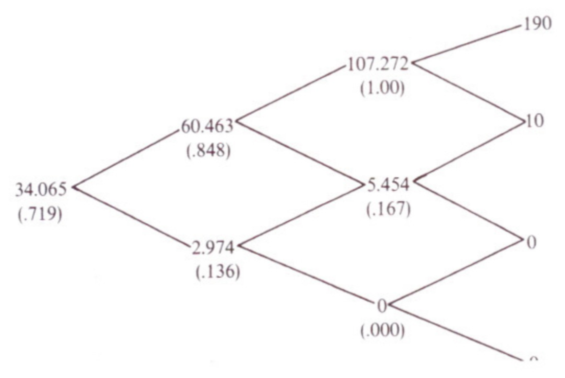

Figura: Valor da Opção Call