Aulas 04

tensão e deformação

carregamento axial

ZEB 0566

Resistência dos Materiais

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

FZEA USP

Prof. João Adriano Rossignolo

Prof. Holmer Savastano Júnior

tensão e deformação

efeito da temperatura

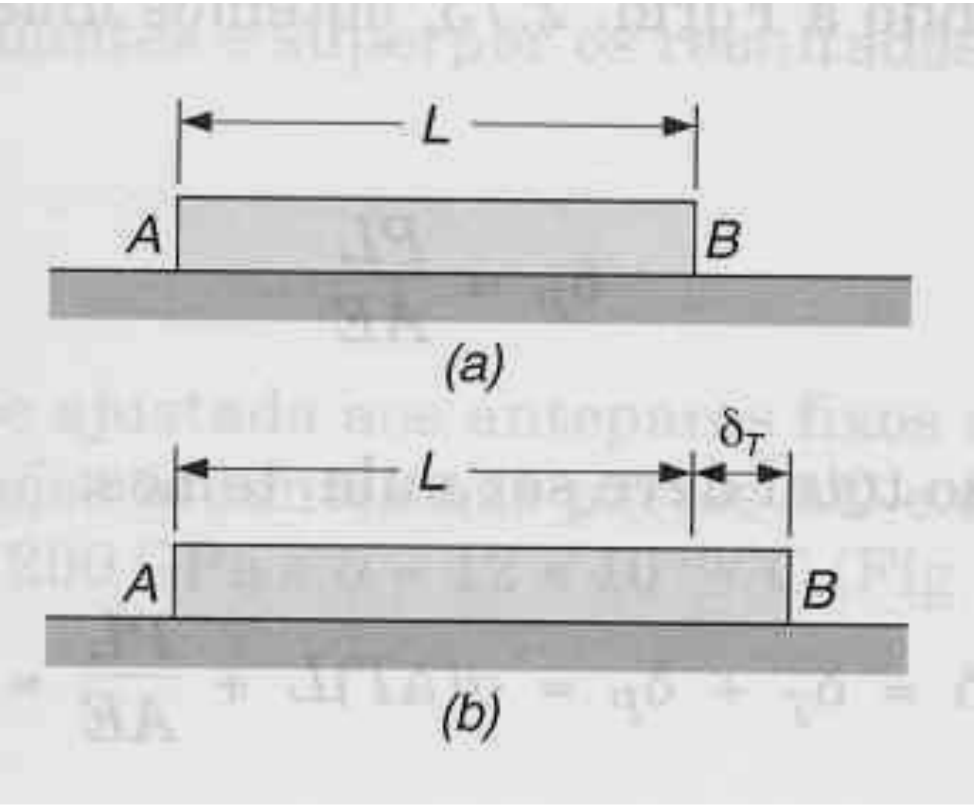
EFEITO DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

$$\delta_T = \alpha \left(\Delta T\right) L$$

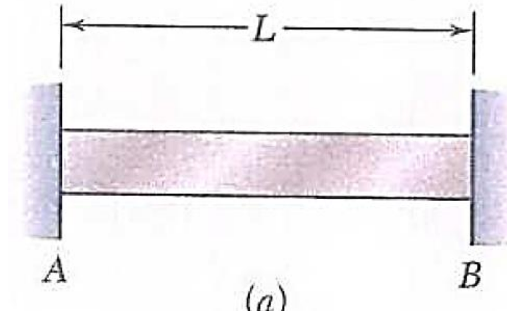
$$\varepsilon_T = \alpha \, \Delta T$$

ΔT (ºC) = T_f - T_i

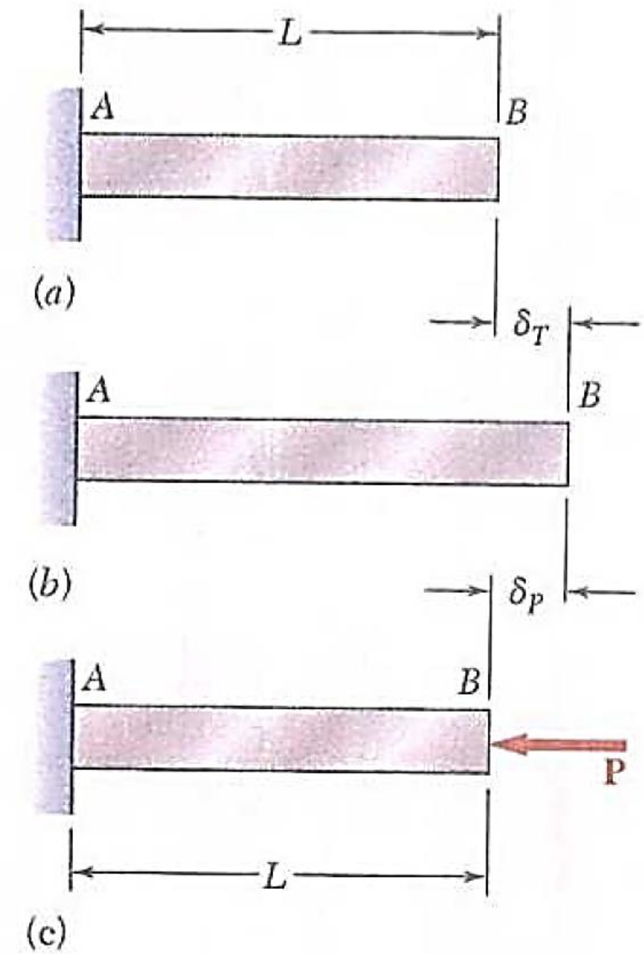
$\alpha = 12 \times 10^{-6}/°C$ para o aço.



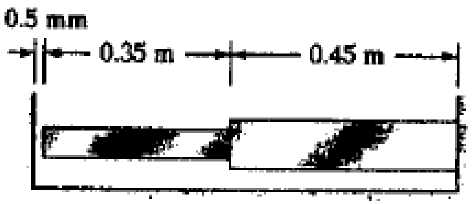
Barra com extremidades fixas:
Método da superposição



ΔT (ºC) > 0



$$\delta = \delta_T + \delta_P$$



Bronze
$A = 1500\ \text{mm}^2$
$E = 105$ GPa
$\alpha = 21.6 \times 10^{-6}/°\text{C}$

Aluminum
$A = 1800\ \text{mm}^2$
$E = 73$ GPa
$\alpha = 23.2 \times 10^{-6}/°\text{C}$

2.57 Determine (*a*) the compressive force in the bars shown after a temperature rise of 96°C, (*b*) the corresponding change in length of the bronze bar.

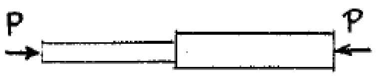
SOLUTION

Calculate free thermal expansion

$$\delta_T = L_b \alpha_b (\Delta T) + L_a \alpha_a \Delta T$$

$$= (0.35)(21.6\times10^{-6})(96) + (0.45)(23.2\times10^{-6})(96)$$

$$= 1.728 \times 10^{-3}\ \text{m}$$



Constrained expansion

$$\delta = 0.5\ \text{mm} = 0.500\times10^{-3}\ \text{m}$$

Shortening due to induced compressive force P

$$\delta_P = 1.728\times10^{-3} - 0.500\times10^{-3} = 1.228\times10^{-3}\ \text{m}$$

But, in terms of P

$$\delta_P = \frac{PL_b}{A_bE_b} + \frac{PL_a}{A_aE_a} = \left(\frac{L_b}{A_bE_b} + \frac{L_a}{A_aE_a}\right)P$$

$$= \left(\frac{0.35}{(1500\times10^{-6})(105\times10^{9})} + \frac{0.45}{(1800\times10^{-6})(73\times10^{9})}\right)P$$

$$= 5.6496\times10^{-9}\ P$$

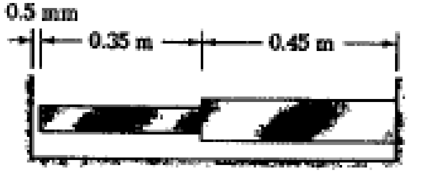
(a) Equating $\quad 5.6496\times10^{-9} P = 1.228\times10^{-3} \quad \therefore\ P = 217.46\times10^{3}\ \text{N}$
$= 217$ kN

(b) $$\delta_b = L_b\alpha_b(\Delta T) - \frac{PL_b}{A_bE_b}$$

$$= (0.35)(21.6\times10^{-6})(96) - \frac{(217.46\times10^{3})(0.35)}{(1500\times10^{-6})(105\times10^{9})}$$

$$= 725.76\times10^{-6} - 483.24\times10^{-6} = 242.5\times10^{-6}\ \text{m}$$

$= 0.2425$ mm



Bronze
$A = 1500\ \text{mm}^2$
$E = 105$ GPa
$\alpha = 21.6 \times 10^{-6}/°C$

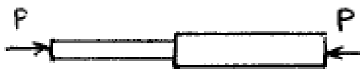
Aluminum
$A = 1800\ \text{mm}^2$
$E = 73$ GPa
$\alpha = 23.2 \times 10^{-6}/°C$

2.58 Knowing that a 0.5-mm gap exists when the temperature is 20 °C, determine (*a*) the temperature at which the normal stress in the aluminum bar will be equal to -90 MPa, (*b*) the corresponding exact length of the aluminum bar.

SOLUTION

$$\sigma_a = -90 \times 10^6\ \text{Pa} \qquad A_a = 1800 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

$$P = -\sigma_a A_a = (90 \times 10^6)(1800 \times 10^{-6}) = 162 \times 10^3\ \text{N}$$



Shortening due to P

$$\delta_P = \frac{PL_b}{E_b A_b} + \frac{PL_a}{E_a A_a}$$

$$= \frac{(162 \times 10^3)(0.35)}{(105 \times 10^9)(1500 \times 10^{-6})} + \frac{(162 \times 10^3)(0.45)}{(73 \times 10^9)(1800 \times 10^{-6})}$$

$$= 914.79 \times 10^{-6}\ \text{m} = 0.91479\ \text{mm}$$

Available length for thermal expansion

$$\delta_T = 0.5\ \text{mm} + 0.91479\ \text{mm} = 1.41479\ \text{mm} = 1.41479 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

But $\delta_T = L_b \alpha_b (\Delta T) + L_a \alpha_a (\Delta T)$

$$= (0.35)(21.6 \times 10^{-6})\Delta T + (0.45)(23.2 \times 10^{-6})\Delta T$$

$$= 18.00 \times 10^{-6} (\Delta T)$$

(a)

$$T_{hot} = T_{cold} + \Delta T$$

$$= 20 + 78.6 = 98.6\ °C$$

(b) $$\delta_a = L_a \alpha_a (\Delta T) - \frac{PL_a}{E_a A_a}$$

$$= (0.45)(23.2 \times 10^{-6})(78.6) - \frac{(162 \times 10^3)(0.45)}{(73 \times 10^9)(1800 \times 10^{-6})}$$

$$= 820.58 \times 10^{-6} - 554.79 \times 10^{-6} = 265.78 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

$$L_{exact} = L_a + \delta_a = 0.45\ \text{m} + 265.78 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

$$= 0.450266\ \text{m} = 450.0266\ \text{mm}$$

EXEMPLO 2.6

Determine os valores da tensão nas partes AC e CB da barra de aço mostrada (Fig. 2.37) quando a temperatura da barra é de $-45°C$, sabendo que ambos os apoios rígidos estão ajustados quando a temperatura é de $+20°C$. Use os valores $E = 200$ GPa e $\alpha = 12 \times 10^{-6}/°C$ para o aço.

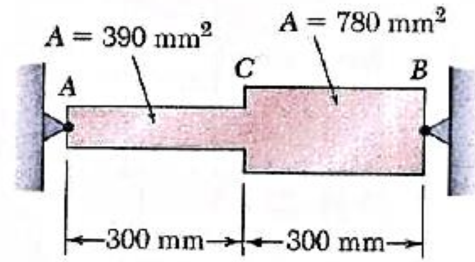


Fig. 2.37

Primeiro determinamos as reações nos apoios. Como o problema é estaticamente indeterminado, separamos a barra de seu apoio em B e a deixamos mudar com a temperatura

$$\Delta T = (-45°C) - (20°C) = -65°C$$

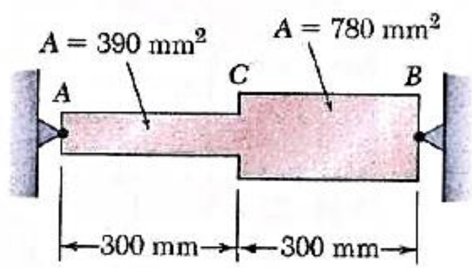


Fig. 2.37

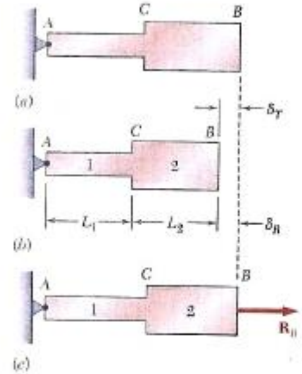


Fig. 2.38

A deformação correspondente (Fig. 2.38*b*) é

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L = (12 \times 10^{-6}/°C)(-65°C)(600 \text{ mm})$$
$$= -0{,}468 \text{ mm}$$

Aplicando agora a força desconhecida $\mathbf{R}_B$ na extremidade B (Fig. 2.38*c*), usamos a Equação (2.8) para expressar a deformação δ_R correspondente. Substituindo

$$L_1 = L_2 = 300 \text{ mm}$$
$$A_1 = 390 \text{ mm}^2 \quad A_2 = 780 \text{ mm}^2$$
$$P_1 = P_2 = R_B \quad E = 200 \text{ GPa} = 200 \text{ kN/mm}^2$$

na Equação (2.8), escrevemos

$$\delta_R = \frac{P_1L_1}{A_1E} + \frac{P_2L_2}{A_2E}$$
$$= \frac{R_B}{200 \text{ kN / mm}^2}\left(\frac{300 \text{ mm}}{390 \text{ mm}^2} + \frac{300 \text{ mm}}{780 \text{ mm}^2}\right)$$
$$= (5{,}769 \times 10^{-3} \text{mm/kN})R_B$$

Considerando que a deformação total da barra deve ser zero como resultado das restrições impostas, escrevemos

$$\delta = \delta_T + \delta_R = 0$$
$$= -0{,}468 \text{ mm} + (5{,}769 \times 10^{-3} \text{mm/kN})R_B = 0$$

de onde obtemos

$$R_B = 81{,}12 \text{ kN}$$

A reação em A é igual e oposta.

Notando que as forças nas duas partes da barra são $P_1 = P_2 = 81{,}12$ kN, obtemos os seguintes valores para a tensão nas partes AC e CB da barra:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{81{,}12 \text{ kN}}{390 \text{ mm}^2} = 208 \text{ MPa}$$
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{81{,}12 \text{ kN}}{780 \text{ mm}^2} = 104 \text{ MPa}$$

Não podemos enfatizar demasiadamente o fato de que, embora a *deformação total* da barra deva ser zero, as deformações das partes componentes AC e CB *não são iguais a zero*. Uma solução do problema baseada na hipótese de que essas deformações são iguais a zero seria portanto errada. E nem os valores da deformação específica em AC ou CB podem ser considerados iguais a zero. Para melhor destacarmos esse ponto, vamos determinar a deformação específica ϵ_{AC} na parte AC da barra. A deformação específica ϵ_{AC} pode ser dividida em duas partes componentes; uma é a deformação específica térmica ϵ_T produzida na barra livre pela variação de temperatura ΔT (Fig. 2.38*b*). Da Equação (2.22) escrevemos

$$\epsilon_T = \alpha\Delta T = (12 \times 10^{-6}/°C)(-65°C)$$
$$= -780 \times 10^{-6}\frac{\text{m}}{\text{m}} = -780\frac{\mu\text{m}}{\text{m}} = -780\ \mu$$

A outra componente de ϵ_{AC} está associada com a tensão σ_1 devida à força $\mathbf{R}_B$ aplicada à barra (Fig. 2.38*c*). Da lei de Hooke, expressamos essa componente da deformação como

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{208 \text{ MPa}}{200000 \text{ MPa}} = 1040 \times 10^{-6}\frac{\text{m}}{\text{m}} = 1040\ \mu$$

Somando as duas componentes da deformação específica em AC, obtemos

$$\epsilon_{AC} = \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -780\ \mu + 1040\ \mu$$
$$= 260\ \mu$$

Um cálculo semelhante fornece a deformação específica na parte CB da barra:

$$\epsilon_{CB} = \epsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} = -780\ \mu + 520\ \mu = -260\ \mu$$

As deformações δ_{AC} e δ_{CB} das duas partes da barra são expressas, respectivamente, como

$$\delta_{AC} = \epsilon_{AC}(AC) = (260 \times 10^{-6})(300 \times 10^{-3} \text{m}) =$$
$$= 78 \times 10^{-6} \text{m}$$
$$\delta_{CB} = \epsilon_{CB}(CB) = (-260 \times 10^{-6})(300 \times 10^{-3}\text{m}) =$$
$$= -78 \times 10^{-6} \text{m}$$

Verificamos então que, embora a soma $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ das duas deformações seja zero, nenhuma das deformações é igual a zero.

Exercícios

2.51 a 2.56