PTC-5720 Controle Estocástico

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aula 6 - 2020

PTC-EPUSP

Processos Estocásticos

Um processo estocástico $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas em $\mathbb{T}$, isto é, para cada $t \in \mathbb{T}$, $X(t)$ é uma variável aleatória. Por exemplo, poderíamos ter $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, ...\}$ ou $\mathbb{T} = [0, \infty)$.

Processos Estocásticos

Vamos considerar

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$$

ou

$$\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \ldots\}.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \mu(k) &= E(X_k), \\ R(k,l) &= Cov(X_k, X_l) = E((X_k - \mu(k))(X_l - \mu(l))'). \end{aligned}$$

onde X_k é um vetor d-dimensional, $R(k,l)$ (função covariância) é uma matriz $d \times d$. No caso $d = 1$ escrevemos $r(k,l)$.

Processos Estocásticos

Define-se o processo centrado como sendo $X_k^c = X_k - \mu(k)$. Note que X_k^c tem média nula e a mesma função covariância que X_k. Note que

$$R(k, l) = R'(l, k)$$

e que

$$E((\sum_{i=1}^{n} a_i' X_{k_i}^c)^2) = \sum_{i,j} a_i' R(k_i, k_j) a_j \geq 0$$

Processos Estocásticos

O processo X_k é dito ser normal se todas as suas distribuições finitas são normais. Isto implica que, para instantes $t_1, \ldots, t_n$ quaisquer, o vetor aleatório *nd* dimensional

$$X'_{t_1,\ldots,t_n} = (X_{t_1 1}, \ldots, X_{t_1 d}, \ldots, X_{t_n 1}, \ldots, X_{t_n d})$$

é normal com média $\mu' = (\mu(t_1), \ldots, \mu(t_n))$ e matriz de covariância

$$Q = \begin{pmatrix} R(t_1, t_1) & \ldots & R(t_1, t_n) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ R(t_n, t_1) & \ldots & R(t_n, t_n) \end{pmatrix}$$

Processos Estacionários

Um processo $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é dito ser estacionário se suas distribuições não variam com o tempo, isto é, para qualquer $k_0, k_1, \ldots, k_n$ as distribuições dos vetores n dimensional (no caso de $d = 1$)

$$\begin{pmatrix} X_{k_1} \\ \vdots \\ X_{k_n} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X_{k_1+k_0} \\ \vdots \\ X_{k_n+k_0} \end{pmatrix}$$

são as mesmas.

Processos Estacionários

Portanto todos os X_k tem as mesmas distribuições que, por exemplo, X_0. Logo, $\mu(k) = \mu(0)$ e para qualquer k_0, k, l,

$$R(k, l) = R(k + k_0, l + k_0) = R(k - l, 0).$$

Define-se agora $\widetilde{R}(l) = E(X_k X'_{k-l}) = R(l, 0)$. Note que $R(k, l) = \widetilde{R}(k - l)$. Temos então que

$$\widetilde{R}(-l) = R(-l, 0) = R(0, l) = R'(l, 0) = \widetilde{R}'(l)$$
$$\Rightarrow \widetilde{R}(-l) = \widetilde{R}'(l)$$

Processos Estacionários

A forma mais simples de um processo estacionário é a sequência $\{X_0, X_1, \ldots\}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Se F representa a distribuição comum, então a distribuição do vetor aleatório $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})'$ é dada por $(d = 1)$

$$\begin{aligned} F_{t_1,\ldots,t_n}(a_1, \ldots, a_n) &= P(X_{t_1} \leq a_1, \ldots, X_{t_n} \leq a_n) \\ &= P(X_{t_1} \leq a_1) \ldots P(X_{t_n} \leq a_n) = F(a_1) \ldots F(a_n) \end{aligned}$$

A média a a covariância são dadas por: $\mu(k) = E(X_0)$, $R(k, l) = Cov(X_0)$ para $k = l$, 0 caso contrário.

Processos Estacionários

O processo acima é conhecido como um sequência de ruído branco. Uma processo $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ com média constante e função covariância satisfazendo

$$R(k, l) = \widetilde{R}(k - l)$$

para alguma função $\widetilde{R}$ é dito ser fracamente estacionário ou estacionário no sentido amplo.

Exercício: Dê um exemplo de um processo que seja estacionário no sentido amplo, mas que não seja estacionário.

Processos Estacionários

Uma sequência de ruído branco no sentido amplo $\{X_0, X_1, \dots\}$ é um processo estacionário no sentido amplo com a média igual a zero e a função covariância dada por $\widetilde{R}(0) = Q$, $\widetilde{R}(k) = 0$ para $k \neq 0$ onde $Q \geq 0$. Ou seja, $\{X_0, X_1, \dots\}$ tem a mesma média e covariância (0 e Q) e que X_k, X_l são descorrelacionados para $k \neq l$. A matriz Q sempre pode fatorada na forma $Q = AA'$ onde A é $d \times m$, para algum $m \leq d$, e portanto

$$X_k = AY_k$$

onde $\{Y_0, Y_1, \dots\}$ é uma sequência m-dimensional de ruído branco no sentido amplo com média nula e covariância igual a identidade.

Equações Estocásticas a Diferenças

Considere a seguinte equação (A_0 não singular)

$$A_0 y_k + A_1 y_{k-1} + \ldots + A_n y_{k-n} = B_0 w_k + \ldots + B_n w_{k-n}$$

De forma mais compacta (z^{-1} é o operador atraso):

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) y_k &= B(z^{-1}) w_k, \\ A(z^{-1}) &= A_0 + A_1 z^{-1} + \ldots + A_n z^{-n}, \\ B(z^{-1}) &= B_0 + B_1 z^{-1} + \ldots + B_n z^{-n}, \end{aligned}$$

Condições Iniciais

Duas formas de condições iniciais são consideradas:

1. São fornecidos os valores y_l, $l = -1, \ldots, -n$, w_j, $j = -1, \ldots, -n$.
2. Sequência infinita passada $\{w_0, w_{-1}, w_{-2}, \ldots\}$. Neste caso

$$y_k = T(z^{-1})w_k$$

onde

$$T(z^{-1}) = (g(z^{-1}))^{-1}G(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i z^{-i}$$

no qual $g(z^{-1}) = det(A(z^{-1}))$ e $G(z^{-1}) = (Adj(A(z^{-1})))B(z^{-1})$. Para isso se deve ter os zeros de $det(A(\sigma))$ fora do disco unitário fechado.

Condições Iniciais

Exemplo

$$y_k - a y_{k-1} = w_k,$$
$$A(\sigma) = 1 - a\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma = 1/a$$

Para $|a| < 1$ segue que

$$\frac{1}{1 - a\sigma} = 1 + a\sigma + (a\sigma)^2 + (a\sigma)^3 + \ldots \Rightarrow T_i = a^i$$

$$y_k = \sum_{i=0}^{\infty} (T_i z^{-i}) w_k = \sum_{i=0}^{\infty} a^i w_{k-i}$$

Proposição

Seja o processo definido por $A(z^{-1})y_k = B(z^{-1})w_k$, onde $\{w_k\}$ é um ruído banco no sentido amplo com média nula e matriz de covariância $\mathbf{W}$. Considere que os zeros de $det(A(\sigma))$ estejam fora do disco unitário fechado. Temos que $\{y_k\}$ tem média nula e é estacionário no sentido amplo. O processo tem função covariância dada por:

$$E(y_{k+\ell}y_k) = R(\ell) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} T_{j+\ell}\mathbf{W}T_j' & \ell \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} T_j\mathbf{W}T_{j-\ell}' & \ell \leq 0 \end{cases}.$$

Proposição

Fazendo $\iota = i - \ell$,

$$
\begin{aligned}
E(y_{k+\ell}y_k') &= E((\sum_{i=0}^{\infty} T_i w_{k+\ell-i})(\sum_{j=0}^{\infty} w_{k-j}' T_j')) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_i E(w_{k+\ell-i} w_{k-j}') T_j' \\
&= \sum_{\iota=-\ell}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{\iota+\ell} E(w_{k-\iota} w_{k-j}') T_j' \\
&= \sum_{\iota=-\ell}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{\iota+\ell} \mathbf{W} \delta(j-\iota) T_j'
\end{aligned}
$$

onde $\delta(0) = 1$, $\delta(k) = 0$ para $k \neq 0$.

Proposição

Para $\ell \geq 0$,

$$\sum_{\iota=-\ell}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{\iota+\ell} \mathbf{W} \delta(j-\iota) T_j' = \sum_{j=0}^{\infty} T_{\iota+\ell} \mathbf{W} T_j'$$

e para $\ell < 0$,

$$\sum_{\iota=-\ell}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} T_{\iota+\ell} \mathbf{W} \delta(j-\iota) T_j' = \sum_{j=-\ell}^{\infty} T_{j+\ell} \mathbf{W} T_j'$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} T_j \mathbf{W} T_{j-\ell}'$$

Exemplo

No nosso exemplo, $T_i = a^i$. Segue que para $\ell \geq 0$,

$$R(\ell) = \sum_{j=0}^{\infty} a^{j+\ell} a^j = a^\ell \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j} = \frac{a^\ell}{1 - a^2}$$

e para $\ell < 0$,

$$R(\ell) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j a^{j-\ell} = \frac{a^{-\ell}}{1 - a^2}.$$

Logo

$$R(\ell) = \frac{a^{|\ell|}}{1 - a^2}$$

Modelo Estocástico no Espaço de Estados

Considere o modelo estocástico no espaço de estados:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Cw_k, \\ y_k &= Hx_k + Gw_k. \end{aligned}$$

Suponha que $\{w_k\}$ seja uma sequência de ruído branco no sentido amplo, com $E(w_k) = 0$, $Cov(w_k) = I$ para todo k e que $E(x_0) = \mu_0$, $Cov(x_0) = P_0$. Defina $\mu_k = E(x_k)$, $P_k = Cov(x_k)$. Temos que

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} &= A\mu_k \\ P_{k+1} &= AP_kA' + CC'. \end{aligned}$$

Modelo Estocástico no Espaço de Estados

Como $E(w_k) = 0$ é fácil verificar que

$$\mu_{k+1} = E(x_{k+1}) = AE(x_k) + CE(w_k) = A\mu_k.$$

Definindo a variável centrada $x_k^c = x_k - \mu_k$ segue que

$$x_{k+1}^c = Ax_k^c + Cw_k.$$

Temos que $P_k = E(x_k^c(x_k^c)')$. Note que

$$E(x_k^c w_k') = 0.$$

Modelo Estocástico no Espaço de Estados

Logo

$$P_{k+1} = E((Ax_k^c + Cw_k)(Ax_k^c + Cw_k)') = AP_kA' + CC'$$

Note que (vamos retirar o ^{c} por simplicidade)

$$x_k = A^j x_{k-j} + A^{j-1}Cw_{k-j} + \ldots + Cw_{k-1}.$$

Logo,

$$E(x_k x_{k-j}') = E((A^j x_{k-j} + A^{j-1}Cw_{k-j} + \ldots + Cw_{k-1})x_{k-j}') = A^j P_{k-j}$$

Modelo Estocástico no Espaço de Estados

Temos também que

$$E(x_k w'_{k-j}) = E((A^j x_{k-j} + A^{j-1} C w_{k-j} + \ldots + C w_{k-1}) w'_{k-j}) = A^{j-1} C$$

Segue que para $1 \leq j \leq k$,

$$\begin{aligned} Cov(y_k, y_{k-j}) &= E(y_k y'_{k-j}) = E((Hx_k + Gw_k)(Hx_{k-j} + Gw_{k-j})') \\ &= HE(x_k x'_{k-j})H' + HE(x_k w'_{k-j})G' + GE(w_k w'_{k-j})G' \\ &= HA^j P_{k-j} H' + HA^{j-1} CG' \end{aligned}$$

Para $j = 0$ é fácil verificar que

$$Cov(y_k) = HP_k H' + GG'.$$

Equação de Lyapunov

Suponha que A seja uma matriz estável, e $\mathcal{M}$ o espaço de matrizes $n \times n$. Para uma matriz $D \in \mathcal{M}$ defina $\widetilde{P}(D)$ como sendo

$$\widetilde{P}(D) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k D (A^k)'$$

Pela hipótese de estabilidade de A, $\widetilde{P}(D)$ é bem definida. Segue que

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(D) &= D + \sum_{k=1}^{\infty} A^k D (A^k)' \\
&= D + A\Big(\sum_{k=0}^{\infty} A^k D (A^k)'\Big) A' = D + A\widetilde{P}(D)A'.
\end{aligned}$$

Equação de Lyapunov

Suponha que A seja uma matriz estável. Então para qualquer P_0 segue que $P_k \longrightarrow P$ onde P é a única solução da equação de Lyapunov:

$$V = AVA' + CC'$$

Note que resolvendo iterativamente a equação

$$P_{k+1} = AP_kA' + CC'$$

segue que

$$P_k = A^k P_0 (A^k)' + \sum_{j=0}^{k-1} A^j CC' (A^j)'.$$

Equação de Lyapunov

Como A é estável, $A^k P_0 (A^k)' \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$. Logo

$$P_k \longrightarrow P := \sum_{j=0}^{\infty} A^j CC'(A^j)'.$$

e P satisfaz a equação de Lyapunov. Suponha que temos outra solução

$$\bar{P} = A\bar{P}A' + CC'.$$

Fazendo $P_0 = \bar{P}$, segue que $P_k = \bar{P}$ para todo k, e como $P_k \longrightarrow P$ segue que $\bar{P} = P$.

Equação de Lyapunov

Considere $\{w_k\}$ uma sequência de ruído branco no sentido amplo.
Considere o sistema

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} w_k$$

1. A matriz A é estável? Para isso determine os aultovalores de A.
2. Se A é estável, determine a solução P da equação de Lyapunov e verifique por iteração numérica que $P_k \longrightarrow P$, onde

$$P_{k+1} = AP_kA' + CC'.$$