

Figura 4.14 Lugar das raízes da função (4.43).

### 4.6 Compensação por meio do lugar das raízes

Projetar um controlador ou um compensador significa modificar a resposta de um sistema de modo que sua saída atenda a determinadas especificações. Os controladores são formados por funções de transferência que adicionam polos e zeros ao sistema. Um esquema de controle típico de um processo em malha fechada com realimentação da saída é apresentado na Figura 4.15.

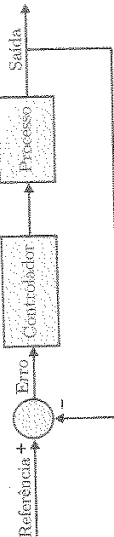


Figura 4.15 Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada.

De um modo geral, três especificações são muito importantes no projeto de sistemas de controle:

- estabilidade;
- erro estacionário "pequeno" ou nulo;
- decaimento, que consiste em sobressinal "baixo" e tempo de resposta transitória "pequeno".

A especificação de estabilidade é essencial para qualquer sistema em malha fechada, pois não há sistema instável que tenha utilidade prática. A característica de erro estacionário "pequeno" ou nulo é desejável para uma grande quantidade de sistemas em que se espera que as saídas sigam determinadas referências ou estejam pelo menos próximas dos valores desejados. Já a especificação de desempenho está relacionada ao sobressinal e ao tempo de resposta transitória. Normalmente deseja-se que a resposta transitória tenha um sobressinal "baixo" e um tempo de resposta "pequeno" (tempo de subida, pico, acomodação, etc.).

Muitas vezes as etapas de projeto de sistemas de controle resultam de um procedimento de tentativa e erro até que as especificações desejadas sejam atingidas. Uma vez adotadas as especificações de projeto, o próximo passo consiste em realizar o projeto do controlador calculando os seus parâmetros. Após esta etapa deve-se realizar uma análise do sistema com a realimentação para verificar se as especificações de projeto inicialmente adotadas foram atingidas. Se os resultados forem satisfatórios pode-se passar para a etapa de implementação do controlador. Caso contrário, novos projetos de controladores devem ser realizados. Um esquema desse procedimento de projeto está sistematizado na Figura 4.16.

### 4.6 Compensação por meio do lugar das raízes

Conforme foi visto no Capítulo 3, para sistemas de ordem elevada (maior ou igual a 3) normalmente a resposta do sistema em malha fechada é devida aos polos dominantes, que são os polos de malha fechada que se localizam mais próximos do eixo imaginário. Porém, caso a resposta não dependa apenas desses polos a resposta do sistema compensado pode não produzir os resultados desejados. Por essa razão, após a realização do projeto é importante analisar a resposta do sistema em malha fechada, o que pode ser feito por meio de uma simulação em computador verificando se os resultados estão de acordo com as especificações desejadas.

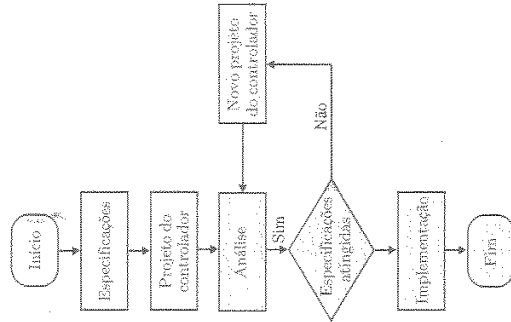


Figura 4.16 Esquema dos procedimentos de projeto de sistemas de controle.

Quando as especificações de projeto são fornecidas em termos da resposta transitória temporal o projeto de controladores ou compensadores a partir do sistema em malha aberta pode ser realizado por meio da técnica do lugar das raízes.

#### 4.6.1 Compensação por avanço de fase

A compensação por avanço de fase (*phase lead*) tem a propriedade de melhorar a resposta temporal do sistema, reduzindo o sobressinal e o tempo de resposta transitória. Para verificar esta propriedade basta notar que quando o compensador por avanço de fase é incluído na malha o ponto de interseção das assíntotas com o eixo real, calculado pela Equação (4.18), é deslocado para a esquerda do plano  $s$ . Com isso, o lugar das raízes também se desloca para a esquerda, fazendo com que o sobressinal e o tempo de resposta sejam reduzidos.

O bloco típico de um compensador por avanço de fase tem a função de transferência

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{s + z_c}{s + p_c} \right), \quad z_c < p_c \quad (4.46)$$

O diagrama de polos e zeros de um compensador por avanço de fase é apresentado na Figura 4.17. O zero do compensador  $z_c$  deve estar localizado mais próximo do eixo imaginário, quando comparado ao polo  $p_c$ . A designação *avanço de fase* reside no fato de que para qualquer ponto  $s$  com  $Re < 0$  e  $Im > 0$  o compensador  $G_c(s)$  adiciona fase na malha aberta, pois  $\angle G_c(s) = \phi - \theta > 0$ .

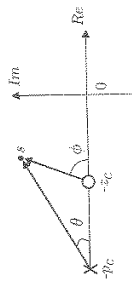


Figura 4.17 Diagrama de polos e zeros de um compensador por avanço de fase.

Basicamente, a metodologia de projeto consiste em determinar as posições dos polos de malha fechada dominantes que satisfazem às especificações de desempenho desejadas, como sobressinal e tempo de resposta transitória (tempo de subida, pico, acomodação, etc.). O zero e o polo do compensador  $G_c(s)$  devem ser alocados de tal forma que o lugar das raízes passe pelos polos de malha fechada dominantes. Uma vez fixada a posição do zero do compensador a posição do polo pode ser determinada por meio da condição de fase (4.5). Depois disso o ganho  $k$  pode ser obtido por meio da condição de módulo (4.4).

Exemplo 4.7

Um servomecanismo, composto por um motor de corrente contínua, possui a função de transferência

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{5}{s(s+1)} \tag{4.46}$$

e  $\Theta(s)$  e  $E_a(s)$  representam as transformadas de Laplace da posição angular do eixo e da tensão de armadura, respectivamente. O diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador é apresentado na Figura 4.18.

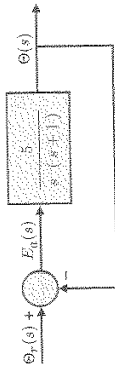


Figura 4.18 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador.

A função de transferência de malha fechada do sistema de segunda ordem é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{5}{s^2 + s + 5} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4.47}$$

sendo  $\Theta_r(s)$  a posição angular desejada,  $\omega_n = \sqrt{5}$  (rad/s) a frequência natural não amortecida e  $\zeta = 1/(2\sqrt{5}) \approx 0,224$  o coeficiente de amortecimento. Quando é aplicado um degrau unitário na entrada  $\theta_r(t)$ , a saída  $\theta(t)$  apresenta a resposta da Figura 4.19.

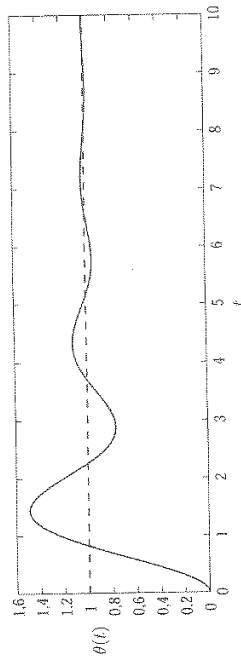


Figura 4.19 Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada sem compensador.

4.6 Compensação por meio do lugar das raízes

De acordo com a Figura 4.19, o sobressinal vale

$$M_p(\%) = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} 100\% \approx 48,6\% \tag{4.48}$$

e o tempo de acomodação, segundo o critério de 2%, é

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \approx 8s. \tag{4.49}$$

Deseja-se projetar um compensador  $G_c(s)$ , conforme representado no diagrama de blocos da Figura (4.20), de modo que o coeficiente de amortecimento dos polos de malha fechada dominantes seja  $\xi = 0,5$  ( $M_p \approx 16\%$ ) e o tempo de acomodação seja reduzido para  $t_s(2\%) \approx 2s$ , isto é

$$t_s(2\%) \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 \Rightarrow \omega_n = 4 \text{ rad/s}. \tag{4.50}$$

Para que essas especificações sejam satisfeitas, os polos de malha fechada dominantes devem estar localizados em

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -2 \pm 2\sqrt{3}j. \tag{4.51}$$

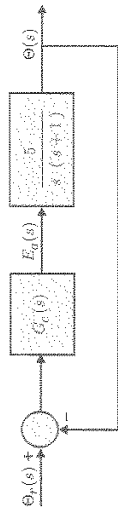


Figura 4.20 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada com compensador.

Se  $G_c(s)$  for apenas um ganho, isto é,  $G_c(s) = k$ , é impossível satisfazer às especificações fornecidas. Conforme se pode perceber pelo lugar das raízes da Figura 4.21, variando-se apenas o ganho  $k$  os polos de malha fechada nunca passam pelos polos calculados em (4.51).

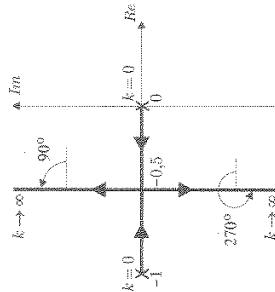


Figura 4.21 Lugar das raízes sem compensador.

Para deslocar o lugar das raízes para a esquerda pode-se empregar um compensador por avanço de fase

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{s+z_c}{s+p_c} \right) \tag{4.52}$$

Alojando o zero do compensador na mesma posição que a parte real dos polos de malha fechada dominantes ( $z_c = 2$ ) o polo do compensador pode ser calculado pela condição de fase, ou seja,

$$\angle s + p_c = \angle s + 2 - \angle s + 1 + 180^\circ. \tag{4.53}$$

No polo de malha fechada  $s = -2 + 2\sqrt{3}j$  tem-se que

$$\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{p_c - 2}\right) = 90^\circ - 120^\circ = 106.1^\circ + 180^\circ = 43.9^\circ \quad (4.54)$$

$$(4.55)$$

O valor do ganho  $k_c > 0$  pode ser obtido por meio da condição de módulo, ou seja,

$$\left| \frac{k_c(s+2)}{(s+5.6)s(s+1)} \right| = 1 \Rightarrow k_c = \frac{|s+5.6||s||s+1|}{5|s+2|} \quad (4.56)$$

No polo de malha fechada  $s = -2 + 2\sqrt{3}j$  obtém-se  $k_c \cong 4.16$ . (4.57)

Portanto, 
$$G_c(s) = 4.16 \left( \frac{s+2}{s+5.6} \right) \quad (4.58)$$

O lugar das raízes do sistema com o compensador (4.58) é apresentado na Figura 4.22.

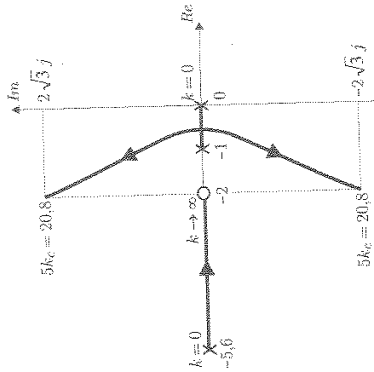


Figura 4.22 Lugar das raízes com compensador.

O sistema em malha fechada com o compensador (4.58) resulta num sistema de ordem 3, cuja função de transferência é dada por

$$\Theta_r(s) = \frac{20.8(s+2)}{s^3 + 6.0s^2 + 26.4s + 41.6} = \frac{20.8(s+2)}{(s+2.6)(s+2-2\sqrt{3}j)(s+2+2\sqrt{3}j)} \quad (4.59)$$

Outra solução para o projeto do compensador pode ser obtida por meio de uma análise direta do lugar das raízes. Se o zero  $z_c$  do compensador for calculado com o polo estável<sup>4</sup> da planta ( $s = -z_c = -1$ ) e se o polo do compensador for alocado na posição  $s = -7z_c = -4$ , então o lugar das raízes passa exatamente pelos polos de malha fechada desejados ( $s = -2 \pm 2\sqrt{3}j$ ). Isso é o que mostra o gráfico do lugar das raízes da Figura 4.23.

<sup>4</sup>O cancelamento nunca deve ser realizado com polos instáveis, pois na prática este cancelamento pode não ser perfeito, fazendo com que o sistema tenha polos de malha fechada no semiplano direito, tornando-o instável.

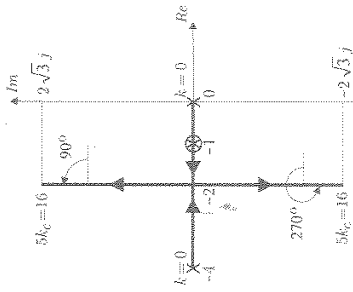


Figura 4.23 Lugar das raízes com o cancelamento do zero do compensador com o polo da planta.

Com isso, o sistema em malha aberta  $G_{ma}(s)$  resultante é de ordem 2, isto é

$$G_{ma}(s) = \frac{k_c(s+1)}{(s+4)s(s+1)} = \frac{5k_c}{s(s+4)} \quad (4.60)$$

O valor do ganho  $k_c > 0$  em qualquer polo de malha fechada desejado pode ser calculado por meio da condição de módulo, ou seja,

$$\left| \frac{5k_c}{s(s+4)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = 1 \Rightarrow k_c = 3.2 \quad (4.61)$$

Portanto, a função de transferência do compensador é dada por

$$G_c(s) = 3.2 \left( \frac{s+1}{s+4} \right) \quad (4.62)$$

A função de transferência de malha fechada com o compensador (4.62) é dada por

$$\Theta_r(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16} = \frac{16}{(s+2-2\sqrt{3}j)(s+2+2\sqrt{3}j)} \quad (4.63)$$

As respostas ao degrau unitário do sistema não compensado (4.47), do sistema compensado de segunda ordem (4.63) e do sistema compensado de terceira ordem (4.59) são apresentadas na Figura 4.24. Como o sistema (4.59) é de terceira ordem e o polo localizado em  $s = -2.6$  está próximo dos polos complexos conjugados, a resposta transitória possui um sobressinal um pouco maior que o desejado ( $M_p \cong 16\%$ ). Já o sistema (4.63), por ser de segunda ordem, produz uma resposta de acordo com as especificações.

No projeto de compensadores nem sempre é possível realizar cancelamentos de modo a reduzir a ordem do sistema. Em sistemas de ordem elevada, se os polos dominantes estiverem próximos dos demais polos e zeros a resposta transitória pode não ocorrer exatamente de acordo com as especificações desejadas. Por essa razão, é necessário analisar os resultados obtidos empregando-se também recursos computacionais. O projeto do compensador deve ser refeito até que os resultados obtidos possam ser considerados satisfatórios.

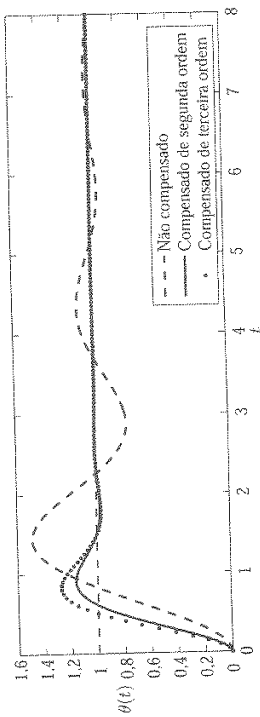


Figura 4.24 Respostas ao degrau unitário do sistema não compensado (4.47), do sistema compensado de segunda ordem (4.63) e do sistema compensado de terceira ordem (4.59).

4.6.2 Compensação por atraso de fase

O bloco típico de um compensador por atraso de fase (lag phase) tem a função de transferência

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{s + z_c}{s + p_c} \right), \quad z_c > p_c \quad (4.64)$$

O diagrama de polos e zeros de um compensador por atraso de fase é apresentado na Figura 4.25. O polo do compensador  $p_c$  deve estar localizado mais próximo do eixo imaginário, quando comparado ao zero  $z_c$ . A designação atraso de fase reside no fato de que para qualquer ponto  $s$  com  $Re < 0$  e  $Im > 0$  o compensador  $G_c(s)$  diminui a fase da malha aberta, pois  $\angle G_c(s) = \phi - \theta < 0$ .

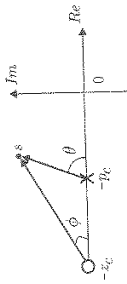


Figura 4.25 Diagrama de polos e zeros de um compensador por atraso de fase.

A compensação por atraso de fase é indicada quando a resposta transitória é satisfatória, mas o erro no estado estacionário precisa ser melhorado. Ao contrário do compensador por avanço, o compensador por atraso tende a piorar a resposta transitória pois tende a deslocar o lugar das raízes no sentido da direita do semiplano  $s$ . Para que o lugar das raízes não seja modificado com a inclusão do compensador na malha a contribuição de fase do compensador deve ser próxima de zero. De acordo com a Figura 4.26, isso somente é possível se o polo  $p_c$  e o zero  $z_c$  do compensador estiverem próximos um do outro.

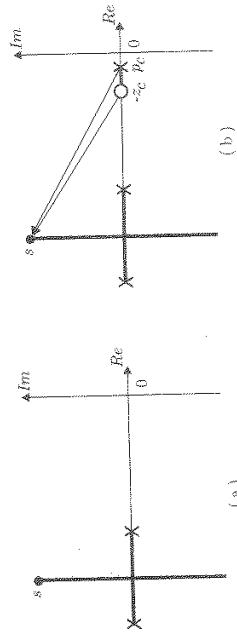


Figura 4.26 Lugar das raízes. (a) Sem compensador. (b) Com compensador.

4.6 Compensação por meio do lugar das raízes

Analisando a Figura 4.26 verifica-se que quando o polo  $p_c$  e o zero  $z_c$  do compensador estão próximos a contribuição de fase é praticamente nula. Além disso, as distâncias do polo  $p_c$  e do zero  $z_c$  até o ponto  $s$ , onde estaria um polo de malha fechada desejado, são praticamente as mesmas. Com isso, o ganho  $k_c$  do compensador pode aproximadamente 1, pois os vetores que representam estas distâncias são aproximadamente iguais.

Considere um sistema com realimentação unitária, sem o compensador por atraso de fase, cuja função de transferência de malha aberta seja dada por

$$G(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)} \quad (4.65)$$

sendo  $k$  um ganho,  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $T_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) constantes de tempo não nulas.

Aplicando-se uma rampa unitária na referência, o erro estacionário sem compensador  $e_s(\infty)$  pode ser calculado por meio do teorema do valor final, ou seja,

$$e_s(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{k} \quad (4.66)$$

Considere agora um sistema com compensador por atraso de fase, com  $k_c \approx 1$ . A função de transferência de malha aberta é dada por

$$G(s) = \frac{(s + z_c)k(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{(s + p_c)s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)} \quad (4.67)$$

Aplicando-se uma rampa unitária na referência, o erro estacionário com compensador  $e_c(\infty)$  vale

$$e_c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{k_c} = \frac{p_c}{z_c} k \quad (4.68)$$

Das Equações (4.66) e (4.68) tem-se que a relação entre os erros estacionários com e sem compensador é dada por

$$e_c(\infty) = \frac{p_c}{z_c} e_s(\infty) \quad (4.69)$$

Para que o erro estacionário com compensador  $e_c(\infty)$  seja, por exemplo, 10 vezes menor que o erro sem compensador  $e_s(\infty)$  o zero do compensador deve ser 10 vezes maior que o seu polo, isto é,  $z_c = 10p_c$ . Portanto, a única maneira de a relação entre o zero e o polo ser "grande" de modo a reduzir o erro estacionário e, simultaneamente, ter o polo e o zero do compensador próximos um do outro, para que a resposta transitória não seja afetada, é que  $p_c$  e  $z_c$  devem estar localizados próximos da origem. Assim, escolhendo por exemplo o polo em  $p_c = -0.01$  o zero deve estar em  $z_c = -0.1$ .

Exemplo 4.5

Considere um sistema com a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{40}{(s + 1)^2(s + 10)} \quad (4.70)$$

O diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador é apresentado na Figura 4.27.

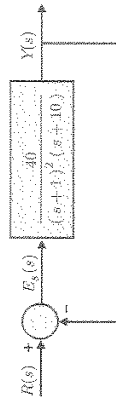


Figura 4.27 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem compensador.

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{40}{s^3 + 12s^2 + 21s + 50} = \frac{40}{(s + 10,448)(s^2 + 1,552s + 4,786)} \\ &= \frac{(s + 10,448)(s + 0,776 + 2,045j)(s + 0,776 - 2,045j)}{(s + 10)(s + 1)^2(s + 10)} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Logo, os polos de malha fechada dominantes do sistema sem compensador estão localizados em  $s_{1,2} = -0,776 \pm 2,045j$ , com coeficiente de amortecimento  $\xi \cong 0,355$  e frequência natural  $\omega_n \cong 2,188$ .

Aplicando-se um degrau unitário na referência, o erro estacionário  $e_s(\infty)$  sem compensador é

$$e_s(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_s(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{40}{(s+1)^2(s+10)}} = \frac{1}{1+4} = 0,2 \quad (4.72)$$

Deseja-se projetar um compensador  $G_c(s)$  por atraso de fase de modo a reduzir o erro estacionário em 10 vezes, sem que a resposta transitória tenha mudança significativa. A função de transferência de malha aberta com o compensador  $G_c(s)$  é dada por

$$G_{ma}(s) = G_c(s)G(s) = \frac{k_c(s+z_c)}{(s+p_c)(s+1)^2(s+10)} \quad (4.73)$$

Logo, o erro estacionário  $e_s(\infty)$  com compensador vale

$$e_s(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_{ma}(s)} \right) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k_c(s+z_c)}{(s+p_c)(s+1)^2(s+10)}} = \frac{1}{1 + \frac{k_c z_c}{p_c}} = 0,02 \quad (4.74)$$

Para que a resposta transitória não tenha mudança significativa com o compensador  $G_c(s)$ , a posição dos polos de malha fechada dominantes deve ser praticamente a mesma no lugar das raízes. Para isso, o ganho  $k_c$  deve valer aproximadamente 1. Logo,

$$\frac{1}{1 + \frac{k_c z_c}{p_c}} \cong 0,02 \Rightarrow \frac{z_c}{p_c} \cong 12,25 \quad (4.75)$$

Escolhendo arbitrariamente o valor do polo  $p_c = 0,01$  próximo da origem, obtêm-se  $z_c = 0,1225$ .

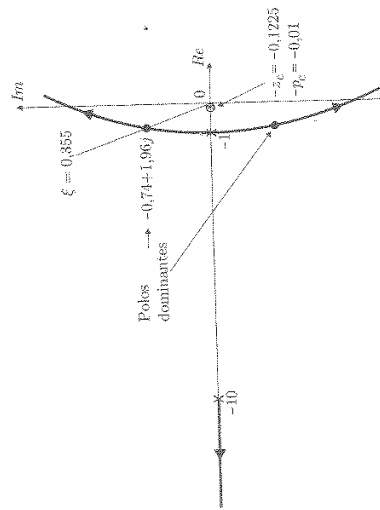


Figura 4.28 Lugar das raízes do sistema compensado.

Na Figura 4.28 é apresentado o lugar das raízes do sistema compensado. Traçando uma reta pelo coeficiente de amortecimento  $\xi \cong 0,355$  obtêm-se os polos de malha fechada dominantes do sistema compensado, que estão em  $s_{1,2} = -0,74 \pm 1,96j$ .

4.6 Compensação por meio do lugar das raízes

O ganho  $k_c$  pode ser ajustado pela condição de módulo

$$\left| \frac{40k_c(s + 0,1225)}{(s + 0,01)(s + 1)^2(s + 10)} \right|_{s = -0,74 \pm 1,96j} = 1 \Rightarrow k_c \cong 0,9415 \quad (4.76)$$

Portanto, a função de transferência do compensador por atraso de fase é

$$G_c(s) = \frac{0,9415(s + 0,1225)}{s + 0,01} \quad (4.77)$$

A função de transferência de malha fechada do sistema compensado é dada por

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{37,66(s + 0,1225)}{s^4 + 12,01s^3 + 21,12s^2 + 47,87s + 4,71} \\ &= \frac{37,66(s + 0,1225)}{(s + 0,103)(s + 10,42)(s + 0,74 + 1,96j)(s + 0,74 - 1,96j)} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Na Figura 4.29 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau unitário dos sistemas em malha fechada compensado e não compensado. A inclusão do compensador aumenta a ordem do sistema de 3 para 4, acrescentando um polo em  $s = -0,103$  e um zero em  $s = -0,1225$  próximos dos polos dominantes. Com isso, a resposta transitória do sistema compensado é um pouco diferente do sistema não compensado. Porém, o erro estacionário foi reduzido de acordo com o esperado.

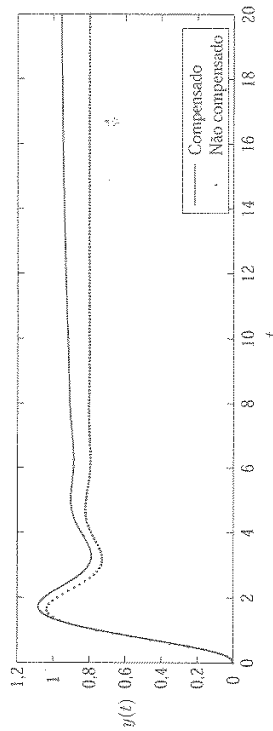


Figura 4.29 Respostas ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado.

4.6.3 Compensação por avanço e atraso de fase

A compensação por avanço e atraso de fase (*lead-lag phase*) é muito utilizada na prática, e aplica os dois recursos analisados anteriormente. Esta compensação é indicada quando é necessário melhorar simultaneamente a resposta transitória e o erro no estado estacionário.

Primeiramente, projeta-se um compensador por avanço de fase para melhorar a resposta transitória. Depois calcula-se quanto o erro estacionário ainda deve ser melhorado. Por fim, projeta-se o compensador por atraso de fase para satisfazer a especificação do erro estacionário.

Exemplo 4.9

Projete um compensador por avanço e atraso de fase para o sistema da Figura 4.30, de modo a resposta para entrada do tipo degrau na referência apresentada:

- polos dominantes com coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,5$  e frequência  $\omega_n = 2$  (rad/s);
- erro no estado estacionário de 0,02.

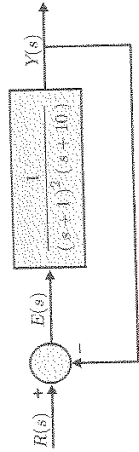


Figura 4.30 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada sem compensador.

Para que as especificações sejam satisféitas os polos de malha fechada dominantes do sistema compensado devem estar localizados em

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n = -1 \pm j\sqrt{3}j \tag{4.79}$$

Se os polos dominantes tiverem influência predominante na dinâmica do sistema, então a resposta ao degrau deve apresentar um sobressinal próximo de  $M_p \cong 16,3\%$  e um tempo de acomodação próximo de  $t_s \cong 3$  s (critério 5%).

A função de transferência do compensador por avanço de fase é dada por

$$G_{at}(s) = k_c \left( \frac{s+z_c}{s+p_c} \right) \tag{4.80}$$

Cancelando o zero do compensador com um dos polos em  $s = -1$  do processo, a função de transferência de malha aberta resulta como

$$G_{ma}(s) = k_c \frac{(s+z_c)}{(s+1)^2(s+10)} = \frac{k_c}{(s+p_c)(s+1)(s+10)} \tag{4.81}$$

$$\angle G_{ma}(s) = \pm \text{múltiplo ímpar de } 180^\circ \tag{4.82}$$

$$- \angle \frac{1}{s+p_c} - \angle \frac{1}{s+1} - \angle \frac{1}{s+10} = 180^\circ \tag{4.83}$$

No polo de malha fechada  $s = -1 + j\sqrt{3}j$  tem-se que

$$- \arctan \left( \frac{\sqrt{3}}{p_c - 1} \right) = 90^\circ + 10,803^\circ + 180^\circ = 280,8034^\circ \tag{4.84}$$

Calculando a tangente dos dois membros da Equação (4.84), obtém-se

$$p_c \cong 1,3333 \tag{4.85}$$

O valor do ganho  $k_c > 0$  pode ser obtido por meio da condição de módulo, ou seja,

$$\left| \frac{k_c}{(s+1,3333)(s+1)(s+10)} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}j} = 1 \rightarrow k_c = 28 \tag{4.86}$$

Portanto, a função de transferência do compensador por avanço de fase é dada por

$$G_{at}(s) = 28 \left( \frac{s+1}{s+1,3333} \right) \tag{4.87}$$

O lugar das raízes do sistema com o compensador (4.87) é apresentado na Figura 4.31.

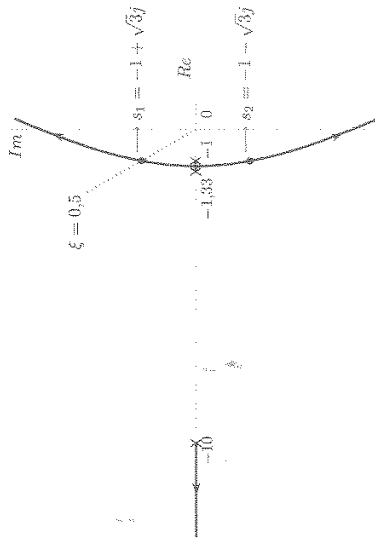


Figura 4.31 Lugar das raízes com o compensador por avanço de fase.

A função de transferência de malha fechada apenas com o compensador por avanço de fase é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{28}{(s+1,3333)(s+1)(s+10)+28} \tag{4.88}$$

cujá resposta ao degrau unitário é apresentada na Figura 4.32. Note que o sistema em malha fechada com o compensador por avanço de fase apresenta um transitório próximo das especificações (sobressinal  $M_p \cong 16,2\%$  e tempo de acomodação  $t_s \cong 3$  s, pelo critério de 5%). Porém, o erro estacionário ainda é elevado, pois  $e(\infty) = 1 - 0,68 = 0,32$ .

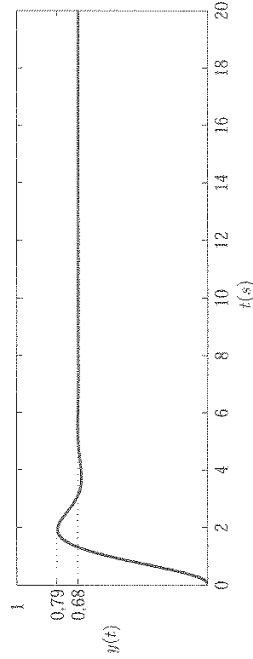


Figura 4.32 Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada apenas com o compensador por avanço de fase.

A seguir, deve-se projetar um compensador por atraso de fase de modo a reduzir o erro estacionário para 0,02, sem que o transitório do sistema com o compensador por avanço de fase tenha alteração significativa.

Supondo que a função de transferência do compensador por atraso de fase seja dada por

$$G_{at}(s) = k_{at} \left( \frac{s+z_{at}}{s+p_{at}} \right) \tag{4.89}$$

a função de transferência de malha aberta com o compensador por avanço e atraso de fase é

$$G_{ma}(s) = 28 \frac{(s+1)}{(s+1,3333)} \frac{k_{at}(s+z_{at})}{(s+p_{at})} \tag{4.90}$$

Logo, o erro estacionário  $e(\infty)$  com o compensador por avanço e atraso de fase vale

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1 + G_{cc}(s)} \right) R(s) \tag{4.91}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{21k_{cc}k_{at}}{(s+1,33333)(s+7,017)(s+10)}} = \frac{1}{1 + \frac{21k_{cc}k_{at}}{10}} \tag{4.92}$$

Para que o transitório não tenha mudança significativa com o compensador por atraso de fase, a posição dos polos de malha fechada dominantes deve ser praticamente a mesma no lugar das raízes. Para isso, o ganho  $k_{at}$  deve valer aproximadamente 1. Assim,

$$\frac{1}{1 + \frac{21k_{cc}}{10}} = 0,02 \Rightarrow \frac{2k_{at}}{p_{cc}} \cong 0,042 \cong 23,3333 \tag{4.93}$$

Escolhendo arbitrariamente o polo  $p_{cc} = 0,01$  próximo da origem, obtém-se  $z_{at} = 0,2333$ .

Na Figura 4.33 é apresentado o lugar das raízes do sistema compensado. Traçando uma reta pelo coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,5$  obtêm-se os polos de malha fechada dominantes do sistema compensado, que estão em  $s_{1,2} = -0,93 \pm 1,61j$ .

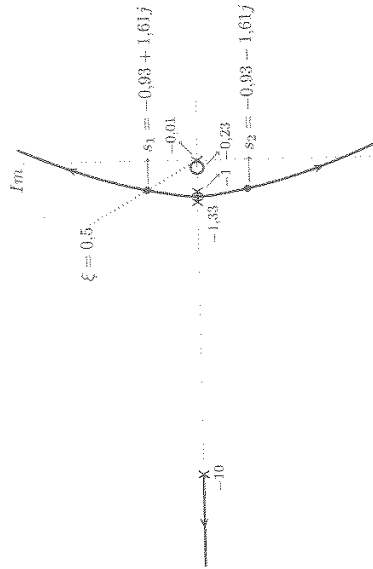


Figura 4.33 Lugar das raízes do sistema compensado.

O ganho  $k_{at}$  pode ser ajustado pela condição de módulo

$$\left| \frac{28k_{cc}(s+0,2333)}{(s+1,3333)(s+0,01)(s+1)(s+10)} \right|_{s=-0,93 \pm 1,61j} = 1 \Rightarrow k_{at} \cong 0,93 \tag{4.94}$$

Portanto, a função de transferência do compensador por avanço e atraso de fase é dada pelo produto das Equações (4.87) e (4.89), ou seja,

$$G_c(s) = G_{cc}(s)G_{at}(s) = \frac{26,04(s+1)(s+0,2333)}{(s+1,3333)(s+0,01)} \tag{4.95}$$

A função de transferência de malha fechada do sistema compensado resultante é de quarta ordem e é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{26,04(s+0,2333)}{s^4 + 12,34s^3 + 24,79s^2 + 39,62s + 6,21} \tag{4.96}$$

$$= \frac{26,04(s+0,2333)}{(s+0,17)(s+10,30)(s+0,93+1,61j)(s+0,93-1,61j)} \tag{4.97}$$

4.6 Compensação por meio do lugar das raízes

Na Figura 4.34 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau unitário dos sistemas em malha fechada sem compensador, apenas com o compensador por avanço (4.87) e com o compensador por avanço e atraso (4.94). A inclusão do compensador por atraso aumenta a ordem do sistema de 3 para 4, acrescentando um polo em  $s = -0,17$  e um zero em  $s = -0,2333$  próximos dos polos dominantes, afetando dessa maneira a resposta transitória. Porém, o erro estacionário foi reduzido de acordo com o esperado.

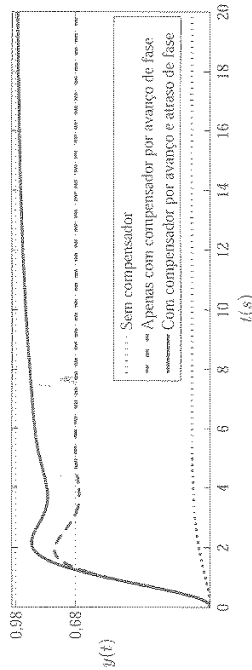


Figura 4.34 Respostas ao degrau unitário dos sistemas em malha fechada sem compensador, apenas com o compensador por avanço (4.87) e com o compensador por avanço e atraso (4.94).

4.6.4 Compensação por realimentação auxiliar

Nas seções anteriores os compensadores foram projetados para serem ligados em série com o processo, de modo a modificarem o lugar das raízes para produzirem uma resposta transitória desejada. Sistemas de controle também podem ser projetados para serem inseridos numa malha de realimentação auxiliar, conforme mostra a Figura 4.35.

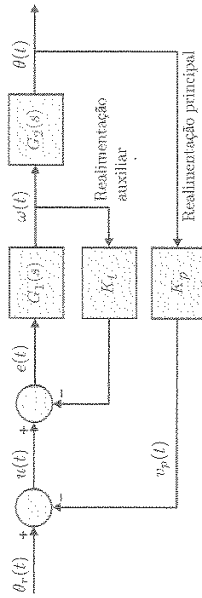


Figura 4.35 Sistema com realimentação auxiliar.

Este é um método de extraordinário poder, tanto para estabilizar quanto para aperfeiçoar os transientes do sistema. Em contrapartida, exige equipamento e custo adicional como, por exemplo, a inclusão de sensores na malha. A realimentação auxiliar é comumente utilizada em motores para se controlar a posição angular  $\theta(t)$  de um eixo. Nesse caso a realimentação adicional é realizada por meio de um sensor da velocidade  $\omega(t)$ , que pode ser um tacômetro com ganho  $K_v$ . O ganho  $K_p$  pode representar um potenciômetro que visa converter a posição angular  $\theta(t)$  numa tensão equivalente  $v_p(t)$ .

Agrupando o ganho  $K_p$  com a função  $G_2(s)$  e deslocando a realimentação auxiliar, o diagrama de blocos da Figura 4.35 pode ser representado de forma equivalente pelo diagrama da Figura 4.36.

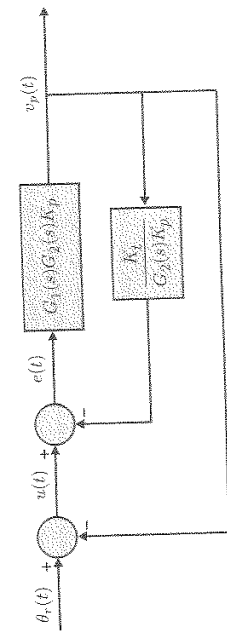


Figura 4.36 Sistema com realimentação auxiliar equivalente.

Da Figura 4.36 tem-se que

$$e(t) = u(t) - \frac{K_v}{G_2(s)K_p} v_p(t) = \theta_r(t) - v_p(t) - \frac{K_v}{G_2(s)K_p} v_p(t) \tag{4.96}$$

$$= \theta_r(t) - \left( 1 + \frac{K_v}{G_2(s)K_p} \right) v_p(t).$$

Com o resultado da Equação (4.96) pode-se simplificar o diagrama de blocos da Figura 4.36 para o diagrama da Figura 4.37.

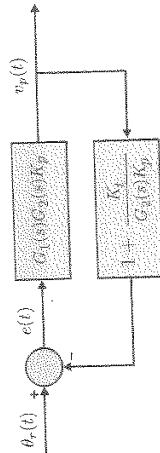


Figura 4.37 Diagrama de blocos equivalente ao da Figura 4.36.

A função de transferência de malha aberta  $G(s)H(s)$  do sistema da Figura 4.37 é

$$G(s)H(s) = G_1(s)G_2(s)K_p \left( 1 + \frac{K_v}{G_2(s)K_p} \right) = G_1(s)(G_2(s)K_p + K_v). \tag{4.97}$$

Sem a realimentação auxiliar, a função de transferência de malha aberta é

$$G(s)H(s) = G_1(s)G_2(s)K_p. \tag{4.98}$$

Comparando as Equações (4.97) e (4.98) verifica-se que o efeito de se acrescentar a realimentação auxiliar é equivalente a substituir os polos e zeros de  $G_2(s)$  pelos polos e zeros de  $G_2(s)K_p + K_v$ . Esta mudança visa alterar o lugar das raízes para que o mesmo passe pelos polos de malha fechada que satisfazem à especificação da resposta transitória desejada.

**Exemplo 4.10**

Desaja-se controlar a posição angular  $\theta(t)$  do eixo de um motor representado pelo diagrama de blocos da Figura 4.38.

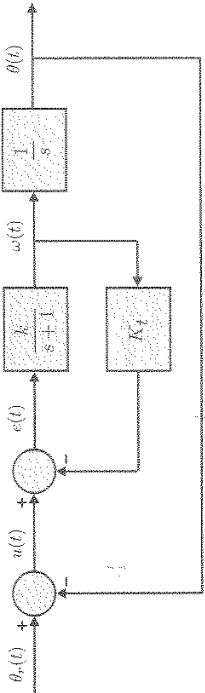


Figura 4.38 Diagrama de blocos de um motor com realimentação auxiliar da velocidade  $\omega(t)$ .

Considere inicialmente o sistema da Figura 4.38 sem a realimentação auxiliar, cuja função de transferência de malha aberta é

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+1)}. \tag{4.99}$$

A função de transferência de malha fechada de segunda ordem é

$$\Theta(s) = \frac{k}{s^2 + s + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{4.100}$$

O lugar das raízes do sistema sem a realimentação auxiliar é apresentado na Figura 4.39. O ganho  $k$  pode ser ajustado para que o lugar das raízes cruze o ponto em que o coeficiente de amortecimento  $\xi$  é igual a 0,5 ( $M_p \cong 16\%$ ).

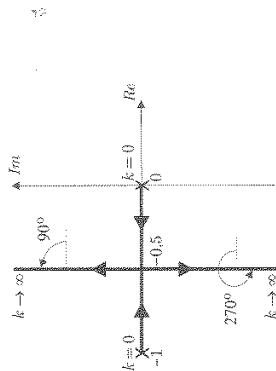


Figura 4.39 Lugar das raízes sem a realimentação auxiliar.

Da Equação (4.100) tem-se que  $1 = 2\xi\omega_n \Rightarrow \omega_n = 1$  (rad/s). Logo,  $k = \omega_n^2 = 1$ . O tempo de acomodação (critério 2%) da resposta ao degrau unitário é

$$t_s(2\%) \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \cong 8 \text{ s}. \tag{4.101}$$

Suponha que o tempo de acomodação deva ser reduzido para 2 s, mantendo-se o valor do coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,5$ . Nesse caso, tem-se que

$$t_s(2\%) \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \cong 2 \text{ s} \Rightarrow \omega_n = 4 \text{ (rad/s)}. \tag{4.102}$$

Para  $t_s(2\%) \cong 2$  s, os polos de malha fechada devem estar localizados em

$$s = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} j = -2 \pm 2\sqrt{3} j. \tag{4.103}$$

Note que sem a realimentação auxiliar é impossível fazer com que o lugar das raízes da Figura 4.39 passe pelos polos de malha fechada (4.103).



Considere agora o sistema da Figura 4.38 com realimentação auxiliar. Da Equação (4.97) tem-se que a função de transferência de malha aberta é dada por

$$G(s)H(s) = \frac{k}{(s+1)} \left( \frac{1}{s} + K_t \right) = \frac{k(K_t s + 1)}{s(s+1)} = \frac{kK_t(s + \frac{1}{K_t})}{s(s+1)} \quad (4.104)$$

ou seja, quando é feita a realimentação auxiliar aparece um zero em  $s = -1/K_t$  na função de transferência de malha aberta. O lugar das raízes do sistema com a realimentação auxiliar é apresentado na Figura 4.40.

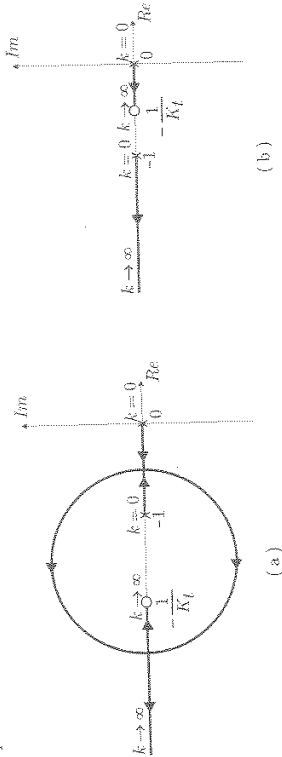


Figura 4.40 Lugar das raízes com a realimentação auxiliar. (a)  $0 < K_t < 1$ . (b)  $K_t > 1$ .

Para  $K_t > 1$  os polos de malha fechada são sempre reais e a resposta transitória é sempre amortecida. Porém, como um dos polos está próximo do eixo imaginário a resposta transitória é lenta.

Para  $0 < K_t < 1$  é possível fazer com que o lugar das raízes passe pelos polos de projeto (4.103). O valor do ganho  $K_t$  pode ser determinado pela condição de fase

$$\angle \frac{1}{s + \frac{1}{K_t}} - \angle s - \angle \frac{1}{s+1} = 180^\circ \quad (4.105)$$

No polo de malha fechada  $s = -2 + 2\sqrt{3}j$  tem-se que

$$\arctan \left( \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{K_t} - 2} \right) = 120^\circ + 106,1^\circ + 180^\circ = 406,1^\circ \quad (4.106)$$

Calculando a tangente dos dois membros da Equação (4.106) resulta

$$K_t = 0,1875 \quad (4.107)$$

O valor do ganho  $k > 0$  pode ser obtido por meio da condição de módulo, ou seja,

$$\left| \frac{k(K_t s + 1)}{s(s+1)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = 1 \Rightarrow k = 16 \quad (4.108)$$

Os valores dos ganhos  $k$  e  $K_t$  também podem ser obtidos a partir da função de transferência de malha fechada  $\Theta(s)/\Theta_v(s)$ . Da Figura 4.38 tem-se que

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k}{s+1+kK_t} \Rightarrow \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(s+1+kK_t)} \quad (4.109)$$

Logo,

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_v(s)} = \frac{k}{s^2 + (1+kK_t)s + k} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.110)$$

4.7 Implementação analógica de compensadores

Comparando os coeficientes dos polinômios da Equação (4.110) obtém-se que  $k = \omega_n^2 = 16$  e  $1 + kK_t = 2\zeta\omega_n \Rightarrow K_t = 0,1875$ .

Na Figura 4.41 são apresentados os gráficos da resposta ao degrau unitário dos sistemas em malha fechada sem realimentação auxiliar (4.100) e com realimentação auxiliar (4.110). As duas respostas apresentam o mesmo sobressinal ( $M_p \cong 16\%$ ). Porém, a resposta transitória do sistema com realimentação auxiliar é mais rápida ( $t_r(2\%) \cong 2$  s) que a resposta do sistema sem este recurso ( $t_r(2\%) \cong 8$  s).

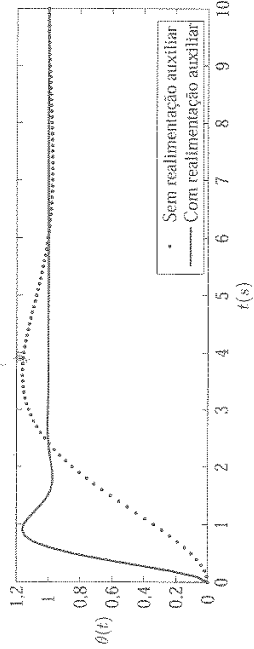


Figura 4.41 Respostas ao degrau unitário do sistema sem realimentação auxiliar e com realimentação auxiliar.

4.7 Implementação analógica de compensadores

Os compensadores por avanço ou atraso de fase podem ser implementados analogicamente por meio de amplificadores operacionais.

4.7.1 Compensador por avanço ou atraso de fase de ordem 1

A função de transferência do compensador por avanço ou atraso de fase de ordem 1 é dada por

$$\frac{V_c(s)}{V_e(s)} = k_c \left( \frac{s + z_c}{s + p_c} \right) \quad (4.111)$$

O circuito eletrônico equivalente está representado na Figura 4.42. Deste circuito tem-se que

$$Z_1(s) = \frac{R_1}{R_1 + \frac{C_1 s}{1 + C_1 s}} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} \quad (4.112)$$

$$Z_2(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{C_2 s}} = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1} \quad (4.113)$$

Assim,

$$\frac{V_c(s)}{V_e(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = \frac{R_2}{R_1} \left( \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} \right) = \frac{C_1}{C_2} \left( \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \right) \quad (4.114)$$

Logo,

$$k_c = \frac{C_1}{C_2}, \quad z_c = \frac{1}{R_1 C_1} \quad \text{e} \quad p_c = \frac{1}{R_2 C_2} \quad (4.115)$$

O circuito da Figura 4.42 é um compensador por avanço de fase quando  $R_1 C_1 > R_2 C_2$  e é um compensador por atraso de fase quando  $R_1 C_1 < R_2 C_2$ .

4.8 Exercícios resolvidos

Exercício 4.1

Desenhe o lugar das raízes e determine a faixa de valores do ganho  $k$  do controlador de modo que o sistema em malha fechada da Figura 4.44 seja estável.

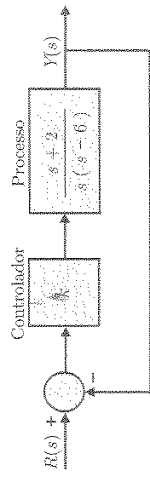


Figura 4.44 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Solução

Primeiramente deve-se marcar os polos e o zero de malha aberta no eixo real. À direita do polo em  $s = +6$  não há raízes (quantidade par). Logo, o segmento do eixo real de  $+6$  a  $+\infty$  não faz parte do lugar das raízes. O segmento entre 0 e  $+6$  faz parte do lugar das raízes, pois à direita do polo, há uma raiz em  $s = +6$  (quantidade ímpar). O segmento do intervalo de  $-2$  a 0 também não faz parte do lugar das raízes, pois à direita do zero em  $s = -2$  há duas raízes (quantidade par). O outro segmento que também faz parte do lugar das raízes é o que está entre  $-\infty$  e  $-2$ , pois à direita de qualquer ponto deste segmento há três raízes (quantidade ímpar).

O lugar das raízes começa nos polos e termina nos zeros de malha aberta quando  $k$  varia de zero a infinito. Como há dois polos de malha aberta adjacentes sobre o eixo real ( $s = 0$  e  $s = +6$ ) e como o segmento entre eles faz parte do lugar das raízes, então há um ponto de partida neste segmento. Da mesma forma, como o segmento de  $-\infty$  a  $-2$  pertence ao lugar das raízes e considerando que há dois zeros neste segmento, isto é, um zero em  $s = -2$  e outro em  $s = -\infty$ , então também há um ponto de chegada neste segmento.

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+2)}{s^2 - 6s + k(s+2)} = \frac{k(s+2)}{s^2 + (k-6)s + 2k} \quad (4.120)$$

Assim, a equação característica é

$$s^2 - 6s + k(s+2) = 0 \Rightarrow k = -\frac{(s^2 - 6s)}{s+2} \quad (4.121)$$

Aplicando a condição (4.21), obtêm-se

$$\frac{dk}{ds} = 0 = -\frac{[(2s-6)(s+2) - (s^2-6s)]}{(s+2)^2} \quad (4.122)$$

ou seja,

$$2s^2 + 4s - 6s - 12 - s^2 - 6s = 0 \Rightarrow s^2 + 4s - 12 = 0 \quad (4.123)$$

Extraindo as raízes do polinômio (4.123) verifica-se que há um ponto de partida em  $s = +2$  e um ponto de chegada em  $s = -6$ . O gráfico do lugar geométrico das raízes apresenta o aspecto da Figura 4.45.

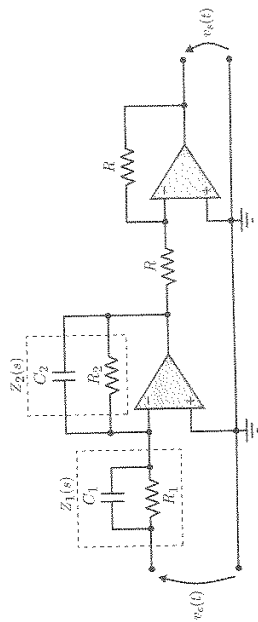


Figura 4.42 Circuito eletrônico do compensador por avanço ou atraso de fase de ordem 2.

4.7.2 Compensador por avanço ou atraso de fase de ordem 2

A função de transferência do compensador por avanço ou atraso de fase de ordem 2 é dada por

$$\frac{V_o(s)}{V_c(s)} = k \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)} \quad (4.116)$$

O circuito eletrônico equivalente está representado na Figura 4.43. Deste circuito tem-se que

$$Z_1(s) = \frac{(R_1 + \frac{1}{C_1s})R_3}{R_1 + \frac{1}{C_1s} + R_3} = \frac{(R_1C_1s + 1)R_3}{R_1C_1s + 1 + R_3C_1s} \quad (4.117)$$

$$Z_2(s) = \frac{(R_2 + \frac{1}{C_2s})R_4}{R_2 + \frac{1}{C_2s} + R_4} = \frac{(R_2C_2s + 1)R_4}{R_2C_2s + 1 + R_4C_2s} \quad (4.118)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{V_o(s)}{V_c(s)} &= \frac{R_4 [R_2C_2s + 1] [(R_1C_1 + R_3C_1)s + 1]}{R_3 [R_1C_1s + 1] [(R_2C_2 + R_4C_2)s + 1]} \\ &= \frac{R_2R_4(R_1 + R_3)}{R_1R_3(R_2 + R_4)} \frac{(s + \frac{1}{R_1C_1 + R_3C_1})}{(s + \frac{1}{R_1C_1})} \frac{(s + \frac{1}{R_2C_2 + R_4C_2})}{(s + \frac{1}{R_2C_2 + R_4C_2})} \end{aligned} \quad (4.119)$$

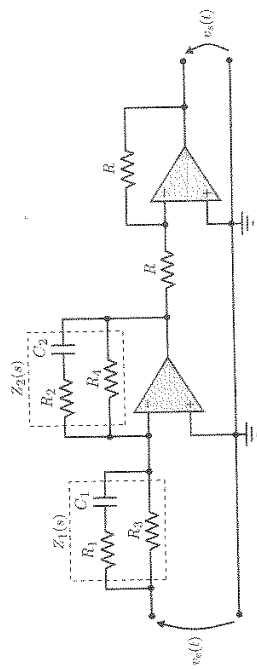


Figura 4.43 Circuito eletrônico do compensador por avanço ou atraso de fase de ordem 2.

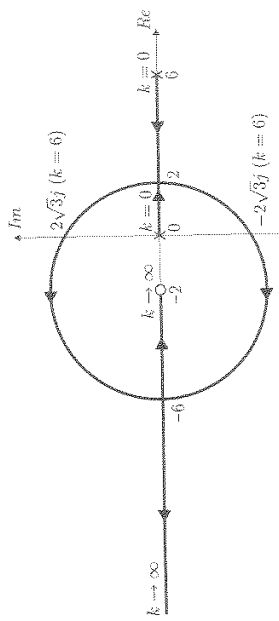


Figura 4.45 Lugar geométrico das raízes.

Para mostrar que parte do lugar das raízes forma uma circunferência basta verificar a condição de fase (4.5), ou seja,

$$\angle s + 2 - \angle s - \angle s - 6 = 180^\circ \pm r360^\circ \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.124)$$

Substituindo  $s = a + j\omega$  e escolhendo  $r = 0$ , obtêm-se

$$\angle a + j\omega + 2 - \angle a + j\omega - 6 = \angle a + j\omega - 6 = 180^\circ \quad (4.125)$$

ou

$$\arctan \left( \frac{\omega}{a+2} \right) - \arctan \left( \frac{\omega}{a} \right) = \arctan \left( \frac{\omega}{a-6} \right) + 180^\circ \quad (4.126)$$

Aplicando a identidade trigonométrica

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

obtem-se

$$\frac{\frac{\omega}{a+2} - \frac{\omega}{a}}{1 + \frac{\omega^2}{(a+2)a}} = \frac{\omega}{a-6} \Rightarrow \frac{-2\omega}{a^2 + 2a + \omega^2} = \frac{\omega}{a-6} \quad (4.127)$$

A Equação (4.127) também pode ser escrita como

$$(a+2)^2 + \omega^2 = 4^2 \quad (4.128)$$

que representa a equação de uma circunferência com centro no ponto  $(-2, 0)$  e raio igual a 4.

Para determinar a faixa de valores do ganho  $k$  de modo que o sistema em malha fechada seja estável basta aplicar o critério de Routh. Os coeficientes do polinômio do denominador da função de transferência de malha fechada (4.120) estão presentes e têm o mesmo sinal quando  $k > 6$ . Portanto, o sistema em malha fechada é estável para  $k > 6$ .

Outra maneira de encontrar o valor de  $k$  é determinar os pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário, bastando para isso fazer  $s = j\omega$  na equação característica. Igualando as partes real e imaginária a zero obtêm-se os pontos de cruzamento e o valor de  $k$  nestes pontos.

Então, 
$$(j\omega)^2 + (k-6)j\omega + 2k = 0 \Rightarrow j\omega(k-6) + 2k - \omega^2 = 0 \quad (4.129)$$

Logo, a parte imaginária da Equação (4.129) é nula para  $k = 6$  e os pontos de cruzamento do lugar das raízes no eixo imaginário estão localizados em  $\omega = \pm 2\sqrt{3}$ .

Desenhe o lugar das raízes e determine a faixa de valores do ganho  $k$  de modo que o sistema em malha fechada da Figura 4.46 seja estável.

Exercício 4.2

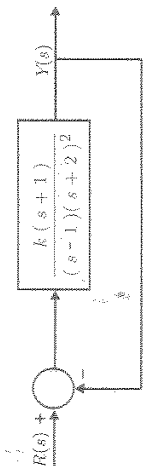


Figura 4.46 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Solução

A função de transferência de malha aberta possui um zero em  $s = -1$  ( $m = 1$ ) e três polos ( $n = 3$ ), sendo um polo localizado em  $s = +1$  e os outros dois em  $s = -2$ . No eixo real apenas o segmento entre  $-1$  e  $+1$  faz parte do lugar das raízes, pois à direita do zero em  $s = -1$  a quantidade de raízes é um número ímpar, isto é, há um polo em  $s = +1$ . Os demais segmentos, localizados nos intervalos de  $-\infty$  a  $-2$ ,  $-2$  a  $-1$  e  $+1$  a  $+\infty$ , não fazem parte do lugar das raízes pois a quantidade de raízes localizadas à direita de qualquer ponto de teste desses segmentos resulta sempre num número par.

Assim, o lugar das raízes possui  $n = 3$  ramos. Um ramo começa no polo em  $s = +1$  e termina no zero em  $s = -1$ , e os outros dois ramos começam nos polos em  $s = -2$  e terminam no infinito, seguindo assintotas com os seguintes ângulos:

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ}{n-m} = \frac{180^\circ}{3-1} = 90^\circ \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{180^\circ}{n-m} = \frac{180^\circ}{3-1} = 270^\circ \quad (4.130)$$

As assintotas cruzam o eixo real no ponto

$$S_c = \frac{\text{(soma dos polos de malha aberta)} - \text{(soma dos zeros de malha aberta)}}{n-m} = \frac{(-2-2+1) - (-1)}{3-1} = -1 \quad (4.131)$$

O gráfico do lugar geométrico das raízes apresenta o aspecto da Figura 4.47. Note que o mesmo deve satisfazer à propriedade de simetria com relação ao eixo real.

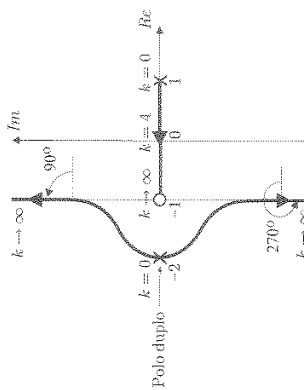


Figura 4.47 Lugar geométrico das raízes.

O valor de  $k > 0$ , em qualquer ponto do lugar das raízes, pode ser calculado a partir da condição do módulo (4.4), ou seja,

$$(4.132) \quad \left| \frac{k(s+1)}{(s-1)(s+2)^2} \right| = 1 \Rightarrow k = \frac{|s-1||s+2|^2}{|s+1|}$$

Calculando o valor de  $k$  em  $s = 0$ , obtém-se  $k = 4$ . Com isso, o sistema em malha fechada é estável para qualquer valor de  $k > 4$ , pois neste caso as linhas do lugar das raízes, que representam os polos de malha fechada, estão sempre localizadas no semiplano esquerdo do plano  $s$ .

**Exercício 4.3**

Desenhe o lugar das raízes e determine a faixa de valores do ganho  $k$  de modo que o sistema em malha fechada da Figura 4.48 seja estável.

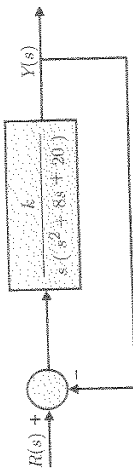


Figura 4.48 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

**Solução**

A função de transferência de malha aberta possui um polo na origem e dois polos complexos conjugados localizados em  $s = -4 \pm 2j$ . Assim, o lugar das raízes possui  $n = 3$  ramos, sendo os ângulos das assíntotas:

$$(4.133) \quad \sigma_1 = \frac{180^\circ}{n-m} = \frac{180^\circ}{3-0} = 60^\circ, \quad \sigma_2 = \frac{180^\circ}{n-m} = \frac{180^\circ}{3-0} = 180^\circ \text{ e } \sigma_3 = \frac{180^\circ}{n-m} = \frac{180^\circ}{3-0} = 300^\circ$$

Um ramo começa no polo em  $s = 0$  e termina em  $-\infty$  seguindo a assíntota de  $180^\circ$ . Os outros dois ramos começam nos polos complexos e terminam no infinito seguindo as assíntotas com ângulos de  $60^\circ$  e  $300^\circ$ .

As assíntotas cruzam o eixo real no ponto

$$(4.134) \quad S_c = \frac{\text{(soma dos polos de malha aberta)}}{n-m} = \frac{\text{(soma dos zeros de malha aberta)}}{n-m} = \frac{0 - 4 + 2j - 4 - 2j}{3-0} = -2,7$$

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$(4.135) \quad Y(s) = \frac{k}{s^3 + 8s^2 + 20s + k}$$

Assim, a equação característica é

$$(4.136) \quad s^3 + 8s^2 + 20s + k = 0 \Rightarrow k = -(s^3 + 8s^2 + 20s)$$

Os pontos de partida e de chegada no eixo real são calculados a partir da condição (4.21), ou seja,

$$(4.137) \quad \frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow -(3s^2 + 16s + 20) = 0$$

As raízes da Equação (4.137) são  $s = -2$  e  $s = -3,33$ . Como estes pontos fazem parte do lugar das raízes, então eles são pontos de partida e de chegada. O gráfico do lugar geométrico das raízes apresenta o aspecto da Figura 4.49.

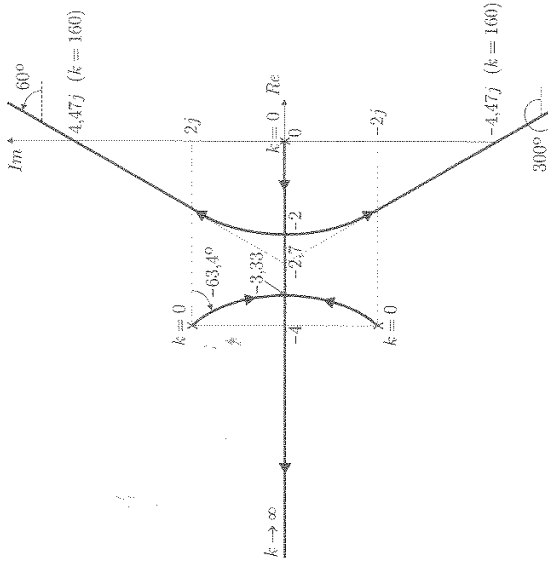


Figura 4.49 Lugar geométrico das raízes.

Os ângulos de partida dos polos complexos podem ser calculados através da condição de fase. Por exemplo, o ângulo de partida do polo em  $s = -4 + 2j$  é dado por

$$(4.138) \quad \begin{aligned} \angle s + 4 - 2j &= 180^\circ - \angle s - \angle s + 4 + 2j = 180^\circ - \angle -4 + 2j - \angle -4j \\ &= 180^\circ - 153,4^\circ - 90^\circ = -63,4^\circ \end{aligned}$$

Para determinar a faixa de valores do ganho  $k$  de modo que o sistema em malha fechada seja estável basta aplicar o critério de Routh. A partir do denominador da função de transferência de malha fechada (4.135) pode-se montar a Tabela 4.3.

Tabela 4.3 Tabela de Routh

$s^3$	1	20	
$s^2$	8	$k$	
$s^1$	$b_1$	$c_1$	
$s^0$	$c_1$		

1ª coluna de coeficientes

Os coeficientes  $b_1$  e  $c_1$  da tabela de Routh valem

$$(4.139) \quad b_1 = \frac{160 - k}{8} \text{ e } c_1 = k$$

Todos os coeficientes da primeira coluna da tabela de Routh têm o mesmo sinal para

$$(4.140) \quad b_1 > 0 \Rightarrow k < 160 \text{ e } c_1 > 0 \Rightarrow k > 0$$

Portanto, o sistema em malha fechada é estável para  $0 < k < 160$ .

Outra maneira de encontrar o valor de  $k$  é determinar os pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário, bastando para isso fazer  $s = j\omega$  na equação característica (4.136). Igualando as partes real e imaginária a zero obtêm-se os pontos de cruzamento e o valor de  $k$  nesses pontos. Então,

$$(j\omega)^3 + 8(j\omega)^2 + 20j\omega + k = 0 \Rightarrow k - 8\omega^2 + j\omega(20 - \omega^2) = 0. \quad (4.141)$$

Logo, os pontos de cruzamento do lugar das raízes no eixo imaginário estão localizados em  $w = \pm\sqrt{20} \approx \pm 4,47$ , e o valor de  $k$  nesses pontos vale  $k = 8\omega^2 = 160$ .

**Exercício 4.4**

Desenhe o lugar das raízes e determine a faixa de valores do ganho  $k$  de modo que o sistema em malha fechada da Figura 4.50 seja estável.

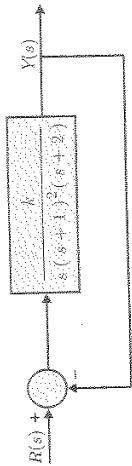


Figura 4.50 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

**Solução**

A função de transferência de malha aberta possui quatro polos, que estão localizados em  $s = 0$ ,  $s = -1$  (polo duplo) e  $s = -2$ . Os segmentos do eixo real que fazem parte do lugar das raízes estão nos intervalos de 0 a -1 e de -1 a -2. O lugar das raízes possui  $n = 4$  ramos, que começam nos polos e terminam no infinito seguindo assíntotas com os ângulos:

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ}{n-m} = 45^\circ, \quad \alpha_2 = 3 \frac{180^\circ}{n-m} = 135^\circ, \quad \alpha_3 = 5 \frac{180^\circ}{n-m} = 225^\circ \text{ e } \alpha_4 = 7 \frac{180^\circ}{n-m} = 315^\circ. \quad (4.142)$$

As assíntotas cruzam o eixo real no ponto

$$S_c = \frac{(\text{soma dos polos de malha aberta}) - (\text{soma dos zeros de malha aberta})}{n-m} = \frac{0 - 1 - 1 - 2}{4 - 0} = -1. \quad (4.143)$$

A função de transferência de malha fechada é dada por

$$Y(s) = \frac{k}{s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + k}. \quad (4.144)$$

Assim, a equação característica é

$$s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + k = 0 \Rightarrow k = -(s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s). \quad (4.145)$$

Os pontos de partida do eixo real são calculados a partir da condição (4.21), ou seja,

$$\frac{dk}{ds} = 0 = -(4s^3 + 12s^2 + 10s + 2). \quad (4.146)$$

As raízes da Equação (4.146) são  $s \approx -0,29$ ,  $s \approx -1,71$  e  $s = -1$ . Como estes pontos fazem parte do lugar das raízes eles são pontos de partida do eixo real. O gráfico do lugar geométrico das raízes apresenta o aspecto da Figura 4.51.

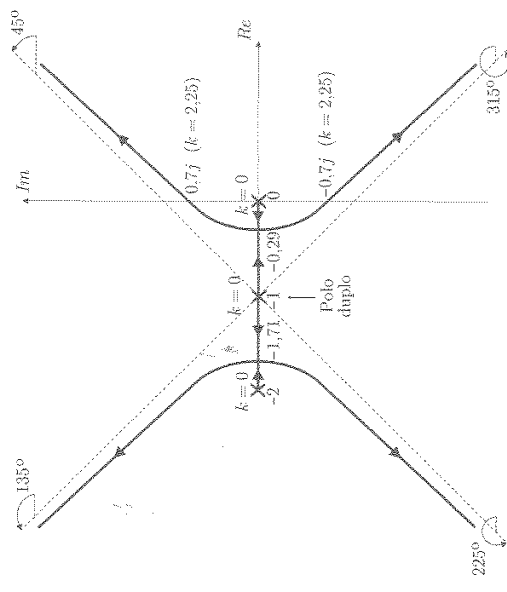


Figura 4.51 Lugar geométrico das raízes.

Para determinar a faixa de valores do ganho  $k$  de modo que o sistema em malha fechada seja estável basta aplicar o critério de Routh. A partir do denominador da função de transferência de malha fechada (4.144) pode-se montar a Tabela 4.4.

Tabela 4.4 Tabela de Routh

$s^4$	1	5	$k$
$s^3$	4	2	
$s^2$	$b_1$	$b_2$	
$s^1$	$c_1$		
$s^0$	$d_1$		

1ª coluna de coeficientes

Os coeficientes da tabela de Routh valem

$$b_1 = 4,5, \quad b_2 = k, \quad c_1 = \frac{9-4k}{4,5} \text{ e } d_1 = k. \quad (4.147)$$

Todos os coeficientes da primeira coluna da tabela de Routh têm o mesmo sinal para

$$c_1 > 0 \Rightarrow k < 2,25 \quad \text{e} \quad d_1 > 0 \Rightarrow k > 0. \quad (4.148)$$

Portanto, o sistema em malha fechada é estável para  $0 < k < 2,25$ .

Outra maneira de encontrar o valor de  $k$  é determinar os pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário, bastando para isso fazer  $s = j\omega$  na equação característica (4.145). Igualando as partes real e imaginária a zero obtêm-se os pontos de cruzamento e o valor de  $k$  nesses pontos. Então,

$$(j\omega)^4 + 4(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 2j\omega + k = 0 \Rightarrow k + \omega^4 - 5\omega^2 + j\omega(2 - 4\omega^2) = 0. \quad (4.149)$$

Logo, os pontos de cruzamento do lugar das raízes no eixo imaginário estão localizados em  $w = \pm\sqrt{0,5} \approx \pm 0,7$  e o valor de  $k$  nesses pontos vale  $k = 5\omega^2 - \omega^4 = 2,25$ .

Exercício 4.5

Desenhe o lugar das raízes do sistema em malha fechada da Figura 4.52.

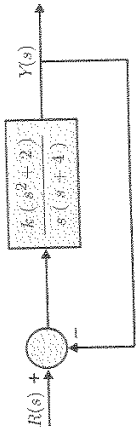


Figura 4.52 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Solução

A função de transferência de malha aberta possui  $n = 2$  polos ( $s = 0$  e  $s = -4$ ) e  $m = 2$  zeros ( $s = \pm\sqrt{2}j$ ). O segmento do eixo real no intervalo aberto de 0 a  $-4$  pertence ao lugar das raízes, pois à direita de qualquer ponto deste segmento há um número ímpar de raízes. O lugar das raízes começa nos polos e termina nos zeros de malha aberta, quando  $k$  varia de zero a infinito. Como há dois polos de malha aberta adjacentes sobre o eixo real ( $s = 0$  e  $s = -4$ ) e como o segmento entre eles faz parte do lugar das raízes, então há um ponto de partida neste segmento.

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s^2 + 2)}{s^2 + 4s + k(s^2 + 2)} \quad (4.150)$$

Assim, a equação característica é

$$s^2 + 4s + k(s^2 + 2) = 0 \Rightarrow k = -\frac{(s^2 + 4s)}{s^2 + 2} \quad (4.151)$$

Aplicando a condição (4.21), obtém-se

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow -\left[ \frac{(2s + 4)(s^2 + 2) - (s^2 + 4s)2s}{(s^2 + 2)^2} \right] = 0 \quad (4.152)$$

ou seja,

$$2s^3 + 4s + 4s^2 + 8 - 2s^3 - 8s^2 = 0 \Rightarrow s^2 - s - 2 = 0 \quad (4.153)$$

As raízes do polinômio (4.153) são  $s = -1$  e  $s = +2$ . Porém, apenas o ponto  $s = -1$  é ponto de partida, pois o ponto em  $s = +2$  não faz parte do lugar das raízes.

O gráfico do lugar geométrico das raízes apresenta o aspecto da Figura 4.53.

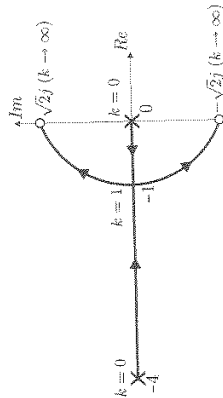


Figura 4.53 Lugar geométrico das raízes.

4.8 Exercícios resolvidos

O valor de  $k > 0$  em qualquer ponto do lugar das raízes pode ser calculado a partir da condição de módulo (4.4), ou seja,

$$\left| \frac{k(s^2 + 2)}{s(s + 4)} \right| = 1 \Rightarrow k = \frac{|s||s + 4|}{|s^2 + 2|} \quad (4.154)$$

Calculando o valor de  $k$  no ponto de partida em  $s = -1$  obtém-se  $k = 1$ .

Para mostrar que parte do lugar das raízes forma uma circunferência basta verificar a condição de fase (4.5), ou seja,

$$\angle \frac{s + \sqrt{2}j}{s} + \angle \frac{s - \sqrt{2}j}{s + 4} - \angle s - \angle \frac{s + 4}{s} = 180^\circ \pm r360^\circ \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.155)$$

Substituindo  $s = a + j\omega$  e escolhendo  $r = 0$ , obtém-se

$$\angle \frac{a + j\omega + \sqrt{2}j}{a + j\omega} + \angle \frac{a + j\omega - \sqrt{2}j}{a + j\omega + 4} - \angle a + j\omega - \angle \frac{a + j\omega + 4}{a + j\omega} = 180^\circ \pm r360^\circ \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.156)$$

ou

$$\arctan\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{a}\right) + \arctan\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{a + 4}\right) + 180^\circ \quad (4.157)$$

Sabendo-se que

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{e que } \tan(\alpha + 180^\circ) = \tan(\alpha),$$

obtém-se

$$\frac{\frac{\omega + \sqrt{2}}{a} + \frac{\omega - \sqrt{2}}{a}}{1 - \left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{a}\right)\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{a}\right)} = \frac{\frac{\omega}{a} + \frac{\omega}{a + 4}}{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)\left(\frac{\omega}{a + 4}\right)} \quad (4.158)$$

A Equação (4.158) pode ser simplificada para

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad (4.159)$$

que representa a equação de uma circunferência com centro no ponto  $(\frac{1}{2}, 0)$  e raio igual a  $1,5$ .

Exercício 4.6

Considere o sistema estável em malha aberta cuja função de transferência é

$$G_{ma}(s) = \frac{ke^{-2s}}{s + 1} \quad (4.160)$$

Utilizando a aproximação de Padé de ordem(2,2), pede-se que

- desenhe o lugar das raízes;
- determine os pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário e a faixa de valores do ganho  $k$  de modo que o sistema em malha fechada seja estável.

Solução

Da Tabela 4.2, obtém-se

$$G_{ma}(s) = \frac{k}{(s + 1)(4s^2 + 12s + 12)} = \frac{k(s^2 - 3s + 3)}{(s + 1)(s^2 + 3s + 3)}, \quad (4.161)$$

com zeros em  $s = 1,5 \pm 0,866j$  e com polos em  $s = -1$  e  $s = -1,5 \pm 0,866j$ .

O gráfico do lugar das raízes está representado na Figura 4.54. Note que o sistema com atraso puro (4.160) é estável em malha fechada apenas para uma faixa de valores do ganho  $k$ , pois o lugar das raízes cruza o eixo imaginário.

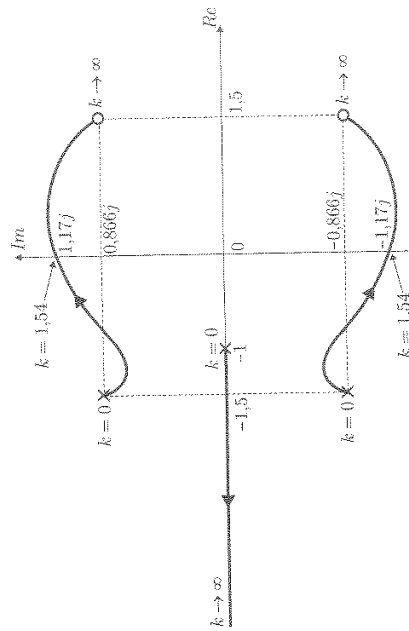


Figura 4.54 Lugar das raízes.

A função de transferência de malha fechada com realimentação unitária é

$$G_{mf}(s) = \frac{G_{ma}(s)}{1 + G_{ma}(s)} = \frac{k(s^2 - 3s + 3)}{s^3 + (4+k)s^2 + (6-3k)s + 3 + 3k} \quad (4.162)$$

Os pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário podem ser determinados por meio da substituição  $s = 0 + j\omega$  no denominador da função  $G_{mf}(s)$ , ou seja,

$$(j\omega)^3 + (4+k)(j\omega)^2 + (6-3k)j\omega + 3 + 3k = 0 \quad (4.163)$$

ou

$$j\omega(-\omega^2 + 6 - 3k) - \omega^2(4+k) + 3 + 3k = 0 \quad (4.164)$$

Igualando a zero as partes imaginária e real, obtém-se

$$\omega^2 = 6 - 3k \quad e \quad (4.165)$$

$$-(6 - 3k)(4+k) + 3 + 3k = 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 7 = 0 \quad (4.166)$$

A única solução da Equação (4.166) para  $k > 0$  é  $k \cong 1,54$ . Logo, os pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário são  $\omega j = \pm 1,17j$ .

Do lugar das raízes conclui-se que o sistema em malha fechada é estável para  $0 < k < 1,54$ . Observe que com a aproximação de Padé de ordem (2,2) o valor de  $k$  é um pouco maior que o ganho  $k < 1,5$ , calculado por meio da função exata no Exemplo 4.4.

**Exercício 4.7**

Considere um sistema com realimentação unitária cujo gráfico do lugar das raízes é apresentado na Figura 4.55. Sabendo-se que é aplicado um degran unitário na referência, calcule:

- a) o ganho para que a resposta do sistema em malha fechada tenha amortecimento crítico;
- b) o ganho e o tempo de subida para que a resposta do sistema em malha fechada tenha um sobressinal máximo de 16,3%;
- c) o erro estacionário em cada um dos casos anteriores.

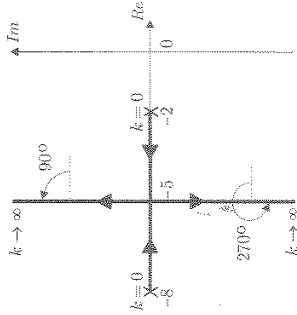


Figura 4.55 Lugar das raízes.

**Solução**

a) O gráfico do lugar das raízes da Figura 4.55 representa um sistema de segunda ordem com função de transferência de malha aberta

$$G(s) = \frac{k}{(s+2)(s+8)} \quad (4.167)$$

A resposta do sistema em malha fechada tem amortecimento crítico quando os polos de malha fechada são reais e iguais. Pelo lugar das raízes isso ocorre em  $s = -5$ . Da condição de módulo (4.4)

$$\left| \frac{k}{(s+2)(s+8)} \right|_{s=-5} = 1 \Rightarrow k = |s+2||s+8|_{s=-5} \Rightarrow k = 9 \quad (4.168)$$

b) O sobressinal é dado por

$$M_p = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0,163 \quad (4.169)$$

cujos coeficiente de amortecimento vale  $\xi \cong 0,5$ .

Para que a resposta transitória tenha sobressinal os polos de malha fechada devem ser complexos conjugados. Do lugar das raízes a parte real desses polos vale  $-\xi\omega_n = -5$ .

Logo,  $\omega_n = 10$  (rad/s), e os polos de malha fechada devem estar localizados em

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}j = -5 \pm 5\sqrt{3}j \quad (4.170)$$

Da condição de módulo (4.4)

$$\left| \frac{k}{(s+2)(s+8)} \right|_{s=-5+5\sqrt{3}j} = 1 \Rightarrow k = |s+2||s+8|_{s=-5+5\sqrt{3}j} \Rightarrow k = 84 \quad (4.171)$$

O tempo de subida é dado por

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 0,24 \quad (4.172)$$

c) O erro estacionário pode ser calculado pelo teorema do valor final

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1+G(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k}{(s+2)(s+8)}} = \frac{16}{16+k} \quad (4.173)$$

Para  $k = 9 \Rightarrow e(\infty) \cong 0,64$  e para  $k = 84 \Rightarrow e(\infty) \cong 0,16$ .

Exercício 4.8

O diagrama de blocos da Figura 4.56 representa um motor CC com realimentação auxiliar da velocidade  $v(t)$ . Determine os valores dos ganhos  $K_c$  e  $K_t$  para que a resposta da posição  $x(t)$  apresente um tempo de subida  $t_r = 0,4$  s e coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,7$  quando é aplicado um degrau na referência.

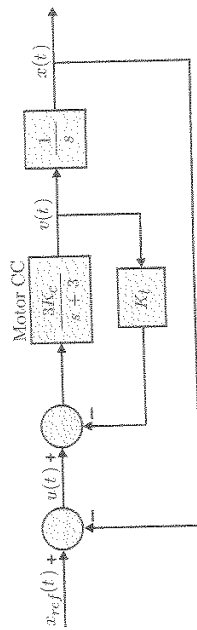


Figura 4.56 Motor CC com realimentação auxiliar da velocidade  $v(t)$ .

Solução

Do tempo de subida obtém-se a frequência natural  $\omega_n$ , ou seja,

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{t_r \sqrt{1 - \xi^2}} \cong 8,213 \text{ (rad/s)}. \tag{4.174}$$

A função de transferência da malha interna é

$$V(s) = \frac{3K_c}{s + 3 + 3K_c K_t}. \tag{4.175}$$

A função de transferência da malha externa é

$$\frac{X(s)}{X_{ref}(s)} = \frac{3K_c}{s^2 + (3 + 3K_c K_t)s + 3K_c} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{4.176}$$

Logo,

$$K_c = \frac{\omega_n^2}{3} \cong 22,486 \text{ e} \tag{4.177}$$

$$K_t = \frac{2\xi\omega_n - 3}{3K_c} \cong 0,126. \tag{4.178}$$

Na Figura 4.57 é apresentada a resposta  $x(t)$  para um degrau unitário na referência  $x_{ref}(t)$ . Para  $\xi = 0,7$  o sobressinal é  $M_p \cong 4,6\%$ .

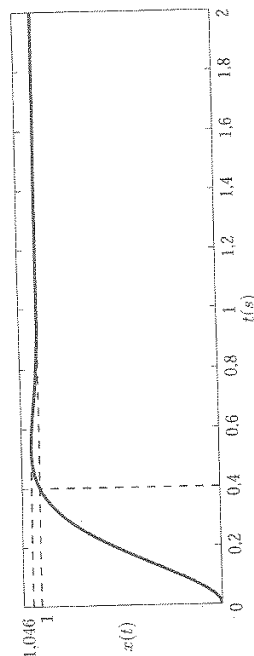


Figura 4.57 Resposta  $x(t)$  para um degrau unitário na referência  $x_{ref}(t)$ .

4.8 Exercícios resolvidos

Exercício 4.9

Um pêndulo invertido é montado sobre um carrinho que se movimenta no eixo horizontal  $x(t)$  por meio de um motor CC acoplado ao trilho. O pêndulo possui movimento angular  $\theta(t)$ , conforme é mostrado na Figura 4.58. Deseja-se obter um modelo que descreva o comportamento dinâmico do sistema e projetar um sistema de controle para equilibrar o pêndulo na posição vertical, conforme o carrinho se movimenta no eixo  $x(t)$ . Suponha que a aceleração da gravidade é  $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$  e que o pêndulo tem comprimento  $2l = 1 \text{ (m)}$ , massa  $m$ , momento de inércia  $J$  e centro de gravidade no ponto G. Para pequenas variações em torno do ponto de equilíbrio deseja-se que a resposta tenha um tempo de subida  $t_r = 0,5$  s e coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,7$ .

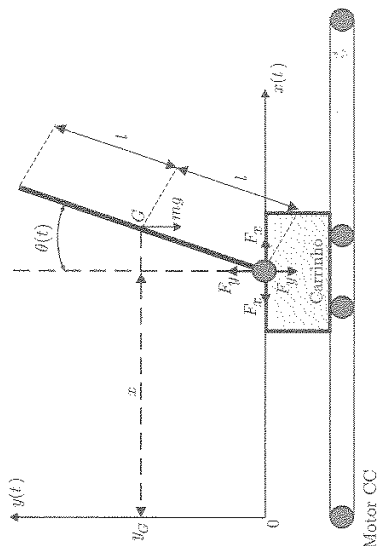


Figura 4.58 Pêndulo invertido sobre um carrinho com movimento no eixo  $x(t)$ .

Solução

O centro de gravidade do pêndulo é o ponto  $(x_G(t), y_G(t))$ . Da Figura 4.58 tem-se

$$x_G(t) = x(t) + l \sin \theta(t), \tag{4.179}$$

$$y_G(t) = l \cos \theta(t). \tag{4.180}$$

O movimento de rotação do pêndulo em torno do centro de gravidade é dado por

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = F_y(t) l \sin \theta(t) - F_x(t) l \cos \theta(t). \tag{4.181}$$

Supondo que o momento de inércia seja desprezível ( $J \cong 0$ ) e que o desvio angular  $\theta(t)$  em torno da posição vertical seja "pequeno", então podem-se fazer as seguintes aproximações:  $\sin \theta(t) \cong \theta(t)$  e  $\cos \theta(t) \cong 1$ . Assim,

$$F_y(t) \theta(t) = F_x(t). \tag{4.182}$$

O movimento horizontal do centro de gravidade do pêndulo é dado por

$$m \frac{d^2 x_G(t)}{dt^2} = F_x(t) \tag{4.183}$$

e o movimento vertical por

$$m \frac{d^2 y_G(t)}{dt^2} = F_y(t) - mg. \tag{4.184}$$

Da Equação (4.182) obtém-se

$$\left[ m \frac{d^2 y_G(t)}{dt^2} + mg \right] \theta(t) = m \frac{d^2 x_G(t)}{dt^2}. \tag{4.185}$$



O emprego das aproximações  $\sin \theta(t) \cong \theta(t)$  e  $\cos \theta(t) \cong 1$  tem a vantagem de tornar linear o sistema resultante, isto tem como consequência que o sistema de controle só funciona em regiões próximas do ponto de equilíbrio, isto é, para pequenas variações do ângulo  $\theta(t)$ . Das Equações (4.179) e (4.180) obtêm-se

$$x_C(t) \cong x(t) + l\theta(t), \tag{4.186}$$

$$y_C(t) \cong l. \tag{4.187}$$

Da Equação (4.185) obtêm-se

$$g\theta(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + l \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \tag{4.188}$$

ou

$$l \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} - g\theta(t) = - \frac{d^2 x(t)}{dt^2}. \tag{4.189}$$

Aplicando a transformada de Laplace, com condições iniciais nulas, obtêm-se a função de transferência

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{-g}{s^2 - \frac{g}{l}}. \tag{4.190}$$

A função de transferência (4.190) possui como entrada a posição  $x(t)$  do carrinho e como saída o desvio angular  $\theta(t)$ . Uma função de transferência alternativa é considerar como saída a posição  $x_C(t)$  do centro de gravidade, em vez do ângulo  $\theta(t)$ , isto é,

$$X_C(s) = X(s) + l\Theta(s) = X(s) - l \frac{g}{s^2 - \frac{g}{l}} X(s) = \frac{-g}{s^2 - \frac{g}{l}} X(s), \tag{4.191}$$

ou seja,

$$\frac{X_C(s)}{X(s)} = \frac{-g}{s^2 - \frac{g}{l}}. \tag{4.192}$$

A vantagem em considerar como saída a posição  $x_C(t)$  e não o ângulo  $\theta(t)$  é que o sistema de controle também funciona em superfícies inclinadas, cujo ângulo total formado com a vertical é a soma de  $\theta(t)$  com o ângulo da inclinação da superfície. Quando a realimentação é feita pela posição  $\theta(t)$  o controlador tende a fazer  $\theta(t) \cong 0$ , mas deixando o pêndulo inclinado devido ao ângulo da superfície. Se esta inclinação for elevada o pêndulo pode sair da região de equilíbrio, instabilizando o sistema. Isso já não ocorre quando a realimentação é feita pela posição  $x_C(t)$ , que é a soma da posição  $x(t)$  com a projeção de um ângulo qualquer no eixo horizontal.

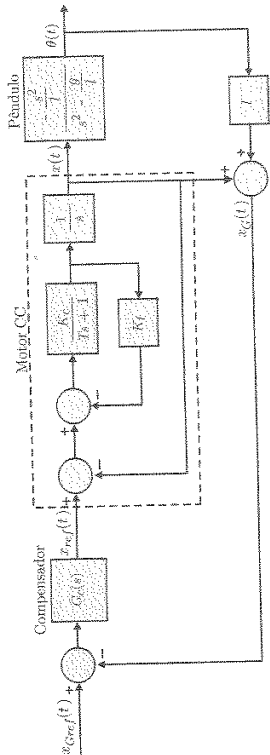


Figura 4.59 Diagrama de blocos completo do sistema.

Na Figura 4.59 é apresentado o diagrama de blocos completo do sistema, incluindo o sistema de controle do motor CC, responsável pelo movimento do carrinho no eixo  $x(t)$ . Para o controle da posição  $x(t)$  pode-se empregar um ganho proporcional  $K_c$  e outro  $K_f$  na realimentação auxiliar de velocidade do motor. O cálculo desses ganhos pode ser feito por meio de especificações transitórias, semelhantes às do Exercício 4.8.

No estado estacionário a função de transferência  $X(s)/X_{ref}(s)$  tem ganho 1. Desse modo o diagrama de blocos pode ser simplificado de acordo com a Figura 4.60.

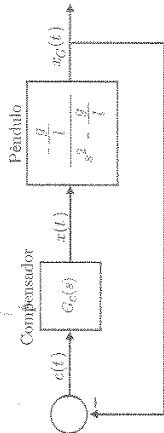


Figura 4.60 Diagrama de blocos simplificado do sistema.

O pêndulo invertido é um sistema instável em malha aberta. Para deslocar o polo instável para o semiplano esquerdo do plano  $s$  pode-se utilizar um compensador  $G_c(s)$  por avanço de fase com função de transferência

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{s + z_c}{s + p_c} \right), \quad z_c < p_c. \tag{4.183}$$

Cancelando o zero do compensador com o polo estável do pêndulo ( $z_c = \sqrt{g/l} \cong 4,47$ ) a função de transferência de malha aberta resulta como

$$G_{ma}(s) = -k_c \frac{g}{(s + p_c)(s - \sqrt{g/l})}. \tag{4.194}$$

Para  $k_c > 0$  o sistema em malha fechada é sempre instável, conforme mostra o lugar das raízes da Figura 4.61.

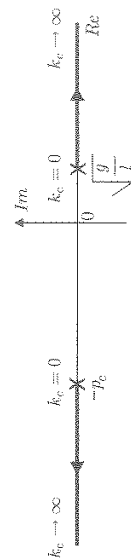


Figura 4.61 Lugar das raízes para  $k_c > 0$ .

Para  $k_c < 0$  o sistema em malha fechada é estável para uma faixa de ganho  $k_c$ , conforme mostra o lugar das raízes da Figura 4.62.

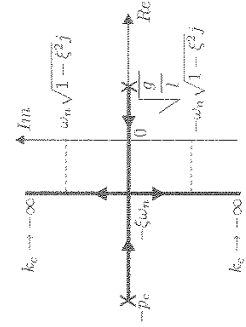


Figura 4.62 Lugar das raízes para  $k_c < 0$ .

Do tempo de subida obtém-se a frequência natural  $\omega_n$ , ou seja,

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{t_r \sqrt{1 - \xi^2}} \cong 6,57 \text{ (rad/s)} \quad (4.195)$$

Para que as especificações de transitório sejam satisfeitas os polos de malha fechada devem estar localizados em

$$(4.196)$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cong -4,60 \pm j4,69j$$

Para que o lugar das raízes passe pelos polos  $s_1$  e  $s_2$  é preciso que

$$\frac{-p_c + \sqrt{g}}{2} = -\xi\omega_n \Rightarrow p_c = 2\xi\omega_n + \sqrt{g} \Rightarrow p_c \cong 13,67 \quad (4.197)$$

O ganho  $k_c < 0$ , em qualquer ponto do lugar das raízes, pode ser calculado por meio da condição de módulo. Num dos polos de malha fechada tem-se que

$$-k_c \left| \frac{-g}{(s + p_c)(s - \sqrt{g})} \right|_{s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 1 \quad (4.198)$$

$$k_c = -\frac{g}{s + p_c} \Big|_{s = -\xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow k_c = -5,21 \quad (4.199)$$

$$G_c(s) = -5,21 \left( \frac{s + 4,47}{s + 13,67} \right) \quad (4.200)$$

Portanto, a função de transferência do compensador por avanço de fase é

$$-k_c \left| \frac{-g}{(s + p_c)(s - \sqrt{g})} \right|_{s=0} = 1 \Rightarrow k_c = -\frac{g}{p_c} \sqrt{\frac{g}{l}} = -p_c \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow k_c \cong -3 \quad (4.201)$$

Portanto, com o compensador por avanço de fase o sistema em malha fechada é estável apenas para  $k_c < -3$ .

Na Figura 4.63 é apresentada a resposta  $x_G(t)$  para um degrau unitário na referência  $x_{Grref}(t)$ . Para  $\xi = 0,7$  o sobressinal é  $M_p = [(2,53 - 2,42)/2,42] 100\% \cong 4,6\%$ . Note que a resposta possui um erro estacionário

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{X_{Grref}(s)}{1 + G_{mal}(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_c \sqrt{g}}{p_c \sqrt{g}}} = 1 - x_G(\infty) \cong -1,42 \quad (4.202)$$

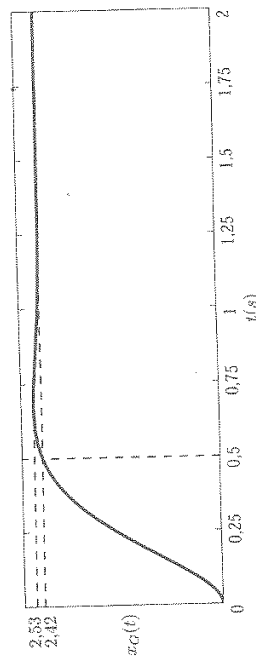


Figura 4.63 Resposta  $x_G(t)$  para um degrau unitário na referência  $x_{Grref}(t)$ .

É importante observar que como o sistema real é não linear e como este foi aproximado por um sistema linear, o projetista deve estar atento para o fato de que o compensador projetado funciona apenas para pequenas variações em torno do ponto de equilíbrio  $\theta(t) \cong 0$ .

Exercício 4.10

Considere o sistema da Figura 4.64.

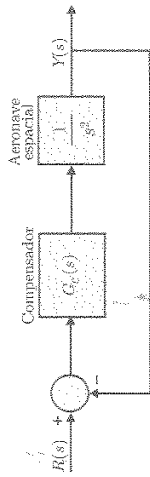


Figura 4.64 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Deseja-se especificar os polos de malha fechada dominantes com coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,5$  e frequência natural  $\omega_n = 4$  (rad/s).

- Mostre que não é possível satisfazer às especificações se  $G_c(s) = k$ .
- Determine a função de transferência do compensador  $G_c(s)$ , de modo que os polos de malha fechada dominantes satisficam às especificações desejadas.

Solução

Para que as especificações sejam satisfeitas os polos de malha fechada dominantes devem estar localizados em

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -2 \pm j2\sqrt{3}j \quad (4.203)$$

Se  $G_c(s) = k$  a função de transferência de malha aberta é  $G(s) = k/s^2$ , e o lugar das raízes correspondente é o da Figura 4.65. Nesse caso o sistema em malha fechada é BIBO instável, pois os polos de malha fechada estão sempre localizados sobre o eixo imaginário para qualquer  $0 < k < \infty$ .

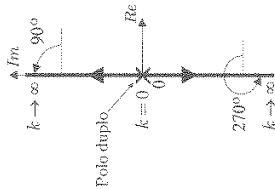


Figura 4.65 Lugar das raízes com  $G_c(s) = k$ .

Para que o lugar das raízes passe pelos polos  $s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}j$  é necessário deslocar o lugar de fase para a esquerda do plano  $s$ . Para isso pode-se empregar um compensador por avanço de fase

$$G_c(s) = k_c \left( \frac{s + z_c}{s + p_c} \right) \quad (4.204)$$

Com isso, a função de transferência de malha aberta fica

$$G(s) = k_c \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)s^2} \quad (4.205)$$

O polo e o zero do compensador podem ser colocados em diversas posições. Supondo que o polo compensador está 10 vezes mais distante que o seu zero ( $p_c = 10z_c$ ), da condição de fase, tem-se que

$$\angle s + z_c - \angle s + 10z_c = 2 \angle s = -180^\circ \quad (4.206)$$

No polo de malha fechada  $s = -2 + 2\sqrt{3}j$  tem-se que

$$\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{z_c - 2}\right) - \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{10z_c - 2}\right) = -180^\circ + 240^\circ = 60^\circ \quad (4.207)$$

Calculando a tangente dos dois membros da Equação (4.207), obtêm-se

$$\frac{2\sqrt{3}}{z_c - 2} - \frac{2\sqrt{3}}{10z_c - 2} = \sqrt{3} \quad (4.208)$$

Resolvendo a Equação (4.208) obtêm-se  $z_c^2 - 4z_c + 1,6 = 0$ , cuja solução é  $z_c \approx 0,45$  ou  $z_c \approx 3,55$ .

O valor do ganho  $k_c > 0$  pode ser obtido por meio da condição de módulo, ou seja,

$$\left| \frac{k_c(s + z_c)}{(s + p_c)^2} \right| = 1 \Rightarrow k_c = \frac{|s + p_c| |s|^2}{|s + z_c|} \quad (4.209)$$

sendo  $s$  um dos polos de malha fechada  $s_{1,2} = -2 + 2\sqrt{3}j$ .

Para  $z_c = 0,45$  e  $p_c = 4,5$  obtêm-se  $k_c \approx 18$  e

$$G_c(s) = 18 \left( \frac{s + 0,45}{s + 4,5} \right) \quad (4.210)$$

Para  $z_c = 3,55$  e  $p_c = 35,5$  obtêm-se  $k_c \approx 142$  e

$$G_c(s) = 142 \left( \frac{s + 3,55}{s + 35,5} \right) \quad (4.211)$$

O lugar das raízes do sistema com os compensadores (4.210) e (4.211) é apresentado nas Figuras 4.66 (a) e (b).

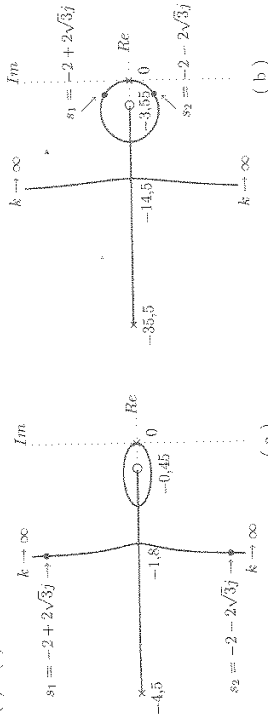


Figura 4.66 Lugar das raízes. (a) compensador (4.210) e (b) compensador (4.211).

O sistema em malha fechada resultante é de ordem 3. Com o compensador (4.210) tem-se que

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{18(s + 0,45)}{(s + 0,5)(s + 2 - 2\sqrt{3}j)(s + 2 + 2\sqrt{3}j)} \quad (4.212)$$

4.8 Exercícios resolvidos

e com o compensador (4.211)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{142(s + 3,55)}{(s + 31,5)(s + 2 - 2\sqrt{3}j)(s + 2 + 2\sqrt{3}j)} \quad (4.213)$$

de modo que os polos complexos conjugados dessas duas funções satisfazem à especificação (4.203).

As respostas ao degrau unitário do sistema em malha fechada com os compensadores (4.210) e (4.211) são apresentadas na Figura 4.67 (a) e (b), respectivamente. Sistemas de segunda ordem com coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,5$  e frequência natural  $\omega_n = 4$  (rad/s) produzem resposta transitória com sobressinal  $M_p \approx 16,3\%$  e tempo de subida  $t_r \approx 0,6$  s. Os resultados apresentados na Figura 4.67 são um pouco diferentes pelo fato de o sistema em malha fechada ser de terceira ordem. Dá a importância de verificar, por meio de simulações computacionais, se os resultados obtidos são satisfatórios. Caso contrário o projeto do compensador deve ser refeito.

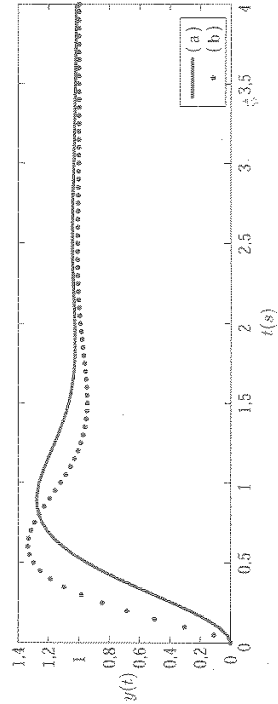


Figura 4.67 Respostas ao degrau unitário. (a) compensador (4.210) e (b) compensador (4.211).

Exercício 4.11

Projete um compensador  $G_c(s)$  para o processo industrial com atraso puro da Figura 4.68 de modo que:

- o erro estacionário seja de 0,02 quando é aplicado um degrau unitário na referência;
- a resposta transitória dos sistemas em malha fechada com e sem compensador não tenha alteração significativa.

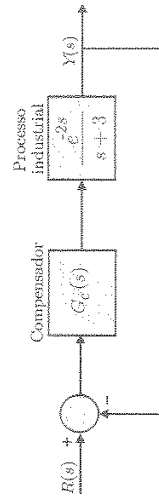


Figura 4.68 Sistema em malha fechada de um processo industrial.

Solução

Usando a aproximação de Padé de ordem (1,1) da Tabela 4.2, a função de transferência do processo resulta como

$$G_p(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)} \tag{4.214}$$

$$\approx \frac{1}{(s+3)} \frac{(-2s+2)}{(2s+2)} = \frac{-s+1}{(s+1)(s+3)} \tag{4.215}$$

Supondo  $G_c(s) = 1$ , a função de transferência de malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{-(s-1)}{(s+1)(s+3) - (s-1)} = \frac{-(s-1)}{s^2 + 3s + 4}$$

cujos polos de malha fechada estão localizados em  $s_{1,2} \approx -1,50 \pm 1,32j$ , com coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,75$  e frequência natural  $\omega_n = 2$ .

Para obter um erro estacionário de 0,02 pode-se usar um compensador por atraso de fase com função de transferência

$$G_c(s) = \frac{k_c(s+z_c)}{s+p_c} \tag{4.217}$$

A função de transferência de malha aberta com o compensador  $G_c(s)$  é

$$G_{ma}(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{k_c(s+z_c)}{(s+p_c)} \frac{-(s-1)}{(s+1)(s+3)} \tag{4.218}$$

Logo, o erro estacionário com compensador para um degrau unitário na referência vale

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{1+G_{ma}(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{k_c(s+z_c)}{(s+1)(s+3)}} = \frac{1}{1 + \frac{k_c z_c}{3k_c}} = 0,02 \tag{4.219}$$

Para que a resposta transitória não tenha mudança significativa com o compensador  $G_c(s)$  a posição dos polos de malha fechada dominantes deve ser praticamente a mesma no lugar das raízes. Para isso, o ganho  $k_c$  deve valer aproximadamente 1. Logo,

$$\frac{1}{1 + \frac{z_c}{3}} \approx 0,02 \Rightarrow \frac{z_c}{3} \approx 147 \tag{4.220}$$

Escolhendo arbitrariamente o valor do polo  $p_c = 0,001$  próximo da origem obtém-se  $z_c = 0,147$ .

Na Figura 4.69 é apresentado o lugar das raízes do sistema compensado. Traçando uma reta pelo coeficiente de amortecimento  $\xi \approx 0,75$  obtêm-se os polos de malha fechada dominantes do sistema compensado que estão em  $s_{1,2} = -1,45 \pm 1,28j$ .

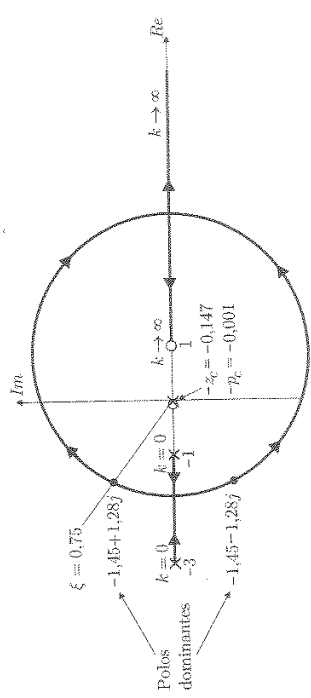


Figura 4.69 Lugar das raízes do sistema compensado.

O ganho  $k_c$  pode ser ajustado pela condição de módulo

$$\left| \frac{k_c(s+0,147)(-s+1)}{(s+0,001)(s+1)(s+3)} \right|_{s=-1,45 \pm 1,28j} = 1 \Rightarrow k_c \approx 1,044 \tag{4.221}$$

Portanto, a função de transferência do compensador por atraso de fase é

$$G_c(s) = \frac{1,044(s+0,147)}{s+0,001} \tag{4.222}$$

A função de transferência de malha fechada resultante é

$$\frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{-1,044(s+0,147)(s-1)}{(s+0,04)(s+1,45+1,28j)(s+1,45-1,28j)} \tag{4.223}$$

A Figura 4.70 mostra as respostas ao degrau unitário do sistema em malha fechada sem compensador (4.216) e com compensador (4.223). Observe que o transitório inicial das duas respostas é semelhante. Devido ao zero no semiplano direito do plano  $s$ , resultante da aproximação de Padé, a resposta se direciona nos instantes iniciais em sentido contrário ao seu valor estacionário.

Note que o erro estacionário do sistema com compensador está de acordo com o especificado ( $e(\infty) = 0,02$ ) e é bem menor que o erro do sistema sem compensador ( $e(\infty) = 1 - 0,25 = 0,75$ ).

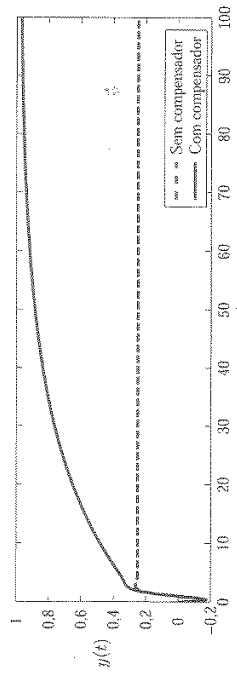


Figura 4.70 Respostas ao degrau unitário do sistema em malha fechada com e sem compensador.

Como o compensador  $G_c(s)$  foi projetado a partir do modelo (4.215), cujo atraso puro é aproximado por uma função de transferência, é importante verificar se a resposta transitória do sistema em malha fechada com atraso puro é satisfatória. Na Figura 4.71 é mostrada a resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada original da Figura 4.68 com o compensador (4.222).

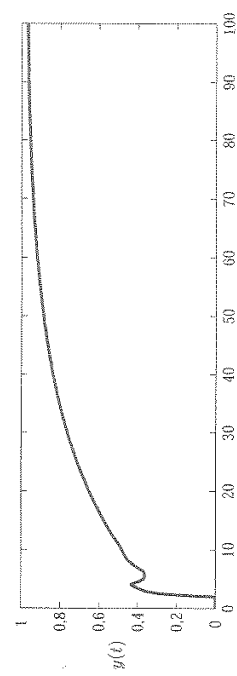


Figura 4.71 Resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada original.

Conforme se pode observar na Figura 4.71 não há compensador que consiga eliminar o efeito do atraso puro.

4.9 Exercícios propostos

Exercício 4.12

Considere o sistema da Figura 4.72.

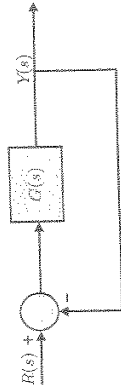


Figura 4.72 Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada.

Desenhe o lugar das raízes e determine a faixa de valores do ganho  $k$ , que estabiliza o sistema em malha fechada para as seguintes funções de transferência:

- a)  $G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$ ;
- b)  $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$ ;
- c)  $G(s) = \frac{k}{s^2 + 4s + 8}$ ;
- d)  $G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2}$ ;
- e)  $G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+4)}$ ;
- f)  $G(s) = \frac{k}{s(s^2 + 2s + 2)}$ ;
- g)  $G(s) = \frac{k}{(s+1)^2}$ ;
- h)  $G(s) = \frac{k}{(s+1)^3}$ .

Exercício 4.13

Recentemente um novo sistema de transporte ferroviário tem sido objeto de pesquisa [4]. A principal característica desse sistema é que o trem é levantado, com forças de guiagem e propulsão geradas magneticamente. Devido à ausência de atrito de contato o veículo pode atingir altíssimas velocidades com muito mais segurança que os aviões. Diversas tecnologias têm sido desenvolvidas para conseguir levantar o trem, e algumas delas utilizam eletroímãs. Para levantar o trem é necessário controlar os entreferros desses eletroímãs. A função de transferência do sistema de levitação eletromagnética de um trem está representada no diagrama de blocos da Figura 4.73.

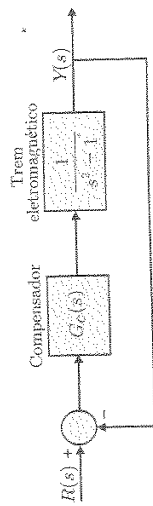


Figura 4.73 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Desaja-se projetar um compensador  $G_c(s)$  de modo que a resposta da saída  $y(t)$ , quando é aplicado um degrau unitário na referência  $r(t)$ , apresente um sobressinal de 16,3% e um tempo de subida de 1 s.

- Mostre que não é possível satisfazer às especificações se  $G_c(s) = k$ .
- Determine a função de transferência do compensador  $G_c(s)$  de modo que os polos de malha fechada dominantes satisfaçam às especificações desejadas.

Considere o sistema de controle da Figura 4.74.

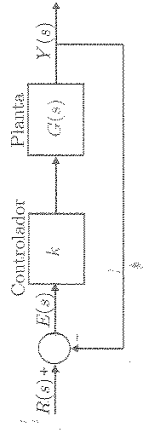


Figura 4.74 Sistema de controle em malha fechada.

O lugar das raízes de quatro sistemas está representado na Figura 4.75.

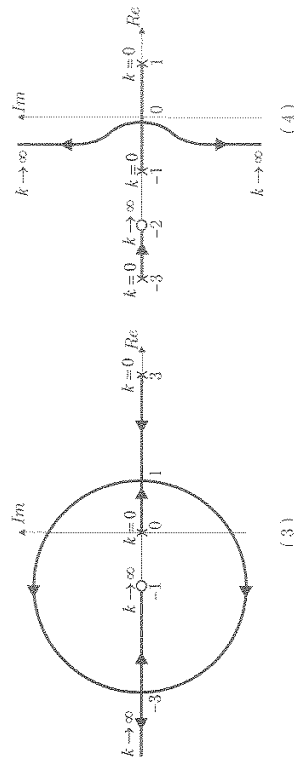
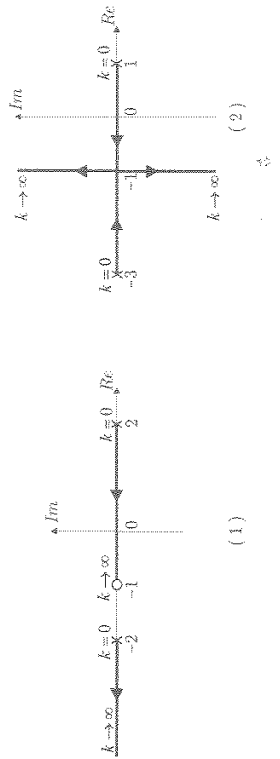


Figura 4.75 Lugar das raízes de quatro sistemas.

Para cada um dos quatro sistemas, determine:

- a) a função de transferência da planta;
- b) quais sistemas possuem resposta transitória, sempre amortecida;
- c) quais sistemas possuem resposta transitória com erro estacionário nulo quando é aplicado um degrau unitário na referência;
- d) a faixa de valores do controlador  $k$  para que o sistema em malha fechada seja estável;
- e) quais sistemas podem possuir resposta transitória com tempo de acomodação  $t_s \leq 2$  s pelo critério de 2%.

Exercício 4.14

Exercício 4.18

Considere o motor CC com realimentação auxiliar da velocidade  $\omega(t)$  da Figura 4.79.

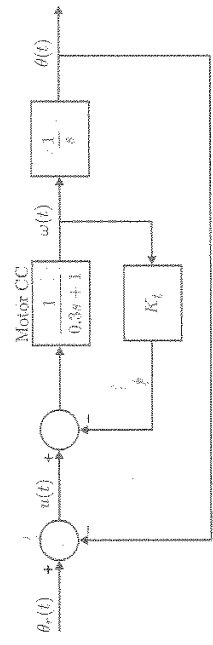


Figura 4.79 Motor CC com realimentação auxiliar da velocidade  $\omega(t)$ .

Desenhe o lugar das raízes e determine o valor do ganho  $K_t$  de modo que o sobressinal seja  $M_p = 10\%$  quando é aplicado um degrau unitário na referência  $\theta_r(t)$ .

Calcule também o tempo de subida  $t_r$ , o tempo de pico  $t_p$  e o tempo de acomodação (critérios de 2% e 5%) da resposta ao degrau.

Exercício 4.19

Projete um compensador por avanço e atraso de fase para o pêndulo invertido do Exercício 4.9. Para pequenas variações em torno do ponto de equilíbrio, deseje-se que:

- a resposta tenha um tempo de subida  $t_r = 0,5$  s e coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,7$ .
- ocorra erro estacionário nulo quando é aplicado um degrau na referência.

Exercício 4.20

Considere um processo de fundição para a produção de barras de alumínio<sup>6</sup> cuja função de transferência é

$$G_p(s) = \frac{e^{-100s}}{1000s + 1} \quad (4.224)$$

Utilizando aproximações de Padé de ordem (1,1) e (2,2), pede-se que

- desenhe o lugar das raízes;
- determine os pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário e a faixa de valores do ganho  $k$  de modo que o sistema em malha fechada seja estável.

Exercício 4.21

Usando aproximação de Padé de ordem 1 para o processo de fundição do Exercício 4.20, projete um compensador por atraso de fase de modo que as seguintes especificações sejam satisfeitas:

- o erro estacionário seja de 0,05 quando é aplicado um degrau unitário na referência;
- as respostas transitórias dos sistemas em malha fechada com e sem compensador não tenham alteração significativa.

<sup>6</sup>Ver Exercício 6.3.

Exercício 4.15

Projete um compensador  $G_c(s)$  por avanço de fase para o sistema da Figura 4.76 de modo que a resposta da saída  $y(t)$ , quando é aplicado um degrau unitário na referência  $r(t)$ , seja a mesma do gráfico da Figura 4.77.

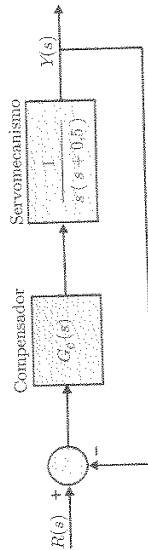


Figura 4.76 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

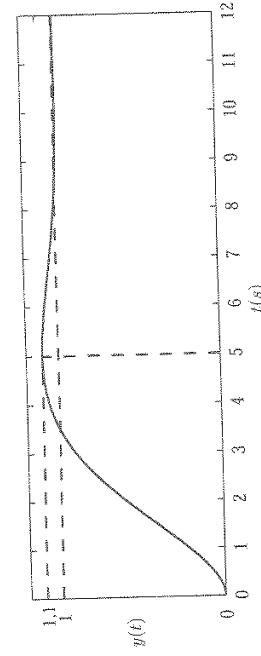


Figura 4.77 Resposta ao degrau unitário.

Exercício 4.16

Projete um compensador  $G_c(s)$  por atraso de fase para o sistema da Figura 4.78 de modo que a resposta para entrada do tipo rampa unitária na referência apresente erro estacionário de 0,1 sem que a resposta transitória tenha mudança significativa.

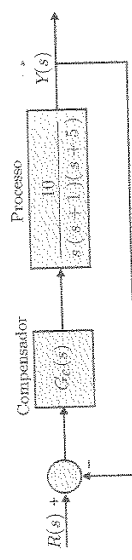


Figura 4.78 Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

Exercício 4.17

Projete um compensador  $G_c(s)$  por avanço e atraso de fase para o sistema da Figura 4.78 de modo que a resposta para entrada do tipo rampa unitária na referência apresente:

- polos dominantes com coeficiente de amortecimento  $\xi = 0,5$  e frequência  $\omega_n = 1$  (rad/s);
- erro estacionário de 0,1.