

Análise e projeto de sistemas pelo método do lugar das raízes

6.1 | Introdução

A característica básica da resposta transitória de um sistema de malha fechada está intimamente relacionada à localização dos polos de malha fechada. Se o ganho de malha do sistema for variável, então a localização dos polos de malha fechada dependerá do valor do ganho de malha escolhido. É importante, então, que o projetista saiba como os polos de malha fechada se movem no plano s , à medida que o ganho de malha varia.

Do ponto de vista do projeto, em alguns sistemas, o simples ajuste do ganho pode mover os polos de malha fechada para as localizações desejadas. Então, o problema do projeto pode se reduzir à escolha de um valor de ganho apropriado. Se apenas o ajuste do ganho não produzir o resultado desejado, será necessário adicionar um compensador ao sistema. (Este assunto será discutido em detalhes nas seções 6.6 a 6.9.)

Os polos de malha fechada são as raízes da equação característica. A determinação das raízes de uma equação característica de grau superior a 3 é trabalhosa e requer a busca de uma solução por meio de um computador. (O MATLAB fornece uma solução simples para esse problema.) Entretanto, apenas a determinação das raízes da equação característica pode ser uma solução limitada porque, à medida que o ganho da função de transferência de malha aberta varia, a equação característica se altera e os cálculos devem ser refeitos.

Um método simples para a determinação das raízes da equação característica foi desenvolvido por W. R. Evans e tem sido amplamente utilizado na engenharia de controle. Esse método, chamado *método do lugar das raízes*, permite que as raízes da equação característica sejam representadas graficamente para todos os valores de um parâmetro do sistema. As raízes correspondentes a um valor específico desse parâmetro podem, então, ser localizadas no gráfico resultante. Observe que o parâmetro é normalmente o ganho, mas é possível utilizar qualquer outra variável da função de transferência de malha aberta. A menos que se estabeleça o contrário, vamos supor que o ganho da função de transferência de malha aberta seja o parâmetro a ser variado por toda a gama de valores, de zero a infinito.

Utilizando o método do lugar das raízes, o projetista pode prever quais os efeitos da variação do valor do ganho ou da adição de polos de malha aberta e/ou zeros de malha aberta sobre a localização dos polos de malha fechada. Portanto, é desejável que o projetista tenha uma boa compreensão do método de geração do lugar das raízes do sistema de malha fechada, tanto manualmente como por meio de aplicativos como o MATLAB.

No projeto de um sistema de controle linear, vemos que o método do lugar das raízes prova sua eficiência, pois indica o modo pelo qual os polos e os zeros de malha aberta devem ser modificados para que a resposta satisfaça às especificações de desempenho do sistema. Esse método é, em particular, eficiente para a obtenção rápida de resultados aproximados.

Pelo fato de a geração do lugar das raízes pelo MATLAB ser bastante simples, pode-se pensar que esboçar o lugar das raízes manualmente seja desperdício de tempo e esforço. Entretanto, a experiência em esboçar manualmente o lugar das raízes é da maior importância para a interpretação do próprio lugar das raízes gerado por computador, além de servir para que se tenha, de maneira rápida, uma ideia aproximada do lugar das raízes.

Visão geral do capítulo. A estrutura deste capítulo é como se segue: a Seção 6.1 apresentou uma introdução ao método do lugar das raízes. A Seção 6.2 detalha os conceitos básicos do método do lugar das raízes e apresenta o procedimento geral para o esboço desse método com exemplos ilustrativos. A Seção 6.3 discute a geração do gráfico do lugar das raízes pelo MATLAB. A Seção 6.4 trata de um caso especial, quando o sistema de malha fechada apresenta realimentação positiva. A Seção 6.5 apresenta os aspectos gerais do método do lugar das raízes no projeto de sistemas de malha fechada. A Seção 6.6 mostra o projeto de sistemas de controle com compensação por avanço. A Seção 6.7 trata da técnica de compensação por atraso. A Seção 6.8 aborda a técnica de compensação por atraso e avanço. Por fim, a Seção 6.9 discute a técnica de compensação paralela.

6.2 | Gráfico do lugar das raízes

Condições de ângulo e de módulo. Considere o sistema mostrado na Figura 6.1. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6.1)$$

A equação característica desse sistema de malha fechada é obtida igualando a zero o denominador do lado direito da Equação 6.1. Ou seja,

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

ou

$$G(s)H(s) = -1 \quad (6.2)$$

Aqui, vamos supor que $G(s)H(s)$ seja uma relação dos polinômios em s . [Note que podemos estender a análise ao caso em que $G(s)H(s)$ apresenta retardo de transporte e^{-Ts} .] Como $G(s)H(s)$ é uma grandeza complexa, a Equação 6.2 pode ser dividida em duas equações equiparando-se os ângulos e módulos de ambos os lados, respectivamente, obtendo-se:

Condição angular:

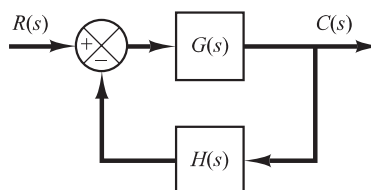
$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.3)$$

Condição de módulo:

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (6.4)$$

Os valores de s que satisfazem tanto a condição angular como a de módulo são as raízes da equação característica, ou os polos de malha fechada. Um lugar dos pontos no plano complexo que

FIGURA 6.1
Sistema de controle.



satisfaz somente a condição angular é o lugar das raízes. As raízes da equação característica (os polos de malha fechada) que correspondem a dado valor do ganho podem ser determinadas pela condição de módulo. Os detalhes sobre a aplicação das condições de ângulo e de módulo para a obtenção dos polos de malha fechada serão apresentados posteriormente nesta seção.

Em muitos casos, $G(s)H(s)$ envolve um parâmetro de ganho K e a equação característica pode ser escrita como:

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = 0$$

Então, o lugar das raízes do sistema é o lugar dos polos de malha fechada quando o ganho K varia de zero a infinito.

Note que, para começar o esboço do lugar das raízes de um sistema pelo método do lugar das raízes, devemos conhecer a localização dos polos e zeros de $G(s)H(s)$. Lembre-se de que os ângulos dos vetores no plano complexo (grandezas complexas) que se originam nos polos e zeros de malha aberta e vão até o ponto de teste s são medidos no sentido anti-horário. Por exemplo, se $G(s)H(s)$ for dado por:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

onde $-p_2$ e $-p_3$ são polos complexos conjugados, então o ângulo de $G(s)H(s)$ será:

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

onde ϕ_1 , θ_1 , θ_2 , θ_3 e θ_4 são medidos no sentido anti-horário, como mostram as figuras 6.2(a) e (b). O módulo de $G(s)H(s)$ para esse sistema é:

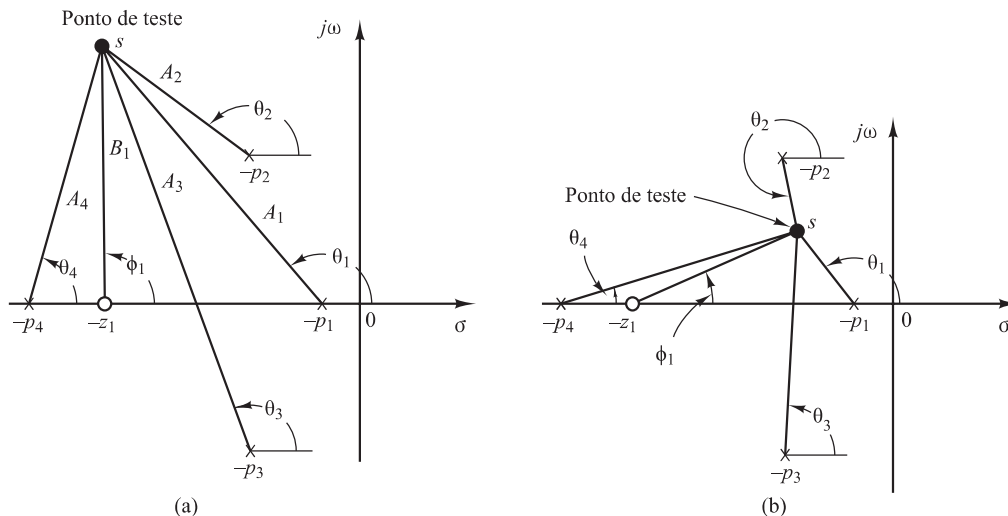
$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1 A_2 A_3 A_4}$$

onde A_1 , A_2 , A_3 , A_4 e B_1 são os módulos das grandezas complexas $s + p_1$, $s + p_2$, $s + p_3$, $s + p_4$ e $s + z_1$, respectivamente, como mostra a Figura 6.2(a).

Note que, pelo fato de os polos e zeros complexos conjugados de malha aberta, caso existam, situarem-se sempre simetricamente em relação ao eixo real, o lugar das raízes também será sempre simétrico em relação a esse eixo. Portanto, será necessário construir apenas a metade superior do lugar das raízes e desenhar a imagem espelhada da metade superior na metade inferior do plano s .

FIGURA 6.2

(a) e (b)
Diagramas que mostram medidas dos ângulos a partir do ponto de testes s e dos polos e zeros de malha aberta.



Exemplos ilustrativos. Serão apresentados a seguir dois exemplos ilustrativos de construção do gráfico do lugar das raízes. Embora existam métodos computacionais facilmente acessíveis para construir o lugar das raízes, utilizaremos aqui computação gráfica, combinada com inspeção, para determinar o lugar geométrico sobre o qual as raízes da equação característica do sistema de malha fechada devem ser localizadas. Esse método gráfico aumentará a compreensão de como os polos de malha fechada se movem no plano complexo quando os polos e zeros de malha aberta se deslocam. Ainda que apenas sistemas simples tenham sido apresentados para fins de ilustração, o procedimento para a construção do lugar das raízes de sistema de ordem mais elevada não é mais complicado.

Pelo fato de as medidas gráficas dos ângulos e dos módulos estarem envolvidas na análise, será muito conveniente utilizar a mesma escala tanto para o eixo das abscissas como para o das ordenadas, quando se desenha o lugar das raízes em gráficos no papel.

Exemplo 6.1 Considere o sistema com realimentação negativa mostrado na Figura 6.3. (Vamos supor que o valor do ganho K seja não negativo.) Para esse sistema:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \quad H(s) = 1$$

Vamos esboçar o gráfico do lugar das raízes e, em seguida, determinar o valor de K , de modo que o coeficiente de amortecimento ζ do par de polos complexos conjugados dominantes, de malha fechada, seja 0,5.

Para o sistema dado, a condição angular é:

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \\ &= -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 \\ &= \pm 180^\circ (2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

A condição de módulo é:

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1$$

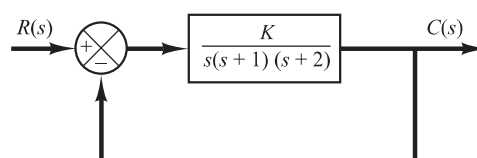
Um procedimento típico para esboçar o gráfico do lugar das raízes é o seguinte:

1. *Determinar o lugar das raízes no eixo real.* O primeiro passo na construção de um gráfico do lugar das raízes é localizar, no plano complexo, os polos de malha aberta $s = 0$, $s = -1$ e $s = -2$. (Não existem zeros de malha aberta nesse sistema.) As posições dos polos de malha aberta são indicadas por cruzes. (As posições dos zeros de malha aberta neste livro serão indicadas por pequenos círculos.) Observe que os pontos de partida do lugar das raízes (os pontos correspondentes a $K = 0$) são os polos de malha aberta. O número de lugares das raízes individuais para esse sistema é 3, que é igual ao número de polos de malha aberta.

Para determinar o lugar das raízes no eixo real, seleciona-se um ponto de teste s . Se esse ponto de teste estiver no eixo real positivo, então

$$\angle s = \angle s+1 = \angle s+2 = 0^\circ$$

FIGURA 6.3
Sistema de controle.



Isso demonstra que a condição angular não pode ser satisfeita. Então, não existe lugar das raízes no eixo real positivo. A seguir, seleciona-se um ponto de teste no eixo real negativo entre 0 e -1 . Então,

$$\angle s = 180^\circ, \quad \angle s + 1 = \angle s + 2 = 0^\circ$$

Assim,

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = -180^\circ$$

e a condição angular é satisfeita. Dessa maneira, o segmento do eixo real negativo entre 0 e -1 pertence ao lugar das raízes. Se um ponto de teste for selecionado entre -1 e -2 , então

$$\angle s = \angle s + 1 = 180^\circ, \quad \angle s + 2 = 0^\circ$$

e

$$-\angle s - \angle s + 1 - \angle s + 2 = -360^\circ$$

Pode-se observar, então, que a condição angular não será satisfeita. Portanto, o eixo real negativo entre -1 e -2 não pertence ao lugar das raízes. Da mesma maneira, se um ponto de teste for localizado no eixo real negativo entre -2 e $-\infty$, a condição angular será satisfeita. Portanto, o lugar das raízes existirá sobre o eixo real negativo entre 0 e -1 e entre -2 e $-\infty$.

2. Determinar as assíntotas do lugar das raízes. As assíntotas do lugar das raízes, à medida que s se aproxima do infinito, podem ser definidas da seguinte maneira: se um ponto de teste for selecionado muito distante da origem, então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3}$$

e a condição angular torna-se:

$$-3\angle s = \pm 180^\circ(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ou

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Como o ângulo se repete à medida que k varia, os ângulos distintos para as assíntotas são determinados como 60° , -60° e 180° . Assim, existem três assíntotas. A que corresponde ao ângulo de 180° é o eixo real negativo.

Antes de podermos desenhar essas assíntotas no plano complexo, devemos determinar o ponto onde elas cruzam o eixo real. Como

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

se um ponto de teste estiver muito distante da origem, então $G(s)$ poderá ser escrito como:

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + \dots}$$

Para valores elevados de s , essa última equação pode ser aproximada como:

$$G(s) \doteq \frac{K}{(s+1)^3} \quad (6.5)$$

Um gráfico do lugar das raízes de $G(s)$ dado pela Equação 6.5 consiste em três retas. Isso pode ser visto a seguir, onde a equação do lugar das raízes é:

$$\angle \frac{K}{(s+1)^3} = \pm 180^\circ(2k+1)$$

ou

$$-3\angle s + 1 = \pm 180^\circ(2k+1)$$

que pode ser escrita como:

$$\angle s + 1 = \pm 60^\circ(2k + 1)$$

Substituindo $s = \sigma + j\omega$ nessa última equação, obtemos

$$\angle \sigma + j\omega + 1 = \pm 60^\circ(2k + 1)$$

ou

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\sigma + 1} = 60^\circ, \quad -60^\circ, \quad 0^\circ$$

Considerando a tangente de ambos os lados dessa última equação,

$$\frac{\omega}{\sigma + 1} = \sqrt{3}, \quad -\sqrt{3}, \quad 0$$

que podem ser escritas como:

$$\sigma + 1 - \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0, \quad \sigma + 1 + \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0, \quad \omega = 0$$

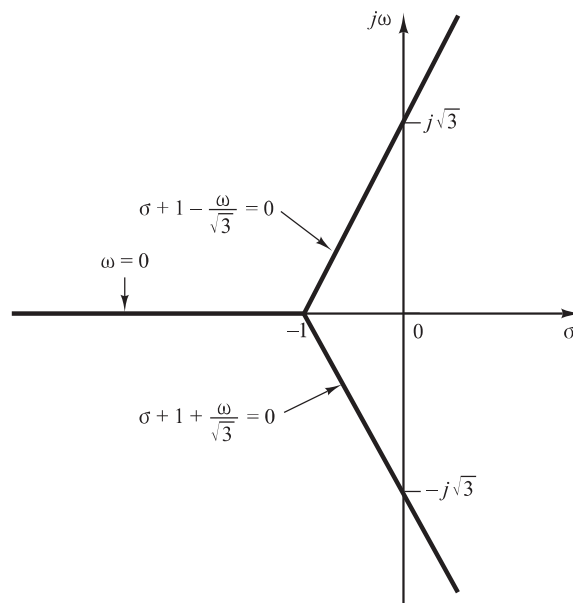
Essas três equações representam três linhas retas, como mostra a Figura 6.4. Essas três linhas retas são as assíntotas. Elas se encontram no ponto $s = -1$. Assim, a abscissa de intersecção entre as assíntotas e o eixo real é obtida igualando a zero o denominador do lado direito da Equação 6.5 e resolvendo para s . As assíntotas são praticamente partes do lugar das raízes nas regiões muito distantes da origem.

3. Determinar o ponto de partida do eixo real. Para desenhar com precisão o lugar das raízes, deve-se definir o ponto de partida do eixo real, onde as ramificações do lugar das raízes originárias dos polos em 0 e -1 saem do eixo real (à medida que K aumenta) e se movem no plano complexo. O ponto de partida do eixo real corresponde a um ponto no plano s onde ocorrem raízes múltiplas da equação característica.

Existe um método simples para a determinação do ponto de partida do eixo real, que apresentaremos a seguir. Escreveremos a equação característica como:

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0 \quad (6.6)$$

FIGURA 6.4
Três assíntotas.



onde $A(s)$ e $B(s)$ não contêm K . Note que $f(s) = 0$ tem raízes múltiplas nos pontos onde

$$\frac{df(s)}{ds} = 0$$

Isso pode ser visto como segue. Suponha que $f(s)$ tenha raízes múltiplas de ordem r , onde $r \geq 2$. Então, $f(s)$ pode ser escrita como:

$$f(s) = (s - s_1)^r (s - s_2) \dots (s - s_n)$$

Derivando essa equação em relação a s e estimando-se o valor de $df(s)/ds$ em $s = s_1$, teremos:

$$\left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=s_1} = 0 \quad (6.7)$$

Isso indica que raízes múltiplas de $f(s)$ satisfazem à Equação 6.7. A partir da Equação 6.6, obtemos:

$$\frac{df(s)}{ds} B'(s) + KA'(s) = 0 \quad (6.8)$$

onde

$$A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}, \quad B'(s) = \frac{dB(s)}{ds}$$

O valor específico de K que produzirá raízes múltiplas da equação característica é obtido a partir da Equação 6.8 como:

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}$$

Se substituirmos esse valor de K na Equação 6.6, teremos:

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)} A(s) = 0$$

ou

$$B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0 \quad (6.9)$$

Se a Equação 6.9 for resolvida em relação a s , podem ser obtidos os pontos onde ocorram as raízes múltiplas. Por outro lado, a partir da Equação 6.6, obtemos:

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

e

$$\frac{dK}{ds} = \frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)}$$

Se dK/ds for igualado a zero, obteremos novamente a Equação 6.9. Assim, os pontos de partida do eixo real podem ser determinados a partir das raízes de

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Pode-se notar que nem todas as soluções da Equação 6.9 ou de $dK/ds = 0$ correspondem ao ponto de partida real do eixo real. Se um ponto no qual $dK/ds = 0$ estiver sobre o lugar das raízes, este será mesmo um ponto de partida ou de chegada ao eixo real. Em outras palavras, se o valor de K for real e positivo em um ponto em que $dK/ds = 0$, então este será de fato um ponto de partida ou de chegada do eixo real.

No presente exemplo, a equação característica $G(s) + 1 = 0$ é dada por:

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} + 1 = 0$$

ou

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

Definindo $dK/ds = 0$, obtemos:

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

ou

$$s = -0,4226, \quad s = -1,5774$$

Como o ponto de partida do eixo real deve estar sobre o lugar das raízes entre 0 e -1 , está claro que $s = -0,4226$ corresponde efetivamente ao ponto de partida do eixo real. O ponto $s = -1,5774$ não está sobre o lugar das raízes. Então, esse ponto não é realmente um ponto nem de partida nem de chegada. De fato, o cálculo dos valores de K correspondentes a $s = -0,4226$ e $s = -1,5774$ resulta em:

$$K = 0,3849, \quad \text{para } s = -0,4226$$

$$K = -0,3849, \quad \text{para } s = -1,5774$$

4. Determinar os pontos em que o lugar das raízes cruza o eixo imaginário. Esses pontos podem ser determinados com a utilização do critério de estabilidade de Routh, do seguinte modo: como a equação característica para o presente sistema é

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

a matriz de Routh torna-se:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

O valor de K que faz que o termo s^1 na primeira coluna seja igual a zero é $K = 6$. Os pontos de cruzamento com o eixo imaginário podem, então, ser determinados com a resolução da equação auxiliar obtida a partir da linha s^2 , isto é,

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0$$

do que resulta:

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

As frequências no ponto de cruzamento do eixo imaginário são, portanto, $\omega = \pm \sqrt{2}$. O valor do ganho correspondente aos pontos de cruzamento é $K = 6$.

Um método alternativo é fazer $s = j\omega$ na equação característica, igualar a zero tanto a parte real como a parte imaginária e então resolver para ω e K . Para o presente sistema, a equação característica, com $s = j\omega$, é:

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$$

ou

$$(K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

Igualando tanto a parte real como a imaginária dessa última equação a zero, obtemos:

$$K - 3\omega^2 = 0, \quad 2\omega - \omega^3 = 0$$

A partir da qual

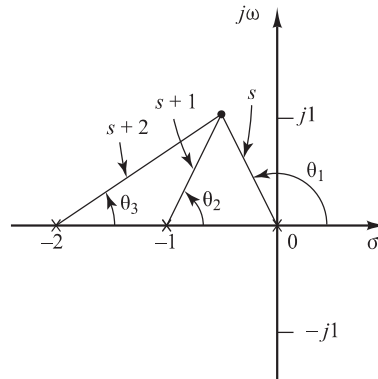
$$\omega = \pm \sqrt{2}, \quad K = 6 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

Assim, o lugar das raízes cruza o eixo imaginário em $\omega = \pm \sqrt{2}$ e o valor de K no ponto de cruzamento é 6. Além disso, um ramo do lugar das raízes no eixo real toca o eixo imaginário em $\omega = 0$. O valor de K , nesse ponto, é zero.

5. Escolher um ponto de teste nos entornos do eixo $j\omega$ e da origem, como mostra a Figura 6.5, e aplicar a condição angular. Se um ponto de teste estiver sobre o lugar das raízes, então a soma

FIGURA 6.5

Construção do lugar das raízes.



dos três ângulos, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, deve ser 180° . Se o ponto de teste não satisfizer à condição angular, selecione outro ponto de teste até que a condição seja atendida. (A soma dos ângulos no ponto de teste indicará a direção em que o ponto de teste deve ser movido.) Continue com esse processo e localize um número suficiente de pontos que satisfaçam à condição do ângulo.

6. Desenhar o lugar das raízes, com base nas informações obtidas nos passos anteriores, como mostra a Figura 6.6.

7. Determinar um par de polos complexos conjugados dominantes de malha fechada, de modo que o coeficiente de amortecimento ζ seja 0,5. Os polos de malha fechada com $\zeta = 0,5$ situados em linhas que passam pela origem e formam os ângulos $\pm \cos^{-1} \zeta = \pm \cos^{-1} 0,5 = \pm 60^\circ$ com o eixo real negativo. Com o auxílio da Figura 6.6, esses polos de malha fechada com $\zeta = 0,5$ são obtidos da seguinte maneira:

$$s_1 = -0,3337 + j0,5780, \quad s_2 = -0,3337 - j0,5780$$

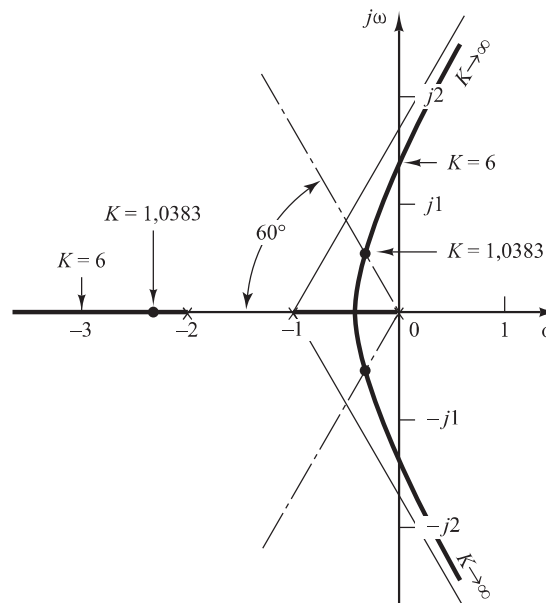
O valor de K que fornece esses polos é determinado pela condição de módulo, como segue:

$$K = |s(s+1)(s+2)|_{s=-0,3337+j0,5780} = 1,0383$$

Utilizando esse valor de K , o terceiro polo é obtido em $s = -2,3326$.

FIGURA 6.6

Gráfico do lugar das raízes.



Observe que, a partir do passo 4, pode-se ver que, para $K = 6$, os polos de malha fechada dominantes se situam no eixo imaginário em $s = \pm j\sqrt{2}$. Com esse valor de K , o sistema apresentará oscilações permanentes. Para $K > 6$, os polos de malha fechada dominantes se situam no semiplano direito do plano s , resultando em um sistema instável.

Por fim, note que, se necessário, o lugar das raízes pode ser facilmente graduado em termos dos valores de K , utilizando, para isso, a condição de módulo. Simplesmente seleciona-se um ponto sobre o lugar das raízes, mede-se o módulo das três grandezas complexas s , $s + 1$ e $s + 2$ e multiplicam-se esses valores; o produto é igual ao valor do ganho K naquele ponto ou

$$|s| \cdot |s + 1| \cdot |s + 2| = K$$

A graduação do lugar das raízes pode ser feita facilmente, com a utilização do MATLAB. (Veja a Seção 6.3.)

Exemplo 6.2 Neste exemplo, será esboçado o gráfico do lugar das raízes de um sistema com polos de malha aberta complexos conjugados. Considere o sistema mostrado na Figura 6.7. Para esse sistema,

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 3}, \quad H(s) = 1$$

onde $K \geq 0$. Vê-se que $G(s)$ tem um par de polos complexos conjugados em:

$$s = -1 + j\sqrt{2}, \quad s = -1 - j\sqrt{2}$$

Um procedimento típico para esboçar o gráfico do lugar das raízes é o seguinte:

1. *Determinar o lugar das raízes no eixo real.* Para qualquer ponto de teste s no eixo real, a soma das contribuições angulares dos polos complexos conjugados é 360° , como mostra a Figura 6.8. Assim, o efeito resultante dos polos complexos conjugados sobre a condição angular no eixo real é nulo. A localização do lugar das raízes sobre o eixo real é determinada pelo zero de malha aberta existente nesse mesmo eixo. Um teste simples revela que o intervalo entre -2 e $-\infty$, no eixo real negativo, constitui uma parte do lugar das raízes. Verifica-se que, como esse lugar está situado entre dois zeros (em $s = -2$ e $s = -\infty$), é de fato uma parte formada por dois ramos do lugar das raízes, cada um partindo de um dos dois polos complexos conjugados. Em outras palavras, dois ramos do lugar das raízes se separam em um ponto da região sobre o eixo real negativo, entre -2 e $-\infty$.

FIGURA 6.7

Sistema de controle.

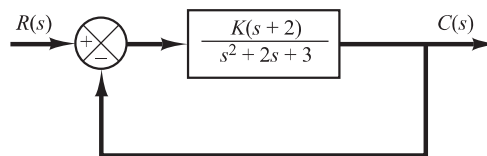
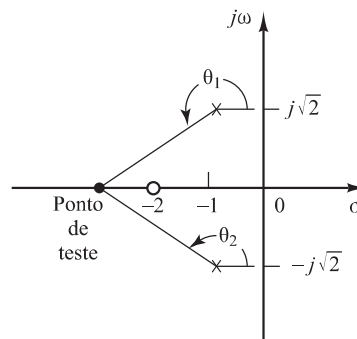


FIGURA 6.8

Determinação do lugar das raízes no eixo real.



Como existem dois polos de malha aberta e um zero, existe apenas uma assíntota, que coincide com o eixo real negativo.

2. *Determinar o ângulo de partida dos polos complexos conjugados de malha aberta.* A presença de um par de polos complexos conjugados de malha aberta requer a determinação do ângulo de partida desses polos. O conhecimento desse ângulo é importante, já que o lugar das raízes próximo a um polo complexo fornece informações de como o polo originário do polo complexo migra para o eixo real ou se estende sobre a assíntota.

Referindo-se à Figura 6.9, se for escolhido um ponto de teste móvel em uma região muito próxima do polo complexo conjugado de malha aberta em $s = -p_1$, verifica-se que a soma das contribuições angulares do polo em $s = p_2$ e do zero em $s = -z_1$ pode ser considerada invariável. Se o ponto de teste estiver sobre o lugar das raízes, então a soma de ϕ'_1 , $-\theta_1$ e $-\theta'_2$ deverá ser $\pm 180^\circ(2k + 1)$, onde $k = 0, 1, 2, \dots$. Assim, no exemplo,

$$\phi'_1 - (\theta_1 + \theta'_2) = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

ou

$$\theta_1 = 180^\circ - \theta'_2 + \phi'_1 = 180^\circ - \theta'_2 + \phi_1$$

O ângulo de partida é, então,

$$\theta_1 = 180^\circ - \theta_2 + \phi_1 = 180^\circ - 90^\circ + 55^\circ = 145^\circ$$

Como o lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real, o ângulo de partida do polo em $s = -p_2$ é -145° .

3. *Determinar o ponto de chegada ao eixo real.* Um ponto de chegada ao eixo real existe onde um par de ramos do lugar das raízes se funde quando K aumenta. Para esse problema, o ponto de chegada ao eixo real pode ser determinado da seguinte maneira: dado que

$$K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}$$

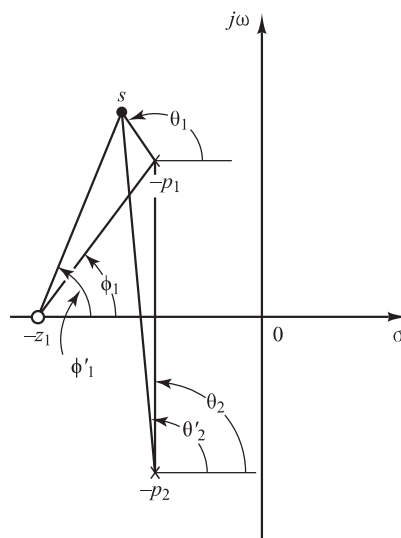
temos:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{(2s + 2)(s + 2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s + 2)^2} = 0$$

o que resulta em:

$$s^2 + 4s + 1 = 0$$

FIGURA 6.9
Determinação do ângulo de partida.



ou

$$s = -3,7320 \quad \text{ou} \quad s = -0,2680$$

Note que o ponto $s = -3,7320$ está sobre o lugar das raízes. Então, este é efetivamente um ponto de chegada ao eixo real. (Note que no ponto $s = -3,7320$, o valor do ganho correspondente é $K = 5,4641$.) Como o ponto $s = -0,2680$ não está sobre o lugar das raízes, não pode ser um ponto de chegada ao eixo real. (Para o ponto $s = -0,2680$, o valor correspondente do ganho é $K = -1,4641$.)

4. *Esboçar o gráfico do lugar das raízes tomando por base as informações obtidas nos passos anteriores.* Para determinar com precisão o lugar das raízes, devem ser determinados vários pontos entre o ponto de chegada ao eixo real e os polos complexos de malha aberta, pelo método de tentativa e erro. (Para facilitar o esboço do gráfico do lugar das raízes, deve-se encontrar a direção na qual o ponto de teste deve ser movido, guardando mentalmente a soma das variações dos ângulos nos polos e nos zeros.) A Figura 6.10 mostra um gráfico completo do lugar das raízes para o sistema considerado.

O valor do ganho K em qualquer ponto do lugar das raízes pode ser determinado aplicando-se a condição de módulo ou por meio do MATLAB (veja a Seção 6.3). Por exemplo, o valor de K em que os polos complexos conjugados de malha fechada têm o coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,7$ pode ser encontrado pela localização das raízes, como mostra a Figura 6.10, e calculando o valor de K da seguinte maneira:

$$K = \left| \frac{(s + 1 - j\sqrt{2})(s + 1 + j\sqrt{2})}{s + 2} \right|_{s = -1,67 + j1,70} = 1,34$$

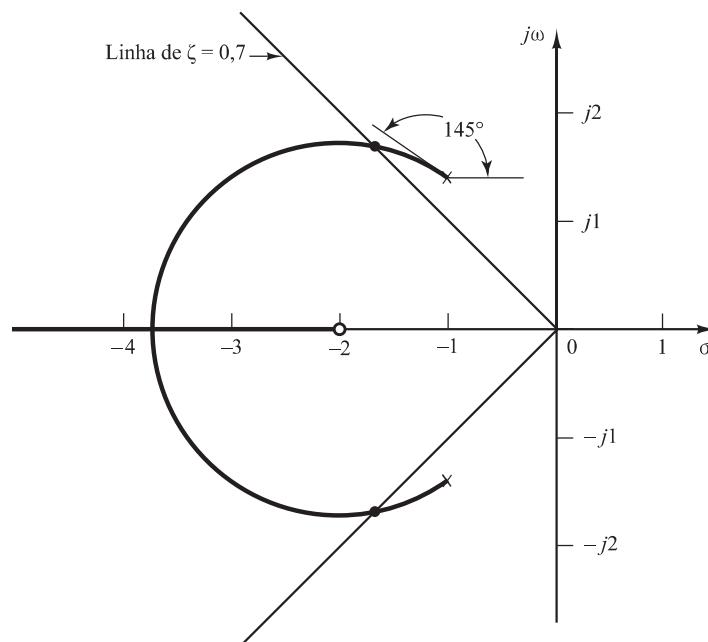
Ou utilizar o MATLAB para determinar o valor de K (veja a Seção 6.4.)

Observe que, nesse sistema, o lugar das raízes no plano complexo é parte de um círculo. Esse lugar das raízes circulares não ocorre na maioria dos sistemas. Lugares das raízes circulares podem ocorrer em sistemas que têm dois polos e um zero, dois polos e dois zeros ou um polo e dois zeros. Mesmo nesses sistemas, a ocorrência de partes de lugares das raízes circulares depende da localização dos polos e dos zeros existentes.

Para mostrar a existência de partes circulares do lugar das raízes no presente sistema, é necessário deduzir a equação do lugar das raízes. Para esse sistema, a condição de ângulo é:

$$\angle s + 2 - \angle s + 1 - j\sqrt{2} - \angle s + 1 + j\sqrt{2} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

FIGURA 6.10
Gráfico do lugar das raízes.



Se $s = \sigma + j\omega$ for substituído nessa última equação, obtemos:

$$\angle \sigma + 2 + j\omega - \angle \sigma + 1 + j\omega - j\sqrt{2} - \angle \sigma + 1 + j\omega + j\sqrt{2} = \pm 180^\circ (2k + 1)$$

que pode ser escrita como:

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) = \pm 180^\circ (2k + 1)$$

ou

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) \pm 180^\circ (2k + 1)$$

Considerando as tangentes de ambos os lados dessa última equação e utilizando a relação

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \quad (6.10)$$

obtemos:

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right)\right] = \operatorname{tg}\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 2}\right) \pm 180^\circ (2k + 1)\right]$$

ou

$$\frac{\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1} + \frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}}{1 - \left(\frac{\omega - \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right)\left(\frac{\omega + \sqrt{2}}{\sigma + 1}\right)} = \frac{\frac{\omega}{\sigma + 2} \pm 0}{1 \mp \frac{\omega}{\sigma + 2} \times 0}$$

que pode ser simplificada para

$$\frac{2\omega(\sigma + 1)}{(\sigma + 1)^2 - (\omega^2 - 2)} = \frac{\omega}{\sigma + 2}$$

ou

$$\omega[(\sigma + 2)^2 + \omega^2 - 3] = 0$$

Essa última equação é equivalente a

$$\omega = 0 \quad \text{ou} \quad (\sigma + 2)^2 + \omega^2 = (\sqrt{3})^2$$

Essas duas equações são equações do lugar das raízes do presente sistema. Observe que a primeira, $\omega = 0$, é a equação para o eixo real. O eixo real entre $s = -2$ e $s = -\infty$ corresponde ao lugar das raízes para $K \geq 0$. A parte remanescente do eixo real corresponde ao lugar das raízes quando K é negativo. (Nesse sistema, K é não negativo.) (Note que $K < 0$ corresponde ao caso em que a realimentação é positiva.) A segunda equação para o lugar das raízes é a equação de um círculo com centro em $\sigma = -2$, $\omega = 0$ e raio igual a $\sqrt{3}$. A parte do círculo à esquerda dos polos complexos conjugados corresponde ao lugar das raízes para $K \geq 0$. A parte remanescente do círculo corresponde ao lugar das raízes quando K é negativo.

É importante notar que equações de fácil interpretação para o lugar das raízes podem ser deduzidas apenas para sistemas simples. Para sistemas complexos que contenham muitos polos e zeros, qualquer tentativa de dedução de equações para o lugar das raízes é desencorajada. Essas equações deduzidas são muito complicadas e sua configuração no plano complexo é difícil de ser visualizada.

Regras para a construção do lugar das raízes. Para um sistema complexo, com muitos polos e zeros de malha aberta, a construção do gráfico do lugar das raízes pode parecer complicada, mas, na verdade, não é difícil se forem aplicadas as regras de construção para esse fim. Pela localização de pontos específicos e assíntotas e pelo cálculo dos ângulos de partida de polos complexos e ângulos de chegada em zeros complexos, pode-se construir a forma geral do lugar das raízes sem dificuldade.

Vamos resumir agora as regras e os procedimentos gerais para a construção do lugar das raízes do sistema mostrado na Figura 6.11.

Inicialmente, obtenha a equação característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Em seguida, modifique essa equação de modo que o parâmetro de interesse apareça como fator de multiplicação na forma:

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = 0 \quad (6.11)$$

Na presente discussão, supomos que o parâmetro de interesse seja o ganho K , sendo $K > 0$. (No caso de $K < 0$, o que corresponde à realimentação positiva, a condição de ângulo deve ser modificada. Veja a Seção 6.4.) Verifica-se, entretanto, que o método ainda é aplicável a sistemas com outros parâmetros de interesse além do ganho. (Veja a Seção 6.6.)

1. *Localizar os polos e zeros de $G(s)H(s)$ no plano s . Os ramos do lugar das raízes se iniciam nos polos de malha aberta e terminam nos zeros (zeros finitos ou zeros no infinito). A partir da forma fatorada da função de transferência de malha aberta, determinar a localização dos polos e dos zeros de malha aberta no plano s . [Note que os zeros de malha aberta são os zeros de $G(s)H(s)$, enquanto os zeros de malha fechada constituem os zeros de $G(s)$ e os polos de $H(s)$.]*

Observe que os lugares das raízes são simétricos ao eixo real do plano s , pois os polos complexos e os zeros complexos ocorrem apenas em pares conjugados.

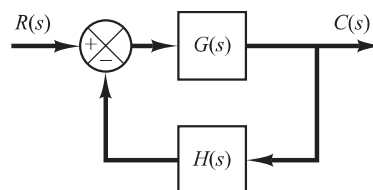
Um gráfico do lugar das raízes possui tantos ramos quantas forem as raízes da equação característica. Como o número de polos de malha aberta geralmente excede o número de zeros, o número de ramos é igual ao de polos. Se o número de polos de malha fechada for o mesmo que o de polos de malha aberta, então o número de ramos individuais do lugar das raízes que terminam em zeros finitos de malha aberta será igual ao número m dos zeros de malha aberta. Os ramos restantes $n - m$ que terminam no infinito ($n - m$ zeros implícitos no infinito) ao longo das assíntotas.

Se forem incluídos polos e zeros no infinito, o número de polos de malha aberta será igual ao de zeros de malha aberta. Portanto, pode-se afirmar que os lugares das raízes que se iniciam nos polos de $G(s)H(s)$ e terminam nos zeros de $G(s)H(s)$, à medida que K varia de zero a infinito, inclui os polos e zeros que se situam tanto no plano finito de s como no infinito.

2. *Determinar os trechos do lugar das raízes no eixo real.* Os trechos do lugar das raízes no eixo real são determinados pelos polos e zeros de malha aberta que se encontram sobre ele. Os polos e zeros complexos conjugados de malha aberta da função de transferência não têm nenhum efeito na determinação dos trechos do lugar das raízes no eixo real, porque a contribuição angular de um par de polos ou zeros complexos conjugados sobre o eixo real é de 360° . Cada região do lugar das raízes no eixo real se estende sobre uma área de um polo ou zero a outro polo ou zero. Para a construção dos trechos do lugar das raízes no eixo real, escolha um ponto de teste sobre ele. Se o número total de polos reais e zeros reais à direita desse ponto de teste for ímpar, então esse ponto estará situado em uma região do lugar das raízes. Se polos de malha aberta e zeros de malha aberta forem polos simples e zeros simples, então o lugar das raízes e seus complementos formarão segmentos alternados ao longo do eixo real.

FIGURA 6.11

Sistema de controle.



3. *Determinar as assíntotas dos lugares das raízes.* Se o ponto de teste s estiver localizado distante da origem, então o ângulo de cada vetor do plano complexo poderá ser considerado o mesmo. Um zero de malha aberta e um polo de malha aberta podem cancelar seus efeitos mutuamente. Portanto, os lugares das raízes, se os valores de s forem muito elevados, deverão ser assintóticos para as retas cujos ângulos (inclinações) são dados por:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{n - m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

onde n = número finito de polos de $G(s)H(s)$

m = número de zeros finitos de $G(s)H(s)$

Aqui, $k = 0$ corresponde às assíntotas de menor ângulo em relação ao eixo real. Embora k assumira um número infinito de valores, à medida que k aumenta, o ângulo se repete e o número de assíntotas distintas é $n - m$.

Todas as assíntotas se cruzam em um ponto no eixo real. Os pontos de intersecção são obtidos como a seguir: se tanto o numerador como o denominador da função de transferência de malha aberta forem expandidos, o resultado será:

$$G(s)H(s) = \frac{K[s^m + (z_1 + z_2 + \dots + z_m)s^{m-1} + \dots + z_1 z_2 \dots z_m]}{s^n + (p_1 + p_2 + \dots + p_n)s^{n-1} + \dots + p_1 p_2 \dots p_n}$$

Se um ponto de teste for situado muito distante da origem, então, dividindo o denominador pelo numerador, será possível escrever $G(s)H(s)$ como:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)]s^{n-m-1} + \dots}$$

ou

$$G(s)H(s) = \frac{K}{\left[s + \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m} \right]^{n-m}} \quad (6.12)$$

A abscissa do ponto de intersecção das assíntotas com o eixo real é, então, obtida igualando-se a zero o denominador do lado direito da Equação 6.12 e resolvendo para s , ou

$$s = - \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n - m} \quad (6.13)$$

(O Exemplo 6.1 mostra por que a Equação 6.13 resulta na intersecção.) Uma vez determinada a intersecção, pode-se desenhar as assíntotas no plano complexo.

É importante notar que as assíntotas mostram o comportamento dos lugares das raízes para $|s| \gg 1$. Um ramo do lugar das raízes pode se situar de um lado da assíntota correspondente ou pode cruzar a assíntota correspondente de um lado ao outro.

4. *Determinar os pontos de partida e os de chegada ao eixo real.* Em virtude da simetria conjugada do lugar das raízes, os pontos de partida ao eixo real e os de chegada estão localizados sobre o eixo real ou ocorrem em pares complexos conjugados.

Se um lugar das raízes estiver localizado entre dois polos de malha aberta adjacentes no eixo real, então existirá pelo menos um ponto de partida do eixo real entre os dois polos. Da mesma maneira, se o lugar das raízes estiver entre dois zeros adjacentes (um dos zeros pode estar localizado em $-\infty$) no eixo real, então sempre existirá pelo menos um ponto de chegada entre os dois zeros. Se o lugar das raízes se situar entre um polo e um zero de malha aberta (finito ou infinito) sobre o eixo real, poderão existir pontos de partida e de chegada simultaneamente, mas não de modo isolado.

Suponha que a equação característica seja dada por:

$$B(s) + KA(s) = 0$$

Os pontos de partida e os de chegada ao eixo real correspondem às raízes múltiplas da equação característica. Então, como foi discutido no Exemplo 6.1, os pontos de partida e de chegada podem ser determinados a partir das raízes de

$$\frac{dK}{ds} = \frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0 \quad (6.14)$$

onde o apóstrofo indica a diferenciação em relação a s . É importante notar que os pontos de partida e os de chegada devem ser as raízes da Equação 6.14, mas nem todas as raízes da Equação 6.14 são pontos de partida ou pontos de chegada. Se uma raiz real da Equação 6.14 estiver sobre a região do lugar das raízes no eixo real, então este é realmente um ponto de partida ou de chegada. Se uma raiz real da Equação 6.14 não estiver sobre a região do lugar das raízes no eixo real, então essa raiz não corresponderá nem a um ponto de partida nem a um ponto de chegada. Se duas raízes $s = s_1$ e $s = -s_1$ da Equação 6.14 forem um par de complexos conjugados e se não for certo que pertençam ao lugar das raízes, então será necessário verificar o valor correspondente de K . Se o valor de K correspondente a uma raiz $s = s_1$ de $dK/ds = 0$ for positivo, o ponto $s = s_1$ será realmente um ponto de partida ou um ponto de chegada. (Como se supõe que K seja não negativo, se o valor de K assim obtido for negativo, ou um vetor no plano complexo, então o ponto $s = s_1$ não será nem um ponto de partida nem um ponto de chegada.)

5. *Determinar o ângulo de partida de um polo complexo (ou de chegada a um zero complexo) do lugar das raízes.* Para esboçar o lugar das raízes com precisão razoável, deve-se determinar a direção dos ramos do lugar das raízes próximos aos polos e zeros complexos. Se um ponto de teste for escolhido e movido nas proximidades de um polo complexo (ou de um zero complexo), pode-se considerar que a soma das contribuições angulares de todos os outros polos e zeros permanece invariável. Assim, o ângulo de partida (ou o ângulo de chegada) do lugar das raízes de um polo complexo (ou em um zero complexo) pode ser determinado subtraindo de 180° a soma de todos os ângulos dos vetores de todos os outros polos e zeros que chegam ao polo complexo (ou do zero complexo) em questão, incluindo os sinais apropriados.

Ângulo de partida de um polo complexo = 180°

– (soma dos ângulos dos vetores que chegam ao polo complexo em questão, com origem em outros polos)

+ (soma dos ângulos dos vetores que chegam ao polo complexo em questão, com origem nos zeros)

Ângulo de chegada em um zero complexo = 180°

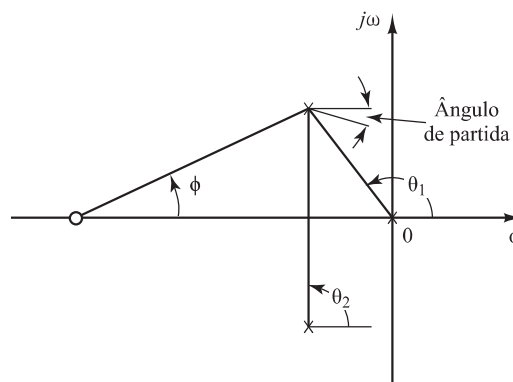
– (soma dos ângulos dos vetores que chegam ao zero complexo em questão, originários de outros zeros)

+ (soma dos ângulos dos vetores de chegada ao zero complexo em questão, partindo dos polos)

O ângulo de partida é mostrado na Figura 6.12.

FIGURA 6.12

Construção do lugar das raízes [Ângulo de partida = $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2) + \phi$].



6. *Encontrar os pontos onde o lugar das raízes pode cruzar o eixo imaginário.* Os pontos onde o lugar das raízes cruza o eixo $j\omega$ podem ser determinados facilmente (a) pelo uso do critério de estabilidade de Routh ou (b) fazendo $s = j\omega$ na equação característica, igualando a zero tanto a parte real como a parte imaginária e resolvendo para ω e K . Os valores de ω assim determinados fornecem as frequências em que o lugar das raízes cruza o eixo imaginário. O valor de K correspondente a cada frequência de cruzamento representa o ganho nesse ponto de cruzamento.
7. *Obter uma série de pontos de teste na região da origem do plano s e esboçar o lugar das raízes.* Determinar o lugar das raízes em ampla região nas proximidades do eixo $j\omega$ e da origem. A parte mais importante do lugar das raízes não se situa nem no eixo real nem junto às assíntotas, mas em uma região próxima ao eixo $j\omega$ e à origem. O formato do lugar das raízes nessa importante região do plano s deve ser obtido com uma precisão razoável. (Se for necessário obter a forma do lugar das raízes com exatidão, pode-se usar o MATLAB em vez de fazer o cálculo manualmente.)
8. *Determinar os polos de malha fechada.* Um ponto em particular sobre cada um dos ramos do lugar das raízes será um polo de malha fechada, se o valor de K nesse ponto satisfizer a condição de módulo. Reciprocamente, a condição de módulo possibilita que se determine o valor do ganho K em qualquer ponto especificado sobre o lugar das raízes. (Se necessário, o lugar das raízes pode ser graduado em função de K . Os valores de K variam continuamente ao longo do lugar das raízes.)

O valor de K correspondente a um ponto s no lugar das raízes pode ser obtido com a utilização da condição de módulo, ou seja

$$K = \frac{\text{produto da distância entre o ponto } s \text{ e os polos}}{\text{produto da distância entre o ponto } s \text{ e os zeros}}$$

Esse valor pode ser calculado tanto gráfica como analiticamente. (O MATLAB pode ser utilizado para graduar o lugar das raízes em função de K . Veja a Seção 6.3.)

Se o ganho K da função de transferência de malha aberta for um dado do problema, então, pela aplicação da condição de módulo, pode-se determinar as posições corretas dos polos de malha fechada em cada um dos ramos do lugar das raízes, para dado valor de K . Para isso, pode-se utilizar o método de tentativa e erro ou o MATLAB, que será apresentado na Seção 6.3.

Comentários sobre os gráficos do lugar das raízes. Observe que a equação característica do sistema de realimentação negativa cuja função de transferência de malha aberta é:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m)}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (n \geq m)$$

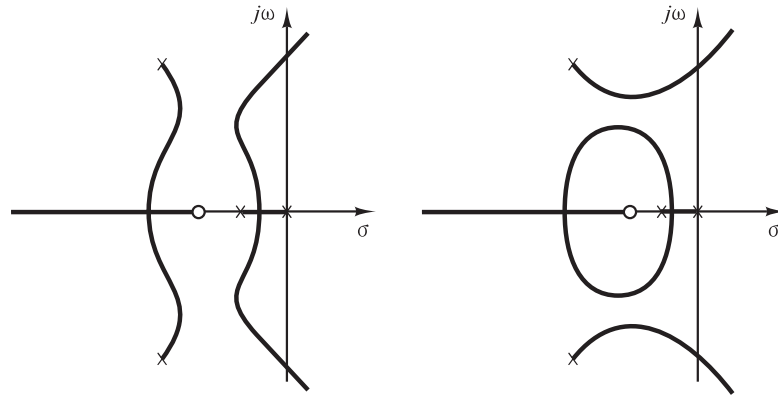
é uma equação algébrica de grau n em s . Se a ordem do numerador de $G(s)H(s)$ for menor que a do denominador em duas ou mais unidades (o que significa que existem dois ou mais zeros no infinito), então o coeficiente a_1 será a soma negativa das raízes das equações e é independente de K . Nesse caso, se algumas das raízes se moverem para a esquerda sobre o lugar das raízes, à medida que K aumenta, então as outras raízes devem se mover para a direita conforme K aumenta. Essa informação é útil na determinação da forma geral do lugar das raízes.

Note também que uma pequena alteração na posição dos polos e zeros pode ocasionar mudanças importantes na configuração do lugar das raízes. A Figura 6.13 demonstra que uma pequena variação no posicionamento de um zero ou de um polo resultará em uma configuração do lugar das raízes bastante diferente.

Cancelamento dos polos de $G(s)$ com zeros de $H(s)$. É importante notar que, se o denominador de $G(s)$ e o numerador de $H(s)$ contiverem fatores comuns, então os polos e os zeros de malha aberta correspondentes se cancelarão mutuamente, reduzindo o grau da equação característica em uma ou mais unidades. Por exemplo, considere o sistema da Figura 6.14(a). (Esse sistema possui realimentação de velocidade.) Mudando o diagrama de blocos da Figura 6.14(a)

FIGURA 6.13

Gráficos do lugar das raízes.



para o mostrado na Figura 6.14(b), fica claro que $G(s)$ e $H(s)$ têm em comum o fator $s + 1$. A função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$ é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2) + K(s + 1)}$$

A equação característica é:

$$[s(s + 2) + K](s + 1) = 0$$

Entretanto, em virtude do cancelamento dos termos $(s + 1)$ que aparecem em $G(s)$ e $H(s)$, tem-se:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K(s + 1)}{s(s + 1)s(s + 2)} \\ &= \frac{s(s + 2) + K}{s(s + 2)} \end{aligned}$$

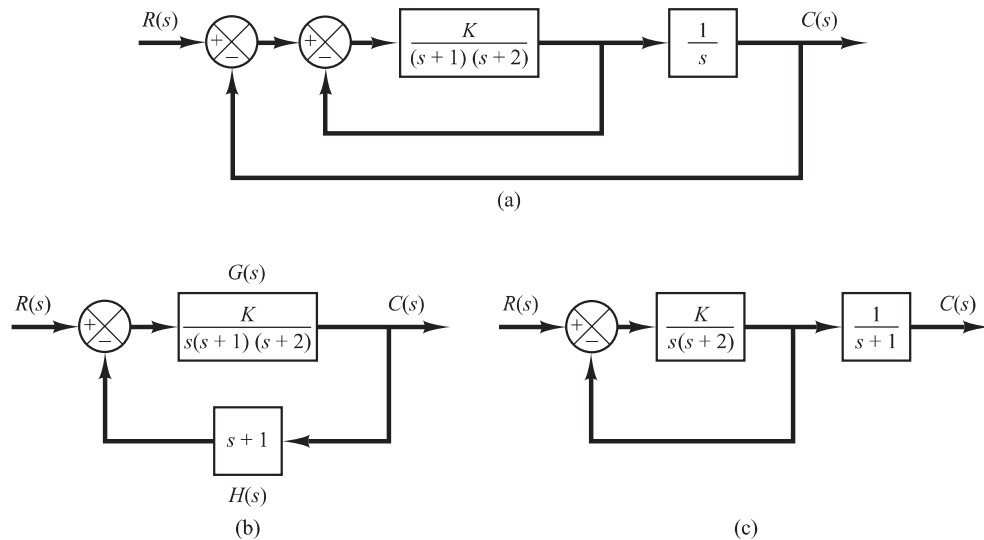
A equação característica reduzida é:

$$s(s + 2) + K = 0$$

O gráfico do lugar das raízes de $G(s)H(s)$ não mostra todas as raízes da equação característica, mas apenas as raízes da equação reduzida.

FIGURA 6.14

(a) Sistema de controle com realimentação de velocidade; (b) e (c) diagramas de blocos modificados.



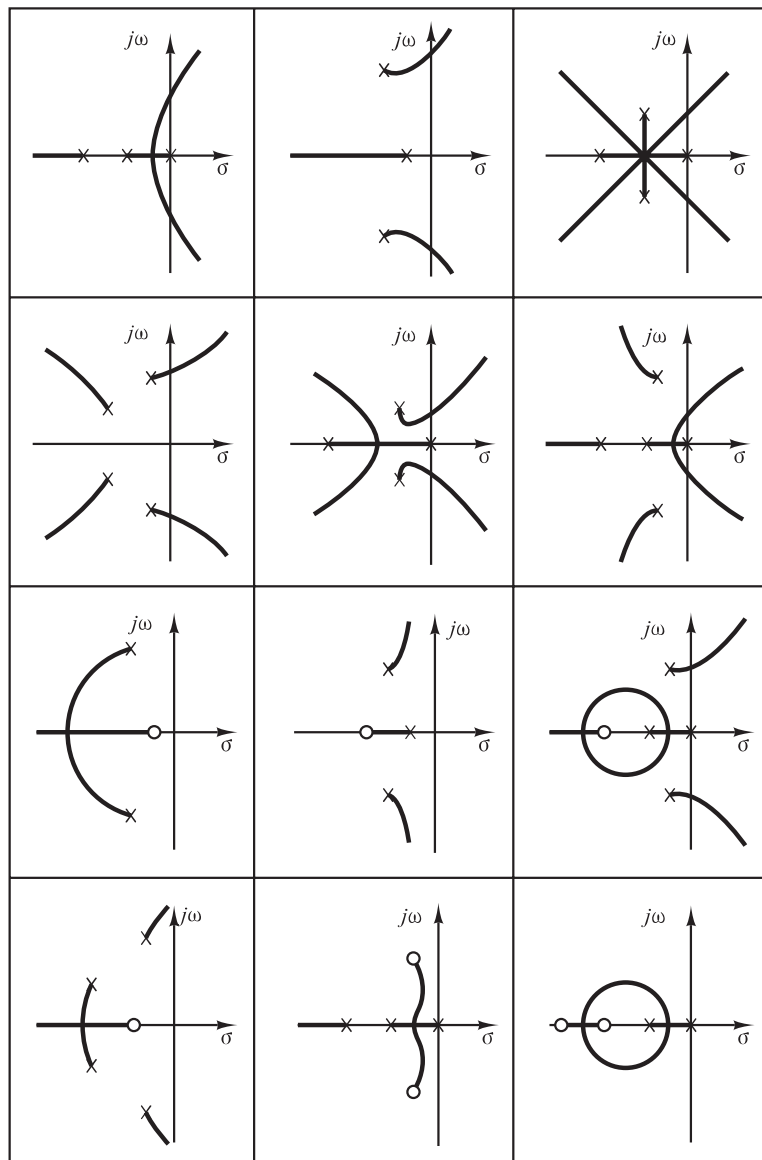
Para obter o conjunto completo dos polos de malha fechada, deve-se adicionar o polo cancelado de $G(s)H(s)$ aos polos de malha fechada obtidos a partir do gráfico do lugar das raízes de $G(s)H(s)$. É importante lembrar que o polo cancelado de $G(s)H(s)$ é um polo de malha fechada do sistema, como mostra a Figura 6.14(c).

Configurações típicas de polos e zeros e o lugar das raízes correspondentes. Em resumo, mostramos na Tabela 6.1 várias configurações de polos e zeros de malha aberta e seus correspondentes lugares das raízes. O padrão do lugar das raízes depende apenas da separação relativa dos polos e zeros de malha aberta. Se o número de polos exceder o número de zeros finitos em três ou mais unidades, haverá um valor do ganho K além do qual o lugar das raízes entrará no semiplano direito do plano s e, assim, o sistema se tornará instável. Para que um sistema seja estável, todos os polos de malha fechada devem se situar no semiplano esquerdo do plano s .

Observe que, uma vez que se tenha alguma experiência com o método, é possível avaliar com facilidade as alterações no lugar das raízes, em decorrência de modificações no número e no posicionamento dos polos e zeros. Consegue-se isso visualizando o gráfico do lugar das raízes resultante das várias configurações de polos e zeros.

TABELA 6.1

Configurações de polos e zeros de malha aberta e os lugares das raízes correspondentes.



Resumo. A partir das discussões anteriores, fica claro que é possível esboçar um gráfico do lugar das raízes com razoável precisão para dado sistema seguindo regras simples. (É aconselhável que o leitor estude os vários gráficos do lugar das raízes apresentados nos problemas resolvidos no final do capítulo.) Nos estágios preliminares de um projeto não são necessárias as posições precisas dos polos de malha fechada. Frequentemente, necessita-se apenas das localizações aproximadas para fazer uma estimativa do desempenho do sistema. É importante, então, que o projetista tenha a capacidade de esboçar rapidamente o lugar das raízes de dado sistema.

6.3 | Desenhando o gráfico do lugar das raízes com o MATLAB

Nesta seção, apresentamos o método de geração do gráfico do lugar das raízes e a obtenção de informações relevantes usando o MATLAB.

Desenhando o gráfico do lugar das raízes com o MATLAB. Na construção do gráfico do lugar das raízes, a equação do sistema é apresentada na forma da Equação 6.11, que pode ser escrita como:

$$1 + K \frac{\text{num}}{\text{den}} = 0$$

onde num é o polinômio do numerador e den, o polinômio do denominador. Ou seja,

$$\begin{aligned} \text{num} &= (s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m) \\ &= s^m + (z_1 + z_2 + \dots + z_m)s^{m-1} + \dots + z_1 z_2 \dots z_m \\ \text{den} &= (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) \\ &= s^n + (p_1 + p_2 + \dots + p_n)s^{n-1} + \dots + p_1 p_2 \dots p_n \end{aligned}$$

Note que ambos os vetores, num e den, devem ser escritos segundo as potências decrescentes de s .

Um comando MATLAB comumente utilizado para desenhar o lugar das raízes é:

$$\text{rlocus}(\text{num}, \text{den})$$

Esse comando faz que o gráfico do lugar das raízes seja desenhado na tela. O vetor de ganho K é determinado automaticamente. (O vetor K contém todos os valores do ganho para os quais os polos de malha fechada são calculados.)

Para os sistemas definidos no espaço de estados, $\text{rlocus}(A, B, C, D)$ traça o lugar das raízes do sistema, determinando automaticamente o vetor de ganho.

Note que os comandos

$$\text{rlocus}(\text{num}, \text{den}, K) \quad \text{e} \quad \text{rlocus}(A, B, C, D, K)$$

utilizam o vetor de ganho K informado pelo usuário.

Se for desejável traçar o lugar das raízes com as marcas ‘o’ ou ‘x’, será necessário utilizar o seguinte comando:

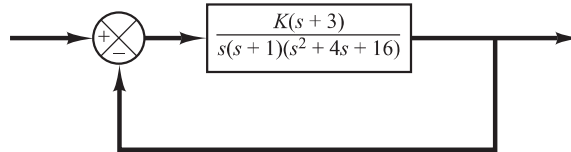
$$\begin{aligned} r &= \text{rlocus}(\text{num}, \text{den}) \\ \text{plot}(r, 'o') \quad \text{ou} \quad \text{plot}(r, 'x') \end{aligned}$$

Traçar o gráfico do lugar das raízes utilizando as marcas o ou x é instrutivo, uma vez que cada um dos polos de malha fechada calculados será mostrado graficamente; algumas regiões do lugar das raízes são mais densamente ocupadas por essas marcas e, em outras, a ocupação é mais esparsa. O MATLAB fornece seu próprio conjunto de valores de ganho, utilizado no cálculo para traçar um lugar das raízes. Isso é feito por uma rotina interna de passo variável adaptativo. O MATLAB também utiliza, no comando plot, uma forma automática de escalar os eixos.

Exemplo 6.3 Considere o sistema mostrado na Figura 6.15. Trace o lugar das raízes com razão de quadratura, de modo que uma linha com inclinação 1 seja uma linha verdadeiramente a 45° . Escolha a região do lugar das raízes delimitada por:

FIGURA 6.15

Sistema de controle.



$$-6 \leq x \leq 6, \quad -6 \leq y \leq 6$$

onde x e y são, respectivamente, a coordenada do eixo real e a coordenada do eixo imaginário.

Para configurar na tela determinada região que tenha a forma de um quadrado, utilize o seguinte comando:

$$v = [-6 \ 6 \ -6 \ 6]; \text{ axis}(v); \text{ axis}('square')$$

Com esse comando, a região do gráfico ficará configurada de acordo com a especificação e uma linha de coeficiente angular 1 estará, de fato, a 45°, sem apresentar distorção decorrente da forma irregular da tela.

Neste problema, o denominador é determinado pelo produto dos termos de primeira e segunda ordens. Portanto, deve-se multiplicar esses termos para obter um polinômio em s . A multiplicação desses termos pode ser feita facilmente com a utilização do comando de convolução, como é mostrado a seguir.

Defina:

$$\begin{aligned} a = s(s + 1): & \quad a = [1 \ 1 \ 0] \\ b = s^2 + 4s + 16: & \quad b = [1 \ 4 \ 16] \end{aligned}$$

Em seguida, utilize o seguinte comando:

$$c = \text{conv}(a,b)$$

Observe que $\text{conv}(a,b)$ fornece o produto dos dois polinômios a e b . O resultado do processamento é apresentado a seguir:

```
a = [1 1 0];
b = [1 4 16];
c = conv(a,b)
c =
    1    5   20   16    0
```

O polinômio do denominador é, então:

$$\text{den} = [1 \ 5 \ 20 \ 16 \ 0]$$

Para determinar os polos complexos conjugados de malha aberta (as raízes de $s^2 + 4s + 16 = 0$), deve-se digitar o comando `roots` como a seguir:

```
r = roots(b)
r =
   -2.0000 + 3.4641i
   -2.0000 - 3.4641i
```

Consequentemente, o zero de malha aberta e os polos de malha aberta do sistema são os seguintes:

$$\text{Zero de malha aberta:} \quad s = -3$$

$$\text{Polos de malha aberta:} \quad s = 0, s = -1, s = -2 \pm j3,4641$$

O Programa 6.1 em MATLAB traça o gráfico do lugar das raízes para esse sistema. A Figura 6.16 mostra o gráfico resultante.

Programa 6.1 em MATLAB

```
% -----Gráfico do lugar das raízes -----
num = [1 3];
den = [1 5 20 16 0]
rlocus(num,den);
v = [-6 6 -6 6];
axis(v); axis('square')
grid;
title('Gráfico do Lugar das Raízes de G(s) = K(s + 3)/[s(s + 1)(s^2 + 4s + 16)]')
```

Note que no Programa 6.1 em MATLAB, em vez de

```
den = [1 5 20 16 0]
```

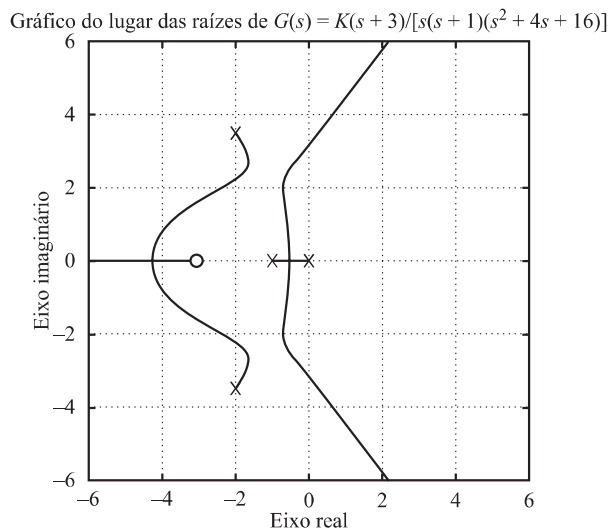
pode-se codificar

```
den = conv ([1 1 0], [1 4 16])
```

Os resultados serão os mesmos.

FIGURA 6.16

Gráfico do lugar das raízes.



Exemplo 6.4 Considere o sistema de realimentação negativa cuja função de transferência em malha aberta $G(s)H(s)$ é:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 0,5)(s^2 + 0,6s + 10)}$$

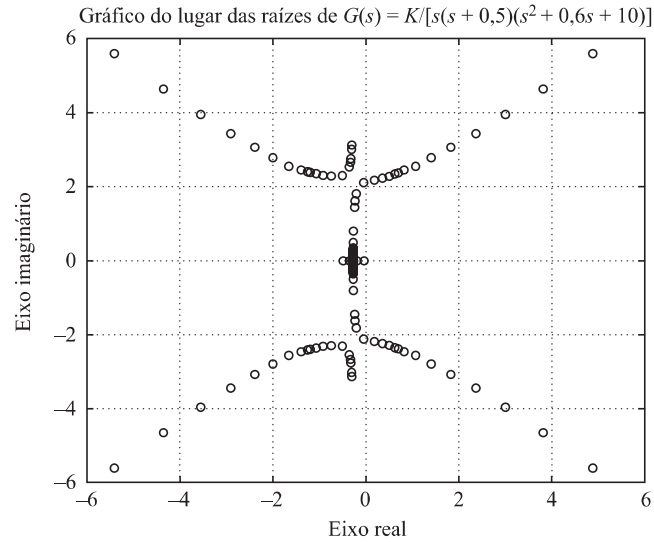
$$= \frac{K}{s^4 + 1,1s^3 + 10,3s^2 + 5s}$$

Não existem zeros de malha aberta. Os polos de malha aberta estão localizados em $s = -0,3 - j3,1480$, $s = -0,3 + j3,1480$, $s = -0,5$ e $s = 0$.

Digitando o Programa 6.2 em MATLAB no computador, obtém-se o gráfico do lugar das raízes mostrado na Figura 6.17.

FIGURA 6.17

Gráfico do lugar das raízes.



Programa 6.2 em MATLAB

```
% -----Gráfico do lugar da raízes -----
num = [1];
den = [1 1.1 10.3 5 0];
r = locus(num,den);
plot(r, 'o')
v = [-6 6 -6 6]; axis(v);
grid;
title('Gráfico do Lugar das Raízes de G(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Eixo Real')
ylabel('Eixo Imaginário')
```

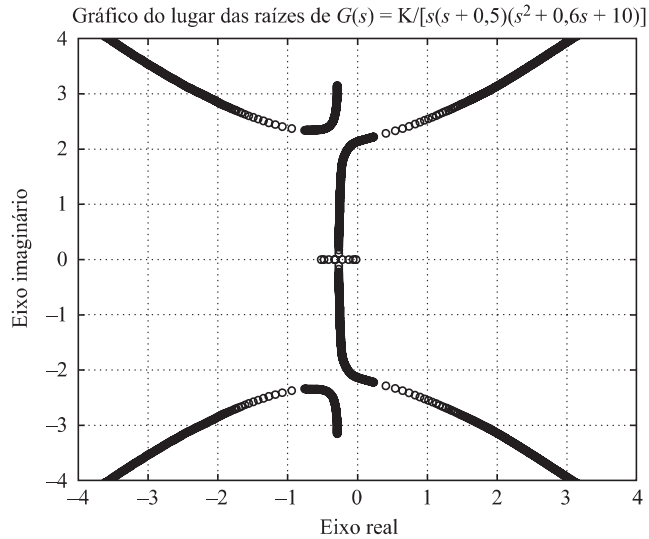
Observe que nas regiões próximas de $x = -0,3$, $y = 2,3$ e $x = -0,3$, $y = -2,3$ dois ramos se aproximam um do outro. Pode-se desejar saber se esses dois ramos devem ou não se tocar. Para analisar essa situação, é possível traçar gráficos do lugar das raízes com pequenos incrementos no valor de K na região crítica.

Pelo método convencional de tentativa e erro ou usando o comando `rlocfind`, que será apresentado adiante nesta seção, encontra-se a região de interesse específica como utilizando aquela em que $20 \leq K \leq 30$. Utilizando o Programa 6.3 em MATLAB, obtemos o gráfico do lugar das raízes mostrado na Figura 6.18. Esse gráfico mostra que os dois ramos que se aproximam no semiplano superior (ou no semiplano inferior) não se tocam.

Programa 6.3 em MATLAB

```
% -----Gráfico do lugar da raízes -----
num = [1];
den = [1 1.1 10.3 5 0];
K1 = 0:0.2:20;
K2 = 20:0.1:30;
K3 = 30:5:1000;
K = [K1 K2 K3];
r = locus(num,den,K);
plot(r, 'o')
v = [-4 4 -4 4]; axis(v);
grid;
title('Gráfico do Lugar das Raízes de G(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Eixo Real')
ylabel('Eixo Imaginário')
```

FIGURA 6.18
Gráfico do lugar das raízes.



Exemplo 6.5 Considere o sistema mostrado na Figura 6.19. As equações do sistema são:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

$$u = r - y$$

Neste problema, obteremos o gráfico do lugar das raízes do sistema definido no espaço de estados. Como exemplo, consideremos o caso em que as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \quad D = [0]$$

O gráfico do lugar das raízes desse sistema pode ser obtido com a utilização do seguinte comando do MATLAB:

$$rlocus(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, D)$$

Esse comando produz o mesmo gráfico do lugar das raízes que é obtido pelo comando `rlocus(num, den)`, onde `num` e `den` são obtidos a partir de:

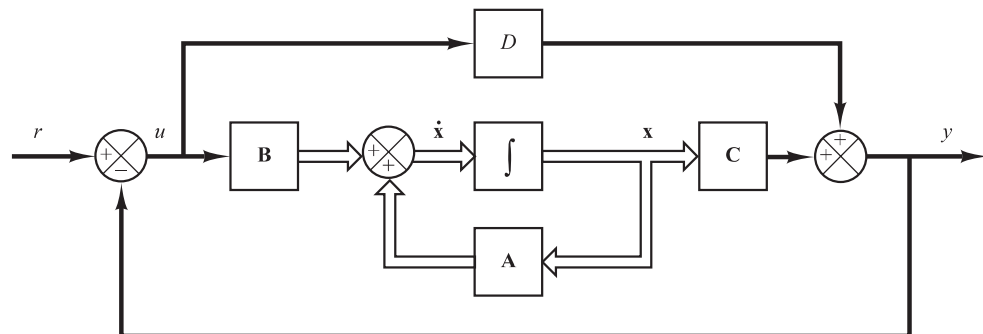
$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, D)$$

como a seguir:

$$\text{num} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$\text{den} = [1 \ 14 \ 56 \ 160]$$

FIGURA 6.19
Sistema de controle de malha fechada.



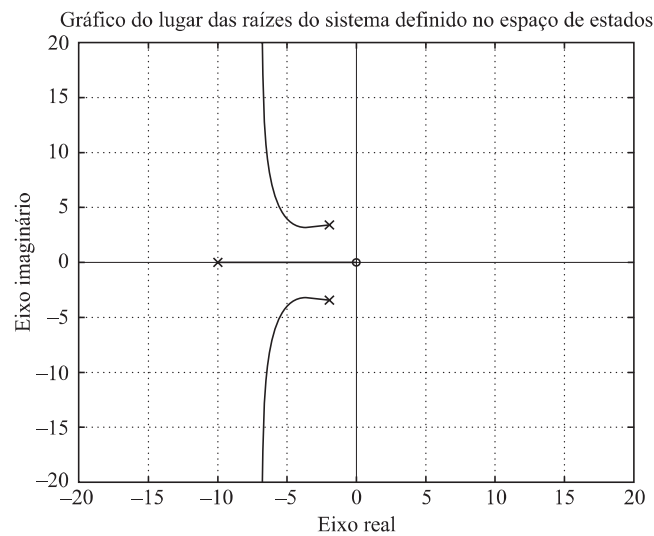
O Programa 6.4 em MATLAB gera o gráfico do lugar das raízes mostrado na Figura 6.20.

Programa 6.4 em MATLAB

```
% -----Gráfico do lugar da raízes -----
A = [0 1 0;0 0 1;-160 -56 -14];
B = [0;1;-14];
C = [1 0 0];
D = [0];
K = 0:0.1:400;
rlocus(A,B,C,D,K);
v = [-20 20 -20 20]; axis(v);
grid;
title('Gráfico do Lugar das Raízes do Sistema Definido no Espaço de Estados')
```

FIGURA 6.20

Gráfico do lugar das raízes do sistema definido no espaço de estados, onde **A**, **B**, **C** e **D** são dadas pela Equação 6.15.



Lugares com ζ constante e lugares com ω_n constante. Lembre-se de que, no plano complexo, o coeficiente de amortecimento ζ de um par de polos complexos conjugados pode ser expresso em termos do ângulo ϕ , que é medido em relação ao eixo real negativo, como mostra a Figura 6.21(a), com

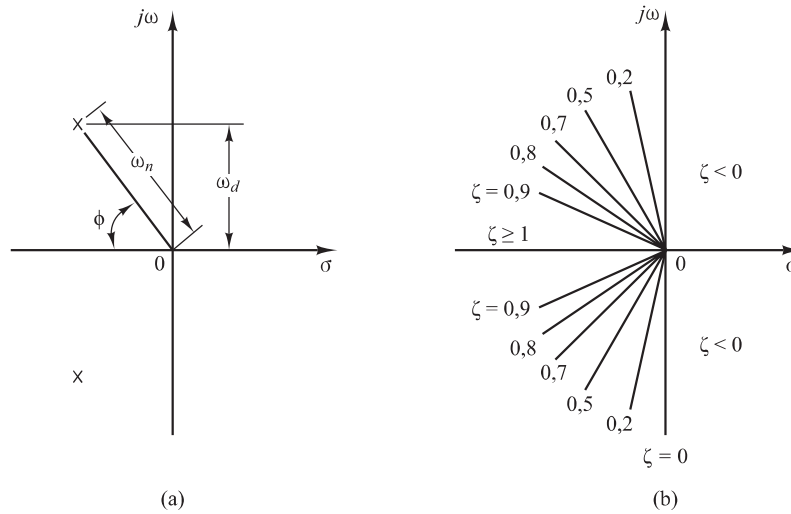
$$\zeta = \cos \phi$$

Em outras palavras, as linhas de coeficiente de amortecimento ζ constante são linhas radiais que passam pela origem, como mostra a Figura 6.21(b). Por exemplo, se o coeficiente de amortecimento for 0,5, será necessário que os polos complexos estejam situados em linhas que passem pela origem, formando ângulos de $\pm 60^\circ$ com o eixo real negativo. (Se a parte real de um par de polos complexos conjugados for positiva, o que significa que o sistema é instável, o ζ correspondente será negativo.) O coeficiente de amortecimento determina a localização angular dos polos, enquanto a distância entre o polo e a origem é determinada pela frequência natural não amortecida ω_n . Os lugares de ω_n constantes são círculos.

Para desenhar linhas com ζ constante e círculos com ω_n constante no gráfico do lugar das raízes com o MATLAB, deve-se utilizar o comando `sgrid`.

FIGURA 6.21

(a) Polos complexos;
(b) linhas com coeficiente de amortecimento ζ constantes.



Traçando grades polares no gráfico do lugar das raízes. O comando

`sgrid`

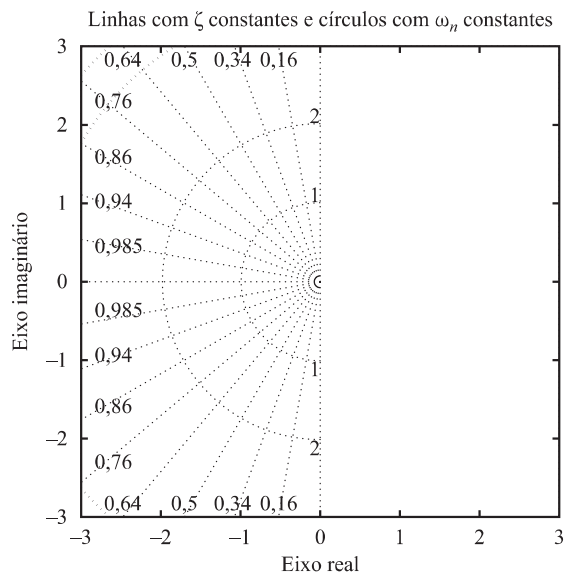
sobrepe linhas de coeficiente de amortecimento constante ($\zeta = 0 \sim 1$ com incremento de 0,1) e círculos de ω_n constante no gráfico do lugar das raízes. Veja o Programa 6.5 em MATLAB e o gráfico resultante mostrado na Figura 6.22.

Programa 6.5 em MATLAB

```
sgrid
v = [-3 3 -3 3]; axis(v); axis('square')
title('Linhas com \ zeta Constantes e Círculos \ omega_n Constantes')
xlabel('Eixo Real')
ylabel('Eixo Imaginário')
```

FIGURA 6.22

Linhas com ζ constantes e círculos com ω_n constantes.



Se forem desejáveis apenas determinadas linhas com ζ constante (como a linha com $\zeta = 0,5$ e a linha com $\zeta = 0,707$) e determinados círculos com ω_n constante (como o círculo com $\omega_n = 0,5$, o círculo com $\omega_n = 1$ e o círculo com $\omega_n = 2$), utiliza-se o seguinte comando:

```
sgrid([0.5, 0.707], [0.5, 1, 2])
```

Se for desejável desenhar linhas com ζ constante e círculos com ω_n constante, como os fornecidos anteriormente, para um gráfico do lugar das raízes de um sistema com

```
num = [0 0 0 1]
```

```
den = [1 4 5 0]
```

então execute o Programa 6.6 em MATLAB. O gráfico resultante do lugar das raízes é mostrado na Figura 6.23.

Programa 6.6 em MATLAB

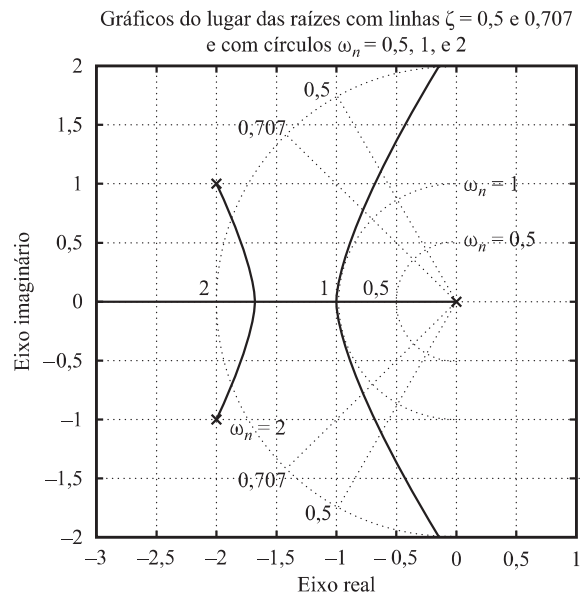
```
num = [1];
den = [1 4 5 0];
K = 0:0.01:1000;
r = rlocus(num, den, K);
plot(r, '-'); v = [-3 1 -2 2]; axis(v); axis('square')
sgrid([0.5,0.707], [0.5,1,2])
sgrid
title('Gráfico do Lugar das Raízes com Linhas com \zeta = 0.5 e
0.707 e com Círculos \omega_n = 0.5, 1, e 2')
xlabel('Eixo Real'); ylabel('Eixo Imaginário')
gtext('\omega_n = 2')
gtext('\omega_n = 1')
gtext('\omega_n = 0.5')
% Insira o marcador 'x' em cada um dos 3 polos de malha aberta.
gtext('x')
gtext('x')
gtext('x')
```

Se quisermos omitir todas as linhas de valores inteiros ζ ou todos os círculos de valores ω_n constantes, devemos utilizar chaves vazias [] nos argumentos do comando sgrid. Por exemplo, se for desejável desenhar somente a linha com coeficiente de amortecimento constante, correspondente a $\zeta = 0,5$, e nenhum círculo com ω_n constante no gráfico do lugar das raízes, podemos usar o comando

```
Sgrid(0.5, [ ])
```

FIGURA 6.23

Linhas com ζ constante e círculos com ω_n constante sobrepostos no lugar das raízes.



Sistemas condicionalmente estáveis. Considere o sistema com realimentação negativa mostrado na Figura 6.24. Podemos traçar o gráfico do lugar das raízes para esse sistema, aplicando as regras e procedimentos gerais para a construção do lugar das raízes ou usar o MATLAB para obter gráficos de lugar das raízes. O Programa 6.7 em MATLAB vai traçar o diagrama de lugar das raízes para o sistema. A Figura 6.25 mostra o gráfico resultante.

Programa 6.7 em MATLAB

```
num = [1 2 4];
den = conv(conv([1 4 0],[1 6]), [1 1.4 1]);
rlocus(num, den)
v = [-7 3 -5 5]; axis(v); axis('square')
grid
title('Gráfico do Lugar das Raízes de G(s) = K(s^2 + 2s + 4)/[s(s + 6)(s ^2 + 1.4s + 1)]')
text(1.0, 0.55, 'K = 12')
text(1.0, 3.0, 'K = 73')
text(1.0, 4.15, 'K = 154')
```

Pode-se ver pelo gráfico da Figura 6.25 que o sistema é estável apenas para amplitudes limitadas do valor de K , ou seja, $0 < K < 12$ e $73 < K < 154$. O sistema torna-se instável se $12 < K < 73$ e se $154 < K$. (Se K assumir um valor correspondente a uma operação instável, o sistema pode deixar de funcionar ou tornar-se não linear em virtude da não linearidade resultante de saturação que pode existir.) Tal sistema é chamado condicionalmente estável.

Na prática, os sistemas condicionalmente estáveis não são desejáveis. A estabilidade condicional é perigosa, mas ocorre em certos sistemas — particularmente em sistemas que tenham um ramo direto instável. Um ramo direto instável pode ocorrer se o sistema tiver uma malha interna. Aconselha-se evitar tal estabilidade condicional já que, se o ganho cair abaixo do valor

FIGURA 6.24
Sistema de controle.

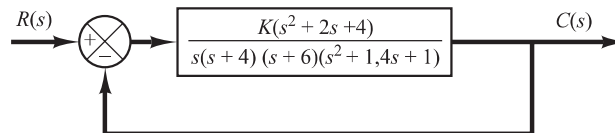
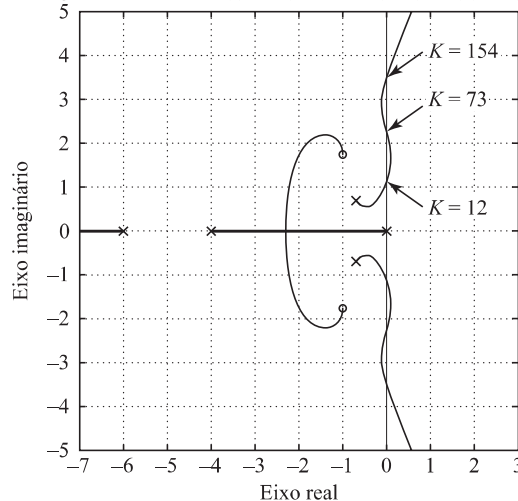


FIGURA 6.25
Gráfico do lugar das raízes de um sistema condicionalmente estável.

Gráfico do lugar das raízes de $G(s) = K(s^2 + 2s + 4)/[s(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)]$



crítico, seja qual for o motivo, o sistema se tornará instável. Note que a inclusão de uma rede de compensação adequada eliminará a estabilidade condicional. [A inclusão de um zero fará que o lugar das raízes se incline para a esquerda. (Veja a Seção 6.5.) Portanto, a estabilidade condicional pode ser eliminada incluindo-se a compensação adequada.]

Sistemas de fase não mínima. Se todos os polos e zeros do sistema estiverem no semiplano s esquerdo, então o sistema é chamado sistema de *fase mínima*. Se o sistema tiver pelo menos um polo ou zero no semiplano s direito, será denominado sistema de *fase não mínima*. O termo fase não mínima vem das características de mudança de fase de tal sistema quando sujeito a entradas senoidais.

Considere o sistema mostrado na Figura 6.26(a). Para esse sistema

$$G(s) = \frac{K(1 - T_a s)}{s(Ts + 1)} \quad (T_a > 0), \quad H(s) = 1$$

Este é um sistema de fase não mínima, já que há um zero no semiplano s direito. Para esse sistema, a condição angular é

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \angle \frac{-K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} \\ &= \angle \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} + 180^\circ \\ &= \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ou

$$\angle \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} = 0^\circ \quad (6.16)$$

O lugar das raízes pode ser obtido a partir da Equação 6.16. A Figura 6.26(b) mostra um gráfico de lugar das raízes para esse sistema. Pelo diagrama, vemos que o sistema é estável se o ganho K for menor que $1/T_a$.

Para obter um gráfico de lugar das raízes com o MATLAB, digite o numerador e o denominador como de costume. Por exemplo, se $T = 1$ s e $T_a = 0,5$ s, digite os seguintes num e den no programa:

$$\begin{aligned} \text{num} &= [-0,5 \ 1] \\ \text{den} &= [1 \ 1 \ 0] \end{aligned}$$

O Programa 6.8 em MATLAB resulta no lugar das raízes mostrado na Figura 6.27.

FIGURA 6.26

(a) Sistema de fase não mínima;
(b) gráfico do lugar das raízes.

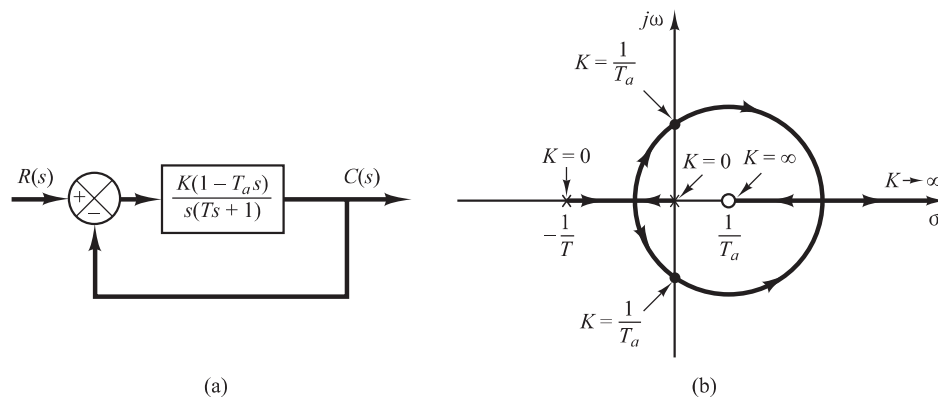
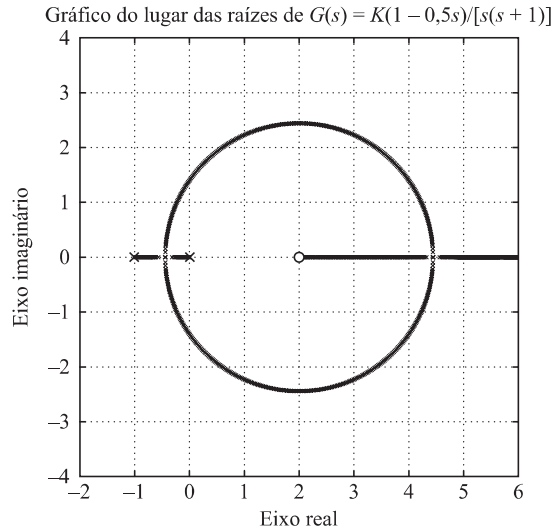


FIGURA 6.27

Gráfico do lugar das raízes de

$$G(s) = \frac{K(1 - 0,5s)}{s(s + 1)}$$



Programa 6.8 em MATLAB

```

num = [0 -0.5 1];
den = [1 1 0];
k1 = 0:0.01:30;
k2 = 30:1:100;
K3 = 100:5:500;
K = [k1 k2 k3];
rlocus(num,den,K)
v = [-2 6 -4 4]; axis(v); axis('square')
grid
title('Gráfico do Lugar das Raízes de G(s) = K(1 - 0.5s)/[s(s + 1)]')
% Posicione a marca 'x' de cada um dos 2 polos de malha aberta.
% Posicione a marca 'o' do zero de malha aberta.
gtext('x')
gtext('x')
gtext('o')

```

Ortogonalidade do lugar das raízes e lugares de ganho constante. Considere o sistema de realimentação negativa cuja função de transferência de malha aberta é $G(s)H(s)$. No plano $G(s)H(s)$, os lugares em que $|G(s)H(s)| = \text{constante}$ são círculos com centro na origem e os lugares correspondentes a $\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1)$, onde $(k = 0, 1, 2, \dots)$, se situam no eixo real negativo do plano $G(s)H(s)$, como mostra a Figura 6.28. [Note que o plano complexo utilizado aqui não é o plano s , mas o plano $G(s)H(s)$.]

Os lugares das raízes e os lugares de ganho constante no plano s são mapeamentos conformes dos lugares de $\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1)$, e de $|G(s)H(s)| = \text{constante}$ no plano $G(s)H(s)$.

Como a fase constante e os lugares de ganho constante no plano $G(s)H(s)$ são ortogonais, os lugares das raízes e os lugares de ganho constante no plano s são ortogonais. A Figura 6.29(a) mostra os lugares das raízes e os lugares de ganho constante para o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 3}, \quad H(s) = 1$$

Note que, como a configuração de polos e zeros é simétrica em relação ao eixo real, os lugares de ganho constante também são simétricos em relação ao eixo real.

A Figura 6.29(b) mostra o lugar das raízes e os lugares de ganho constante para o sistema:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}, \quad H(s) = 1$$

FIGURA 6.28

Diagrama de ganho constante e lugares de fase constante no plano $G(s)H(s)$.

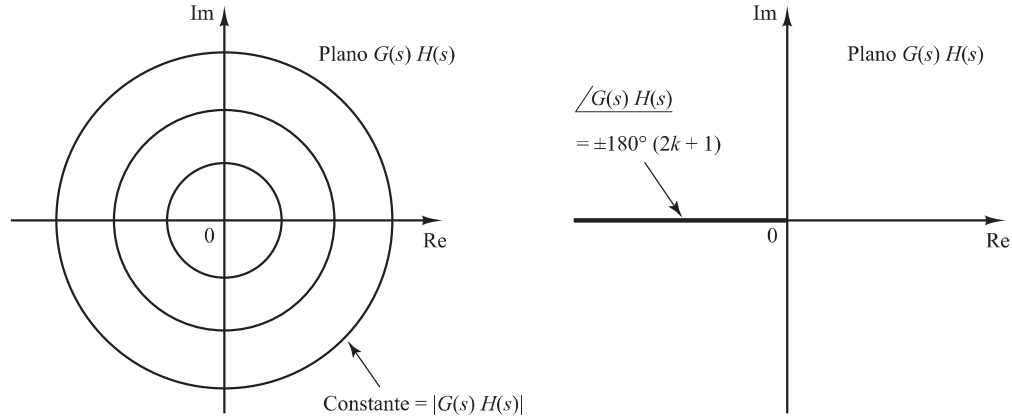
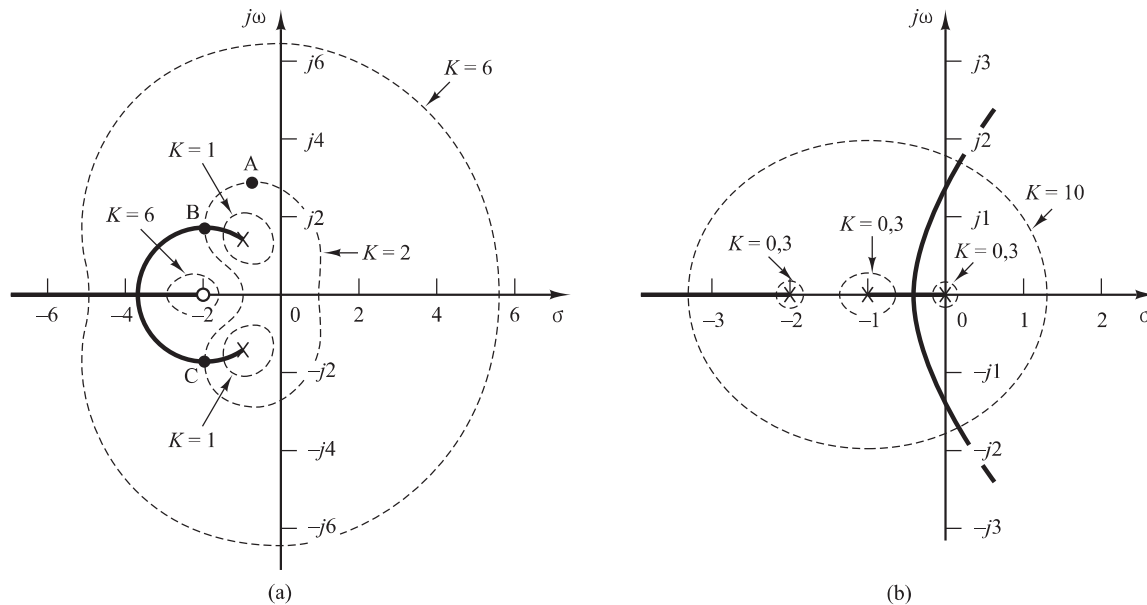


FIGURA 6.29

Gráfico do lugar das raízes e lugares de ganho constante. (a) Sistema com $G(s) = K(s + 2)/(s^2 + 2s + 3)$, $H(s) = 1$; (b) sistema com $G(s) = K/[s(s + 1)(s + 2)]$, $H(s) = 1$.



Observe que, como a configuração dos polos no plano s é simétrica em relação ao eixo real e como a linha paralela ao eixo imaginário passa pelo ponto $(\sigma = -1, \omega = 0)$, os lugares de ganho constante são simétricos em relação à linha $\omega = 0$ (eixo real) e à linha $\sigma = -1$.

Verifica-se nas figuras 6.29(a) e (b) que cada ponto no plano s tem o valor correspondente de K . Se for utilizado o comando `rlocfind` (apresentado a seguir), o MATLAB vai fornecer o valor de K do ponto específico, assim como os polos de malha fechada mais próximos, que correspondem a esse valor de K .

Determinando o valor do ganho K em um ponto arbitrário no lugar das raízes. Na análise de sistemas de malha fechada pelo MATLAB, é necessário, frequentemente, determinar o valor do ganho K em um ponto arbitrário do lugar das raízes. Isso pode ser feito com a utilização do comando `rlocfind`, como segue:

$$[K, r] = \text{rlocfind}(\text{num}, \text{den})$$

O comando `rlocfind`, que deve seguir um comando `rlocus`, sobrepõe coordenadas x - y móveis na tela. Com o mouse, posiciona-se a origem das coordenadas x - y sobre o ponto desejado no lugar

das raízes e pressiona-se o botão do mouse. Em seguida, o MATLAB exibe na tela as coordenadas daquele ponto, o valor do ganho naquele ponto e os polos de malha fechada correspondentes a esse valor de ganho.

Se o ponto selecionado não estiver no lugar das raízes, tal como o ponto A na Figura 6.29(a), o comando rlocfind fornece as coordenadas desse ponto selecionado, o valor do ganho desse ponto, como $K = 2$, e a posição dos polos de malha fechada, como os pontos B e C, correspondentes a esse valor de K . [Note que cada ponto no plano s tem um valor de ganho. Veja, por exemplo, as figuras 6.29(a) e (b).]

6.4 | Gráficos do lugar das raízes para sistemas com realimentação positiva

Lugar das raízes para sistemas com realimentação positiva.¹ Em um sistema de controle complexo pode haver uma malha de realimentação positiva interna, como mostra a Figura 6.30. Essa malha é normalmente estabilizada pela malha externa. A seguir, avaliaremos apenas a malha de realimentação positiva interna. A função de transferência de malha fechada da malha interna é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

A equação característica é:

$$1 - G(s)H(s) = 0 \tag{6.17}$$

Essa equação pode ser resolvida por um método análogo ao utilizado na Seção 6.2, para o caso do lugar das raízes. A condição de ângulo, entretanto, deve ser alterada.

A Equação 6.17 pode ser reescrita como:

$$G(s)H(s) = 1$$

que é equivalente às duas equações a seguir:

$$\angle G(s)H(s) = 0^\circ \pm k360^\circ \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$|G(s)H(s)| = 1$$

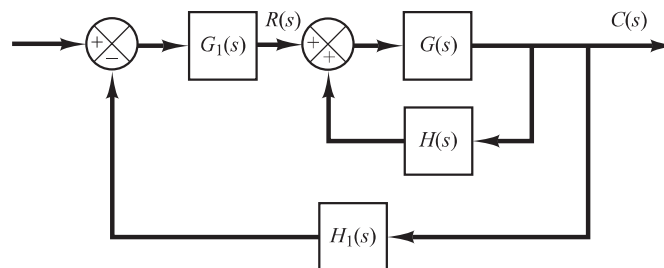
Para o caso de realimentação positiva, a soma total de todos os ângulos dos polos e zeros de malha aberta deve ser igual a $0^\circ \pm k360^\circ$. Assim, esse lugar das raízes segue uma condição angular de 0° em vez da condição de 180° , considerada previamente. A condição de módulo permanece inalterada.

Para ilustrar o gráfico do lugar das raízes de um sistema com realimentação positiva, utilizaremos as seguintes funções de transferência $G(s)$ e $H(s)$ como exemplo.

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}, \quad H(s) = 1$$

O ganho K é admitido como positivo.

FIGURA 6.30
Sistema de controle.



¹ Veja Wojcik nas Referências ao final do livro.

As regras para a construção do lugar das raízes, dadas na Seção 6.2, devem ser modificadas da seguinte maneira:

A Regra 2 é modificada como segue: se o número total de polos e zeros reais à direita do ponto de teste no eixo real for par, então esse ponto de teste estará posicionado no lugar das raízes.

A Regra 3 é modificada como segue:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm k 360^\circ}{n - m}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

onde n = número de polos finitos de $G(s)H(s)$

m = número de zeros finitos de $G(s)H(s)$

A Regra 5 é modificada como segue: o cálculo do ângulo de partida de um polo complexo de malha aberta (ou do ângulo de chegada) de um polo complexo de malha aberta (ou em um zero complexo) pode ser determinado subtraindo de 0° a soma de todos os ângulos dos vetores com origem nos outros polos e zeros que se dirigem ao polo complexo (ou ao zero complexo) em questão, incluindo os sinais apropriados.

As demais regras para a construção do gráfico do lugar das raízes permanecem as mesmas. Agora, vamos aplicar as regras modificadas para a construção do gráfico do lugar das raízes.

1. Posicione os polos de malha aberta ($s = -1 + j$, $s = -1 - j$, $s = -3$) e zero ($s = -2$) no plano complexo. À medida que K cresce de 0 a ∞ , os polos de malha fechada têm origem nos polos de malha aberta e terminam nos zeros de malha aberta (finitos ou infinitos), exatamente como nos casos de sistemas com realimentação negativa.
2. Determine os lugares das raízes no eixo real. Os lugares das raízes existem no eixo real entre -2 e $\pm\infty$ e entre -3 e $-\infty$.
3. Determine as assíntotas do lugar das raízes. Para o presente sistema,

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm k 360^\circ}{3 - 1} = \pm 180^\circ$$

Isso significa simplesmente que as assíntotas estão sobre o eixo real.

4. Determine os pontos de partida e de chegada. Dado que a equação característica é:

$$(s + 3)(s^2 + 2s + 2) - K(s + 2) = 0$$

obtemos:

$$K = \frac{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}{s + 2}$$

Derivando K em relação a s , obtemos:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{2s^3 + 11s^2 + 20s + 10}{(s + 2)^2}$$

Note que

$$\begin{aligned} 2s^3 + 11s^2 + 20s + 10 &= 2(s + 0,8)(s^2 + 4,7s + 6,24) \\ &= 2(s + 0,8)(s + 2,35 + j0,77)(s + 2,35 - j0,77) \end{aligned}$$

O ponto $s = -0,8$ está sobre o lugar das raízes. Como esse ponto se situa entre dois zeros (um zero finito e outro infinito), é de fato um ponto de chegada do eixo real. Os pontos $s = -2,35 \pm j0,77$ não satisfazem a condição angular e, portanto, não são nem pontos de partida nem de chegada.

5. Determine o ângulo de partida do lugar das raízes de um polo complexo. Para o polo complexo em $s = -1 + j$, o ângulo de partida θ é:

$$\theta = 0^\circ - 27^\circ - 90^\circ + 45^\circ$$

ou

$$\theta = -72^\circ$$

(O ângulo de partida do polo complexo em $s = -1 - j$ é 72° .)

- Escolha um ponto de teste em uma região ampla, próxima ao eixo $j\omega$ e à origem, e aplique a condição angular. Determine um número suficiente de pontos que satisfaça a condição angular.

A Figura 6.31 mostra o lugar das raízes do sistema dado com realimentação positiva. O lugar das raízes é mostrado com linhas e uma curva tracejada.

Note que se

$$K > \frac{(s + 3)(s^2 + 2s + 2)}{s + 2} \Big|_{s=0} = 3$$

uma das raízes reais entra no semiplano direito do plano s . Então, para valores de K maiores que 3, o sistema torna-se instável. (Para $K > 3$, o sistema deve ser estabilizado com uma malha externa.)

Note que a função de transferência para o sistema com realimentação positiva é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} \\ &= \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2) - K(s + 2)} \end{aligned}$$

Para comparar o gráfico do lugar das raízes desse sistema e o do sistema correspondente com realimentação negativa, a Figura 6.32 mostra o lugar das raízes do sistema com realimentação negativa cuja função de transferência é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 2)}$$

FIGURA 6.31

Gráfico do lugar das raízes para um sistema com realimentação positiva com $G(s) = K(s + 2)/[(s + 3)(s^2 + 2s + 2)]$, $H(s) = 1$.

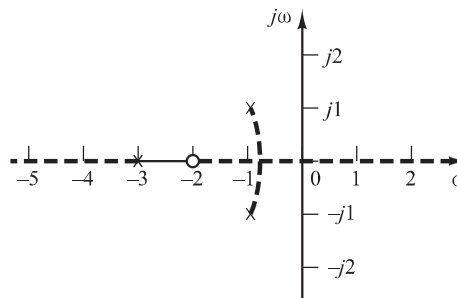
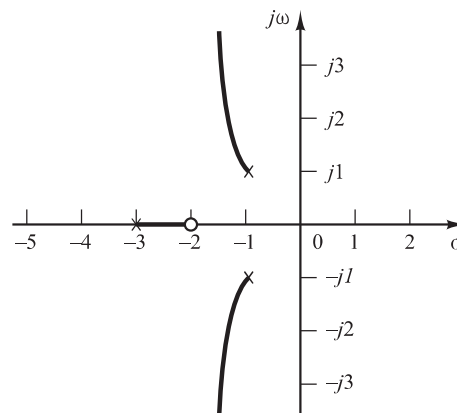


FIGURA 6.32

Gráfico do lugar das raízes para um sistema com realimentação negativa com $G(s) = K(s + 2)/[(s + 3)(s^2 + 2s + 2)]$, $H(s) = 1$.



A Tabela 6.2 mostra vários gráficos do lugar das raízes de sistemas com realimentação positiva e realimentação negativa. As funções de transferência de malha fechada são dadas por:

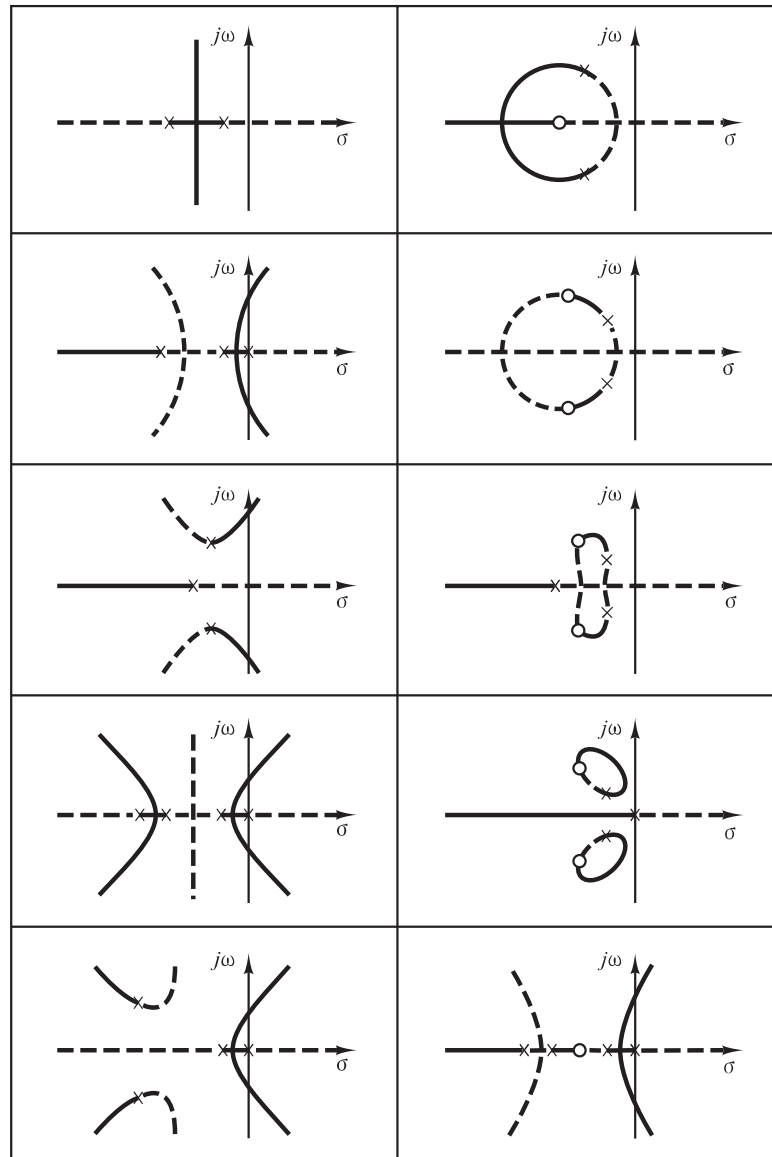
$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 + GH}, \quad \text{para sistemas com realimentação negativa}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 - GH}, \quad \text{para sistemas com realimentação positiva}$$

onde GH é a função de transferência de malha aberta. Na Tabela 6.2, nos gráficos do lugar das raízes dos sistemas com realimentação negativa, as linhas e as curvas estão traçadas com linhas contínuas e, nos gráficos dos sistemas com realimentação positiva, estão com linhas e curvas tracejadas.

TABELA 6.2

Gráficos do lugar das raízes de sistemas com realimentação positiva e com realimentação negativa.



As linhas e curvas contínuas correspondem aos sistemas com realimentação negativa; as linhas e as curvas tracejadas correspondem aos sistemas com realimentação positiva.

6.5 | Abordagem do lugar das raízes no projeto de sistemas de controle

Considerações preliminares de projeto. Na construção de um sistema de controle, sabemos que uma modificação adequada na dinâmica da planta pode ser uma maneira simples de atender às especificações de desempenho. Isso, no entanto, pode não ser possível em muitas situações práticas porque a planta pode ser fixa e não ser passível de modificações. Nesses casos, devemos ajustar outros parâmetros que não aqueles da planta fixa. Neste livro, consideramos que a planta é dada e inalterável.

Na prática, o gráfico do lugar das raízes de um sistema pode indicar que o desempenho desejado não pode ser atingido simplesmente com o ajuste de ganho (ou de algum outro parâmetro ajustável). De fato, em alguns casos, o sistema pode ser instável em todos os valores de ganho (ou de outro parâmetro ajustável). Torna-se então necessário remodelar os lugares das raízes para atender às especificações de desempenho.

Os problemas de projeto, portanto, tornam-se aqueles de melhorar o desempenho do sistema por meio da inclusão de um compensador. A compensação de um sistema de controle fica reduzida ao projeto de um filtro cujas características tendem a compensar as características indesejáveis e inalteráveis da planta.

Projeto pelo método do lugar das raízes. O projeto pelo método do lugar das raízes baseia-se na modificação do lugar das raízes do sistema, por meio do acréscimo de polos e zeros à função de transferência de malha aberta do sistema, forçando o lugar das raízes a passar pelos polos de malha fechada desejados no plano s . A característica do projeto pelo método do lugar das raízes é que ele se baseia no pressuposto de que o sistema de malha fechada tem um par dominante de polos de malha fechada. Isso significa que o efeito dos zeros e polos adicionais não afeta muito as características de resposta.

No projeto de um sistema de controle, se for necessário outro ajuste além do ganho (ou de outro parâmetro), devemos modificar o lugar das raízes original pela inserção de um compensador apropriado. Uma vez que os efeitos da adição de polos e/ou zeros no gráfico do lugar das raízes forem perfeitamente compreendidos, podemos determinar facilmente a localização do(s) polo(s) e zero(s) do compensador que vão remodelar o lugar das raízes conforme o desejado. Em essência, no projeto pelo método do lugar das raízes, o lugar das raízes do sistema é modificado por meio de um compensador, de modo que um par de polos de malha fechada dominantes possa ser colocado na posição desejada.

Compensação em série e compensação em paralelo (ou por realimentação). As figuras 6.33(a) e (b) mostram os esquemas de compensação comumente utilizados pelos sistemas de controle com realimentação. A Figura 6.33(a) mostra a configuração em que o compensador $G_c(s)$ é colocado em série com a planta. Esse esquema é chamado *compensação em série*.

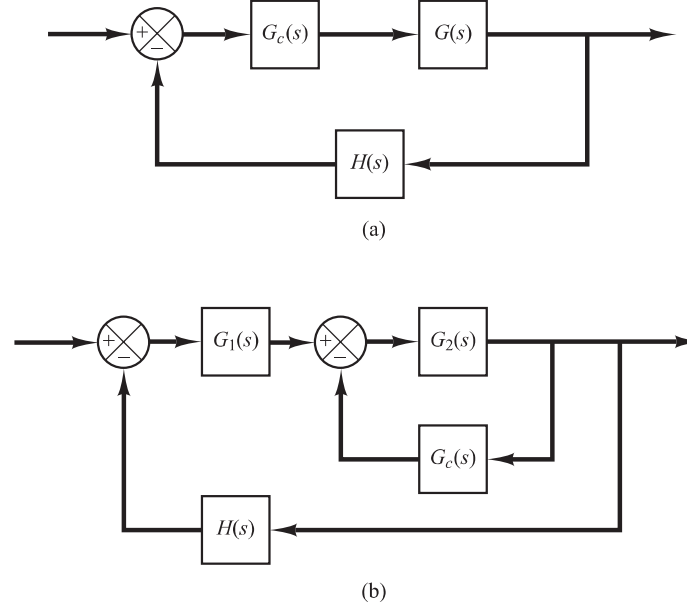
A alternativa para a compensação em série é retornar o(s) sinal(is) a partir de determinado(s) elemento(s) e inserir um compensador no ramo da realimentação interna resultante, como mostra a Figura 6.33(b). Essa compensação é chamada *compensação em paralelo* ou *compensação por realimentação*.

Na compensação de um sistema de controle, normalmente vemos que o problema se reduz ao projeto adequado de um compensador em série ou em paralelo. A escolha entre o compensador em série e o compensador em paralelo depende da natureza dos sinais no sistema, do nível de potência nos vários pontos, dos componentes disponíveis, da experiência do projetista, de considerações econômicas, entre outras.

Em geral, a compensação em série pode ser mais simples que a compensação em paralelo; entretanto, a compensação em série requer, frequentemente, amplificadores adicionais para aumentar o ganho e/ou produzir isolamento. (Para evitar dissipação de potência, o compensador em série é colocado no ponto de menor potência do ramo direto.) Deve-se notar que, em geral, o número de componentes requeridos na compensação em paralelo será menor que o número de componentes

FIGURA 6.33

(a) Compensação em série;
 (b) compensação em paralelo ou por realimentação.



na compensação em série, desde que esteja disponível um sinal adequado, porque a transferência de energia ocorre do nível mais alto de potência para o nível mais baixo. (Isso significa que amplificadores adicionais podem ser desnecessários.)

Nas seções 6.6 a 6.9, discutiremos primeiro as técnicas de compensação em série e depois apresentaremos uma técnica de compensação em paralelo utilizando o projeto de um sistema de controle com realimentação de velocidade.

Compensadores comumente usados. Se for necessário um compensador para satisfazer às especificações de desempenho, o projetista deve implementar um dispositivo físico que tenha a função de transferência prescrita para o compensador.

Vários dispositivos físicos têm sido utilizados para esse fim. De fato, muitas ideias excelentes e úteis para a construção física de compensadores podem ser encontradas na literatura.

Se for aplicada uma excitação senoidal à entrada de uma rede e a resposta em regime permanente (que também é senoidal) tiver um avanço de fase, então a rede será chamada rede de avanço de fase. (O valor do ângulo de avanço de fase é uma função da frequência de entrada.) Se a resposta em regime permanente tiver um atraso de fase, então a rede será denominada rede de atraso de fase. Em uma rede de atraso e avanço de fase, tanto o atraso como o avanço de fase ocorrem no sinal de saída, mas em regiões de frequências diferentes; o atraso de fase ocorre na região de baixa frequência e o avanço de fase ocorre na região de alta frequência. Um compensador com características de uma estrutura de avanço de fase, de atraso de fase ou de atraso e avanço de fase é chamado compensador por avanço de fase, compensador por atraso de fase ou compensador por atraso e avanço de fase, respectivamente.

Entre os vários tipos de compensadores são amplamente empregados os compensadores por avanço de fase, compensadores por atraso de fase, compensadores por atraso e avanço de fase e compensadores por realimentação de velocidade (tacométricos). Neste capítulo, a maior parte das discussões estará limitada a esses tipos. Os compensadores por avanço de fase, atraso de fase e atraso e avanço de fase podem ser dispositivos eletrônicos (como circuitos com amplificadores operacionais) ou redes *RC* (elétricas, mecânicas, pneumáticas, hidráulicas ou uma combinação desses tipos) e amplificadores.

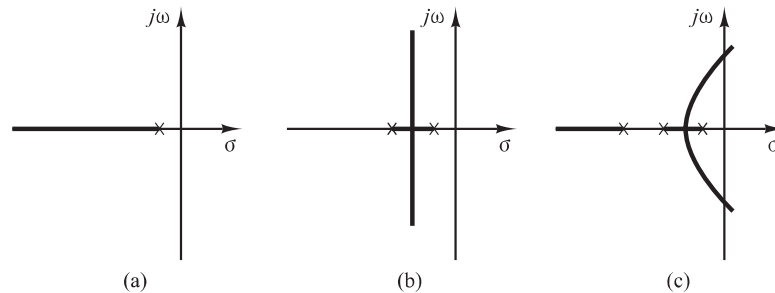
Compensadores em série usados frequentemente em sistemas de controle são os compensadores por avanço de fase, por atraso de fase e por atraso e avanço de fase. Os controladores PID que são frequentemente usados nos sistemas de controle industriais são discutidos no Capítulo 8.

Note que, no projeto de um sistema de controle pelo método do lugar das raízes ou pelo método de resposta em frequência, o resultado final não é único porque a melhor solução, ou a solução ótima, pode não ser precisamente definida se forem dadas as especificações de domínio do tempo ou de domínio de frequência.

Efeitos da adição de polos. A adição de um polo à função de transferência de malha aberta tem o efeito de deslocar o lugar das raízes para a direita, tendendo a diminuir a estabilidade relativa do sistema e fazendo com que a acomodação da resposta seja mais lenta. (Lembre-se de que a adição de um controle integral acrescenta um polo na origem, tornando assim o sistema menos estável.) A Figura 6.34 mostra exemplos de lugares das raízes que ilustram os efeitos da adição de um polo a um sistema com um único polo e da adição de dois polos a um sistema com um único polo.

FIGURA 6.34

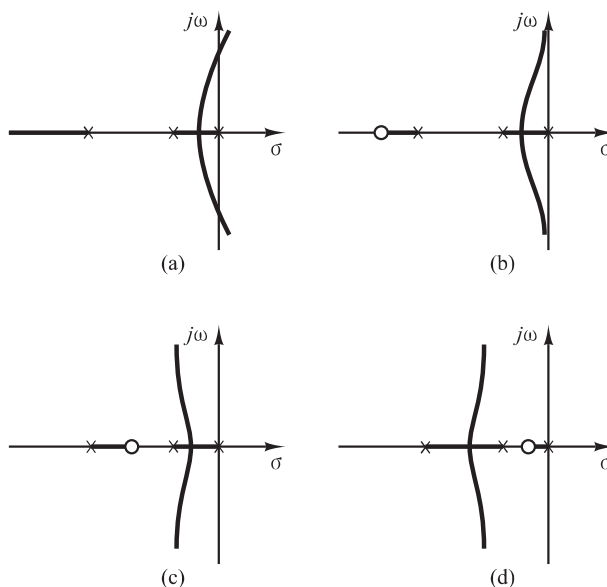
(a) Gráfico do lugar das raízes de um sistema com um único polo;
(b) gráfico do lugar das raízes de um sistema com dois polos;
(c) gráfico do lugar das raízes de um sistema com três polos.



Efeitos da adição de zeros. A adição de um zero à função de transferência de malha aberta tem o efeito de deslocar o lugar das raízes para a esquerda, tendendo a tornar o sistema mais estável e mais rápida a acomodação da resposta. (Fisicamente, a adição de um zero na função de transferência do ramo direto significa adicionar um controle derivativo ao sistema. O efeito desse controle é introduzir certo grau de antecipação no sistema e aumentar a velocidade da resposta transitória.) A Figura 6.35(a) mostra o lugar das raízes de um sistema que é estável para pequenos valores de ganho, mas é instável para valores elevados. As figuras 6.35(b), (c) e (d) mostram os gráficos do lugar das raízes do sistema quando um zero é adicionado à função de transferência de malha aberta. Note que, quando um zero é inserido no sistema da Figura 6.35(a), ele se torna estável para todos os valores de ganho.

FIGURA 6.35

(a) Gráfico do lugar das raízes de um sistema com três polos;
(b), (c) e (d) gráficos do lugar das raízes que mostram os efeitos da adição de um zero ao sistema com três polos.



6.6 | Compensação por avanço de fase

Na Seção 6.5, apresentamos uma introdução à compensação de sistemas de controle e discutimos o material preliminar para o método do lugar das raízes no projeto de sistemas de controle e sua compensação. Nesta seção, trataremos do projeto de sistemas de controle utilizando-se a técnica de compensação por avanço de fase. No projeto de um sistema de controle, colocamos um compensador em série com a função de transferência inalterável $G(s)$ para obter um comportamento desejável. Então, o maior problema torna-se a escolha criteriosa do(s) polo(s) e zero(s) do compensador $G_c(s)$ onde deverão estar os polos de malha fechada dominantes no lugar desejado do plano s , de forma a atender às especificações de desempenho.

Compensadores por avanço de fase e compensadores por atraso de fase. Existem várias maneiras de construir compensadores de avanço de fase e de atraso de fase, como as redes eletrônicas, utilizando amplificadores operacionais, redes elétricas RC e sistemas mecânicos do tipo mola-amortecedor.

A Figura 6.36 mostra um circuito eletrônico que utiliza amplificadores operacionais. A função de transferência para esse circuito foi obtida no Capítulo 3, como segue (veja a Equação 3.36):

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \\ &= K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde

$$T = R_1 C_1, \quad \alpha T = R_2 C_2, \quad K_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}$$

Observe que

$$K_c \alpha = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}, \quad \alpha = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}$$

Essa rede tem um ganho dc de $K_c \alpha = R_2 R_4 / (R_1 R_3)$.

A partir da Equação 6.18, vemos que essa rede é uma rede de avanço de fase, se $R_1 C_1 > R_2 C_2$, ou $\alpha < 1$. Essa rede será de atraso de fase se $R_1 C_1 < R_2 C_2$. As configurações dos polos e zeros dessa rede quando $R_1 C_1 > R_2 C_2$ e quando $R_1 C_1 < R_2 C_2$, são mostradas nas figuras 6.37(a) e (b), respectivamente.

FIGURA 6.36

Circuito eletrônico que é uma rede de avanço de fase se $R_1 C_1 > R_2 C_2$ e uma rede de atraso de fase, se $R_1 C_1 < R_2 C_2$.

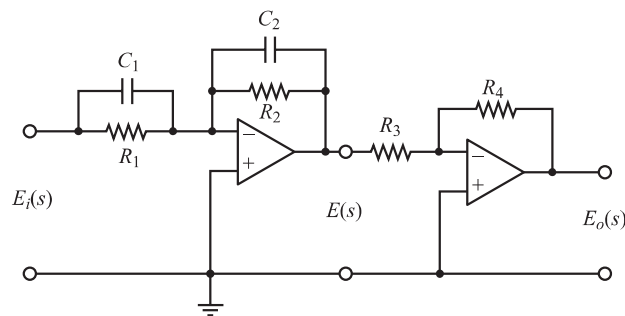
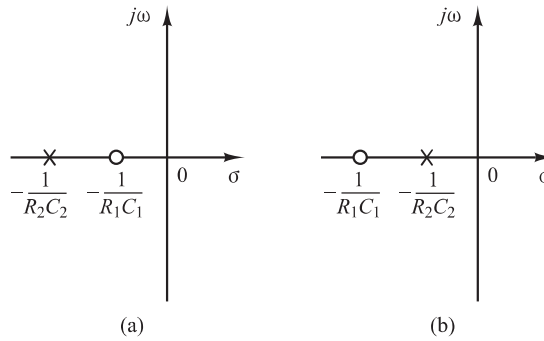


FIGURA 6.37

Configurações de polos e zeros: (a) rede por avanço de fase; (b) rede por atraso de fase.



Técnicas de compensação por avanço de fase baseadas no método do lugar das raízes. O método do lugar das raízes para projetos é muito eficiente quando as especificações são dadas em termos de grandezas no domínio do tempo, como o coeficiente de amortecimento e a frequência natural não amortecida dos polos de malha fechada dominantes, máximo sobressinal, tempo de subida e tempo de acomodação.

Considere o problema de um projeto no qual o sistema original seja instável para todos os valores de ganho ou que seja estável, mas apresente características de resposta transitória indesejáveis. Nesses casos, é necessário redesenhar o lugar das raízes na região próxima ao eixo $j\omega$ e à origem, de modo que os polos de malha fechada dominantes tenham localização desejada no plano complexo. Esse problema pode ser resolvido pela inserção de um compensador por avanço de fase apropriado em cascata, com função de transferência no ramo direto.

Os procedimentos para o projeto de um compensador por avanço de fase para o sistema da Figura 6.38 pelo método do lugar das raízes podem ser enunciados como segue:

1. Com base nas especificações de desempenho, determine a localização desejada dos polos de malha fechada dominantes.
2. Desenhe o gráfico do lugar das raízes do sistema não compensado (sistema original) e verifique se é possível, apenas com o ajuste do ganho, obter os polos de malha fechada desejados. Caso não seja possível, calcule a deficiência de ângulo ϕ . Esse ângulo deve ser completado pelo compensador por avanço de fase, desde que o novo lugar das raízes passe pela localização desejada dos polos de malha fechada dominantes.
3. Suponha que o compensador por avanço de fase $G_c(s)$ seja

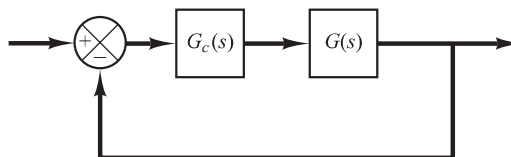
$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \quad (0 < \alpha < 1)$$

onde α e T são determinados com base na deficiência angular. K_c é determinado a partir do requisito de ganho de malha aberta.

4. Se não forem especificadas as constantes de erro estático, determine a posição do polo e do zero do compensador por avanço de fase, de modo que esse compensador complete o ângulo ϕ necessário. Se não for imposto nenhum outro requisito ao sistema, tente fazer

FIGURA 6.38

Sistema de controle.



que o valor de α seja o maior possível. Um valor elevado de α geralmente resulta em um valor elevado de K_v , o que é desejável. Observe que:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = K_c \alpha \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)$$

5. Determine o valor de K_c do compensador de avanço de fase, a partir da condição de módulo.

Uma vez projetado o compensador, verifique se todas as especificações de desempenho foram alcançadas. Se o sistema compensado não satisfizer às especificações de desempenho, então repita os procedimentos de projeto, ajustando o polo e o zero do compensador, até que essas especificações sejam atendidas. Se for requerida uma constante de erro estático de valor elevado, acrescente uma rede de atraso de fase em cascata ou substitua o compensador por avanço de fase por um compensador por atraso e avanço de fase.

Note que, se os polos de malha fechada selecionados como dominantes não forem realmente dominantes, será necessário modificar a posição desse par de polos dominantes. (Os outros polos de malha fechada que não os dominantes apenas modificam a resposta obtida a partir desses polos dominantes. A importância das modificações depende da localização dos polos de malha fechada remanescentes.) Além disso, os zeros de malha fechada afetam a resposta, se estiverem situados próximos da origem.

Exemplo 6.6 Considere o sistema mostrado na Figura 6.39(a). A função de transferência do ramo direto é:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

O gráfico do lugar das raízes desse sistema é mostrado na Figura 6.39(b). A função de transferência de malha fechada é:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{10}{s^2 + s + 10} \\ &= \frac{10}{(s + 0,5 + j3,1225)(s + 0,5 - j3,1225)} \end{aligned}$$

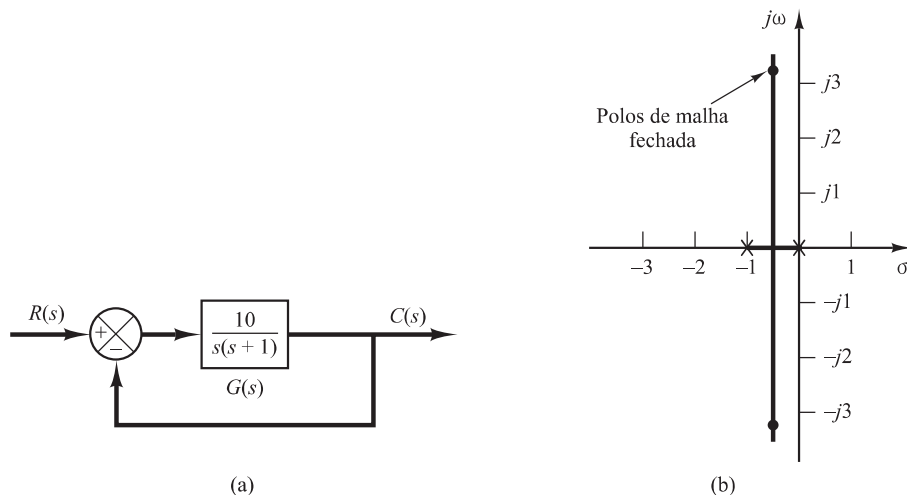
Os polos de malha fechada estão situados em

$$s = -0,5 \pm j3,1225$$

O coeficiente de amortecimento dos polos de malha fechada é $\zeta = (1/2)/\sqrt{10} = 0,1581$. A frequência natural não amortecida dos polos de malha fechada é $\omega_n = \sqrt{10} = 3,1623$ rad/s. Como o coeficiente

FIGURA 6.39

(a) Sistema de controle;
(b) gráfico do lugar das raízes.



de amortecimento é muito pequeno, o sistema terá um grande sobressinal na resposta em degrau, o que não é desejável.

Deseja-se projetar um compensador por avanço de fase $G_c(s)$ como mostra a Figura 6.40(a), de forma que os polos de malha fechada dominantes tenham um coeficiente de amortecimento de $\zeta = 0,5$ e a frequência natural não amortecida $\omega_n = 3$ rad/s. As localizações desejadas dos polos de malha fechada dominantes podem ser determinadas por:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 3s + 9$$

$$= (s + 1,5 + j2,5981)(s + 1,5 - j2,5981)$$

Segue-se que

$$s = -1,5 \pm j2,5981$$

[Veja a Figura 6.40(b).] Em alguns casos, depois de obtido o lugar das raízes do sistema original, os polos de malha fechada dominantes podem ser movidos para a posição desejada simplesmente pelo ajuste do ganho. Entretanto, este não é o caso do sistema em questão. Por essa razão, vamos inserir um compensador por avanço de fase no ramo direto.

Um procedimento geral para determinar o compensador por avanço de fase é o seguinte: primeiro, determine a soma dos ângulos junto a um dos polos de malha fechada dominantes na posição desejada, com os polos e zeros de malha aberta do sistema original, e em seguida o ângulo ϕ necessário a ser acrescentado para que a soma total dos ângulos seja igual a $\pm 180^\circ(2k + 1)$. O compensador por avanço de fase deve contribuir com esse ângulo ϕ . (Se o ângulo ϕ for muito grande, então podem ser necessárias duas ou mais redes de avanço de fase, e não uma única.)

Considere que o compensador $G_c(s)$ tem a seguinte função de transferência:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \quad (0 < \alpha < 1)$$

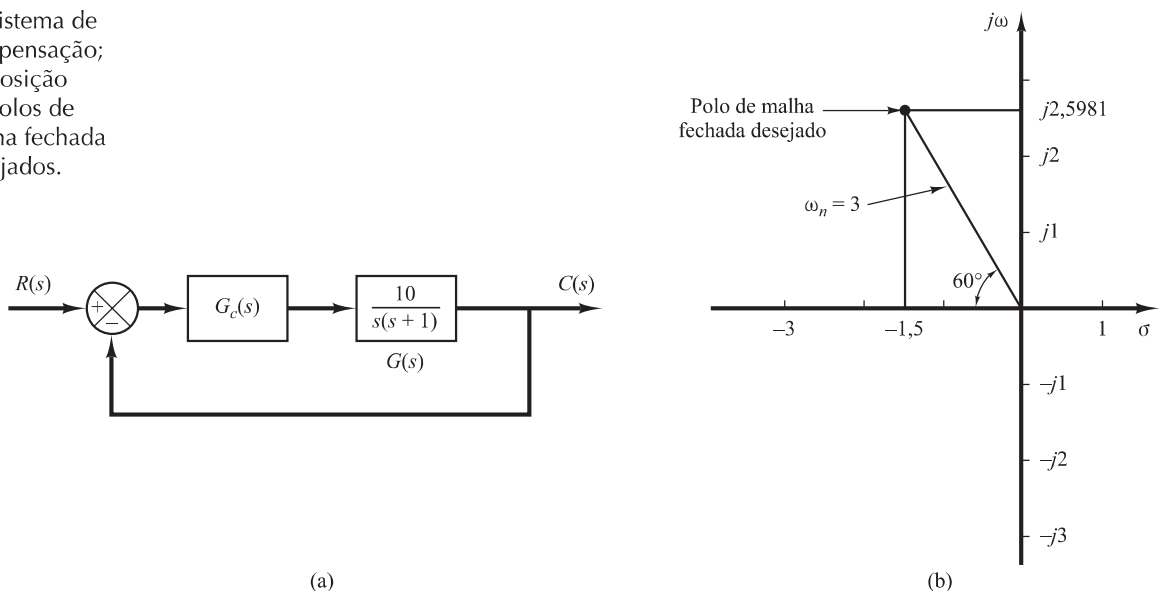
O ângulo, entre o polo na origem e o polo de malha fechada dominante em $s = -1,5 + j2,5981$ é 120° . O ângulo do polo em $s = -1$ ao polo de malha fechada desejado é $100,894^\circ$. Portanto, a deficiência angular é

$$\text{Deficiência angular} = 180^\circ - 120^\circ - 100,894^\circ = -40,894^\circ$$

A deficiência angular de $40,894^\circ$ deve ser preenchida por um compensador de avanço de fase.

FIGURA 6.40

(a) Sistema de compensação;
(b) posição de polos de malha fechada desejados.



Note que a solução para esse problema não é única. Existe uma infinidade de soluções. Apresentaremos duas possibilidades de solução, a seguir.

Método 1. Há muitas maneiras de determinar a localização do zero e do polo do compensador por avanço de fase. A seguir, apresentaremos um procedimento para obter o maior valor possível para α . (Note que um valor maior de α resulta em um valor de K_v maior. Na maioria dos casos, quanto maior o valor de K_v , melhor é o desempenho do sistema.) Primeiro, trace uma reta horizontal passando pelo ponto P , a localização desejada para um dos polos de malha fechada dominantes. Isso é mostrado na Figura 6.41 pela reta PA . Trace também uma reta conectando o ponto P à origem. Trace a bissetriz do ângulo entre as retas PA e PO , como mostra a Figura 6.41. Desenhe duas retas PC e PD que formem ângulos $\pm\phi/2$ com a bissetriz PB . As intersecções de PC e PD com o eixo real negativo fornecem as localizações necessárias para o polo e o zero da rede de avanço de fase. O compensador assim projetado fará que o ponto P seja um ponto de compensação do sistema sobre o lugar das raízes. O ganho de malha aberta será determinado pela condição de módulo.

No sistema considerado, o ângulo de $G(s)$ no polo de malha fechada desejado é:

$$\left. \angle \frac{10}{s(s+1)} \right|_{s=-1,5+j2,5981} = -220,894^\circ$$

Assim, se for necessário forçar o lugar das raízes a passar pelo polo de malha fechada desejado, o compensador por avanço de fase deve contribuir com $\phi = 40,894^\circ$ nesse ponto. Seguindo o procedimento de projeto apresentado anteriormente, podemos determinar o polo e o zero do compensador por avanço de fase.

Considerando a Figura 6.42, seccionando o ângulo APO em duas partes iguais e tomando $40,894^\circ/2$ de cada lado, encontram-se os lugares do zero e do polo, como segue:

$$\text{zero em } s = -1,9432$$

$$\text{polo em } s = -4,6458$$

Assim, $G_c(s)$ pode ser dado como

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_c \frac{s + 1,9432}{s + 4,6458}$$

(Para esse compensador o valor de α é $\alpha = 1,9432/4,6458 = 0,418$.)

O valor de K_c pode ser determinado a partir da condição de módulo.

$$\left| K_c \frac{s + 1,9432}{s + 4,6458} \frac{10}{s(s+1)} \right|_{s=-1,5+j2,5981} = 1$$

ou

FIGURA 6.41

Determinação do polo e do zero de uma rede de avanço de fase.

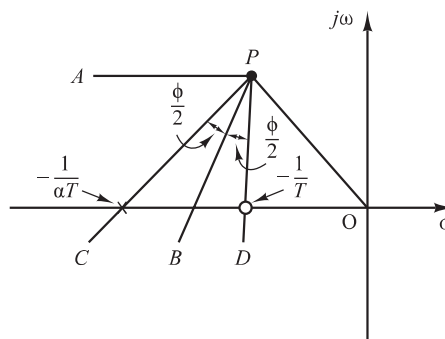
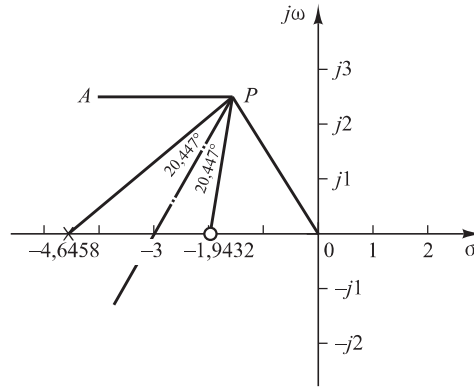


FIGURA 6.42

Determinação do polo e do zero de um compensador por avanço de fase.



$$K_c = \left| \frac{(s + 4,6458)s(s + 1)}{10(s + 1,9432)} \right|_{s = -1,5 + j2,5981} = 1,2287$$

Logo, o compensador por avanço de fase $G_c(s)$ projetado é dado por

$$G_c(s) = 1,2287 \frac{s + 1,9432}{s + 4,6458}$$

Portanto, a função de transferência de malha aberta do sistema projetado torna-se

$$G_c(s)G(s) = 1,2287 \left(\frac{s + 1,9432}{s + 4,6458} \right) \frac{10}{s(s + 1)}$$

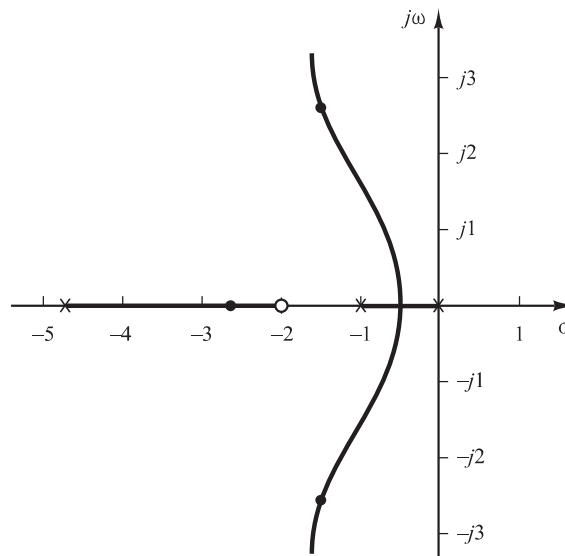
e a função de transferência de malha fechada torna-se

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{12,287(s + 1,9432)}{s(s + 1)(s + 4,6458) + 12,287(s + 1,9432)} \\ &= \frac{12,287s + 23,876}{s^3 + 5,646s^2 + 16,933s + 23,876} \end{aligned}$$

A Figura 6.43 mostra o gráfico de lugar das raízes para o sistema projetado.

FIGURA 6.43

Gráfico do lugar das raízes do sistema projetado.



Vale a pena verificar a constante de erro estático de velocidade K_v para o sistema projetado.

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1,2287 \frac{s + 1,9432}{s + 4,6458} \frac{10}{s(s + 1)} \right] \\ &= 5,139 \end{aligned}$$

Note que o terceiro polo de malha fechada do sistema projetado é encontrado pela divisão da equação característica pelos fatores conhecidos como segue:

$$s^3 + 5,646s^2 + 16,933s + 23,875 = (s + 1,5 + j2,5981)(s + 1,5 - j2,5981)(s + 2,65)$$

O método de compensação precedente nos possibilita situar os polos dominantes de malha fechada nos pontos desejados do plano complexo. O terceiro polo em $s = -2,65$ está bastante próximo do zero adicionado em $s = -1,9432$. Assim, o efeito desse polo sobre a resposta transitória é relativamente pequeno. Desde que nenhuma restrição tenha sido imposta ao polo não dominante e que não haja nenhuma especificação relativa ao valor da constante de erro estático de velocidade, concluímos que o atual projeto é satisfatório.

Método 2. Se determinarmos o zero do compensador de avanço de fase em $s = -1$, de forma que ele cancele o polo da planta em $s = -1$, o polo compensador deverá estar localizado em $s = -3$. (Veja a Figura 6.44.) Então, o compensador de avanço torna-se

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 1}{s + 3}$$

O valor de K_c pode ser determinado por meio da condição de módulo.

$$\left| K_c \frac{s + 1}{s + 3} \frac{10}{s(s + 1)} \right|_{s = -1,5 + j2,5981} = 1$$

ou

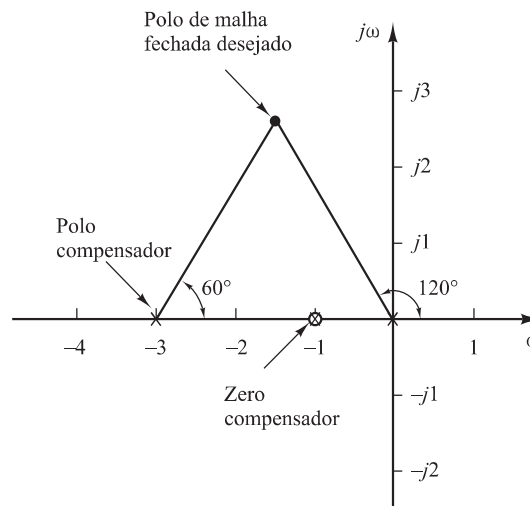
$$K_c = \left| \frac{s(s + 3)}{10} \right|_{s = -1,5 + j2,5981} = 0,9$$

Então,

$$G_c(s) = 0,9 \frac{s + 1}{s + 3}$$

FIGURA 6.44

Polo compensador e zero compensador.



A função de transferência de malha aberta do sistema projetado é

$$G_c(s)G(s) = 0,9 \frac{s+1}{s+3} \frac{10}{s(s+1)} = \frac{9}{s(s+3)}$$

A função de transferência de malha fechada do sistema projetado é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 3s + 9}$$

Note que, no caso em questão, o zero ou o compensador de avanço de fase cancelará um polo da planta, resultando em um sistema de segunda ordem, em lugar de um sistema de terceira ordem como projetamos por meio do Método 1.

A constante do erro estático de velocidade para o caso em questão é obtida como segue:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{9}{s(s+3)} \right] = 3 \end{aligned}$$

Observe que o sistema projetado pelo Método 1 resulta em um valor maior para a constante de erro estático de velocidade. Isso significa que o sistema projetado pelo Método 1 terá erros menores de estado permanente nas entradas em rampa do que o sistema projetado pelo Método 2.

Para variações na combinação de zero e polo do compensador que acrescentem $40,894^\circ$, o valor de K_v será diferente. Embora alguma mudança possa ser feita no valor de K_v por meio da alteração do lugar de polo e de zero do compensador de avanço de fase, se for desejável um grande aumento no valor K_v , será preciso mudar o compensador de avanço de fase para um compensador de atraso e avanço de fase.

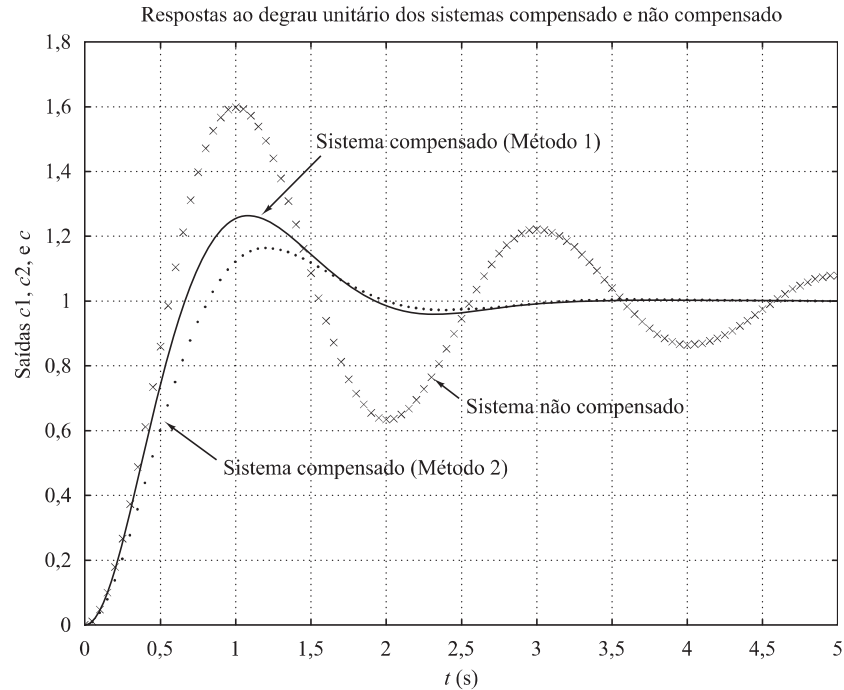
Comparação das respostas ao degrau dos sistemas compensados e não compensados. A seguir, examinaremos as respostas ao degrau unitário e à rampa unitária dos três sistemas: o sistema original não compensado, o sistema projetado pelo Método 1 e o sistema projetado pelo Método 2. O programa do MATLAB utilizado para obter as curvas de resposta ao degrau unitário é o Programa 6.9 em MATLAB, onde num1 e den1 indicam o numerador e o denominador do sistema projetado pelo Método 1 e num2 e den2 indicam o sistema projetado pelo Método 2. Num e den também são utilizados para o sistema sem compensação original. A Figura 6.45 mostra as curvas de resposta ao degrau unitário resultantes. O programa em MATLAB para obter as curvas de resposta à rampa unitária dos

Programa 6.9 em MATLAB

```
% ***** Resposta ao degrau unitário do sistema compensado e não compensado *****
num1 = [12.287 23.876];
den1 = [1 5.646 16.933 23.876];
num2 = [9];
den2 = [1 3 9];
num = [10];
den = [1 1 10];
t = 0:0.05:5;
c1 = step(num1,den1,t);
c2 = step(num2,den2,t);
c = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,c,'x')
grid
title('Resposta ao degrau unitário do sistema compensado e não compensado')
xlabel('t (s)')
ylabel('Saídas c1, c2, e c')
text(1.51,1.48,'Sistema compensado (Método 1)')
text(0.9,0.48,'Sistema compensado (Método 2)')
text(2.51,0.67,'Sistema não compensado')
```

FIGURA 6.45

Curvas de resposta ao degrau unitário para os sistemas projetados e para o sistema original sem compensação.



sistemas projetados é o Programa 6.10 em MATLAB, no qual usamos o comando `step` para obter respostas de rampa unitária, utilizando os numeradores e denominadores dos sistemas projetados com o Método 1 e com o Método 2 como segue:

```
num1 = [12,287 23,876]
den1 = [1 5,646 16,933 23,876 0]
num2 = [9]
den2 = [1 3 9 0]
```

A Figura 6.46 mostra as curvas de resposta à rampa unitária resultantes.

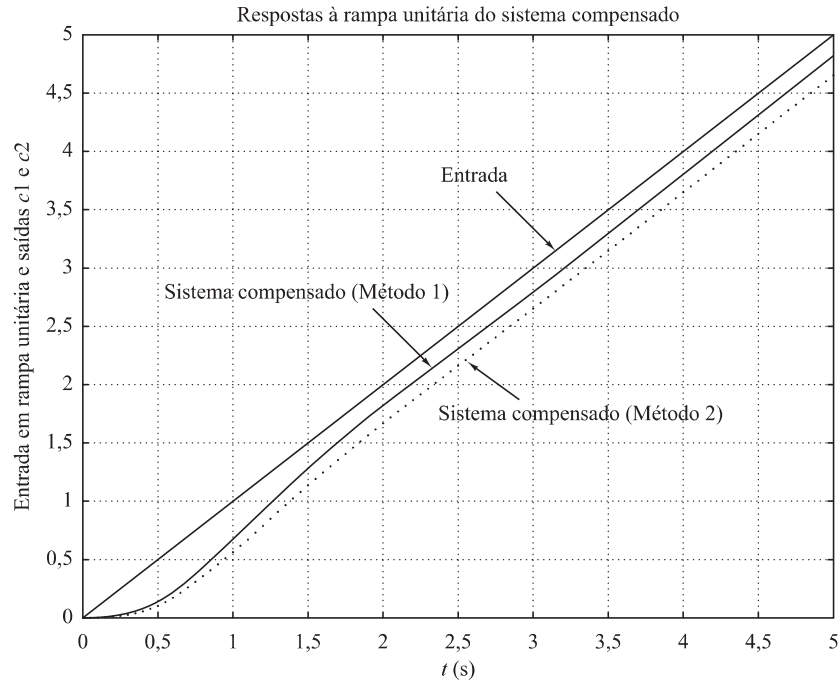
Programa 6.10 em MATLAB

```
% ***** Resposta à rampa unitária do sistema compensado *****
num1 = [12.287 23.876];
den1 = [1 5.646 16.933 23.876 0];
num2 = [9];
den2 = [1 3 9 0];
t = 0:0.05:5;
c1 = step(num1,den1,t);
c2 = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,t,'-')
grid
title('Resposta à rampa unitária do sistema compensado')
xlabel('t (s)')
ylabel('Entrada em rampa unitária e Saídas c1 e c2')
text(2.55,3.8,'Entrada')
text(0.55,2.8,'Sistema compensado (Método 1)')
text(2.35,1.75,'Sistema compensado (Método 2)')
```

Ao examinar essas curvas de resposta, note que o sistema compensado projetado pelo Método 1 exibe um sobressinal um pouco maior na resposta ao degrau do que o sistema compensado projetado pelo Método 2. No entanto, o primeiro tem melhores características de resposta para a entrada em rampa do que o segundo. Portanto, é difícil dizer qual o melhor. A decisão quanto

FIGURA 6.46

Curvas de resposta à rampa unitária de sistemas projetados.



à escolha deve ser feita conforme os requisitos de resposta (como sobressinais menores para entradas do tipo degrau, ou erros de estado permanente menores após uma entrada em rampa ou entrada variável) esperados no sistema projetado. Se houver o requisito tanto de sobressinais menores nas entradas em degrau quanto de erros de estado permanente menores após alterações na entrada, é possível que seja necessário usar um compensador de atraso e avanço de fase. (Veja a Seção 6.8 quanto às técnicas para compensadores de atraso e avanço de fase.)

6.7 | Compensação por atraso de fase

Compensador eletrônico por atraso de fase usando amplificadores operacionais. A configuração do compensador eletrônico por atraso de fase com a utilização de amplificadores operacionais é a mesma que a do compensador por avanço de fase mostrado na Figura 6.36. Escolhendo $R_2C_2 > R_1C_1$ no circuito mostrado na Figura 6.36, este se torna um compensador por atraso de fase. Com base na Figura 6.36, a função de transferência do compensador por atraso de fase é dada por:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \hat{K}_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

onde

$$T = R_1C_1, \quad \beta T = R_2C_2, \quad \beta = \frac{R_2C_2}{R_1C_1} > 1, \quad \hat{K}_c = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

Note que utilizamos β no lugar de α nas expressões apresentadas. [No compensador por avanço de fase, usamos α para indicar a relação $R_2C_2/(R_1C_1)$, que era menor que 1 ou $0 < \alpha < 1$.] Neste capítulo, vamos supor sempre que $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 1$.

Técnicas de compensação por atraso de fase baseadas no método do lugar das raízes.

Considere o problema de determinar uma rede de compensação apropriada para o caso em que o sistema apresente resposta transitória com características satisfatórias, mas as características em

regime permanente sejam insatisfatórias. A compensação, nesse caso, consiste essencialmente no aumento do ganho de malha aberta, sem alterar apreciavelmente as características da resposta transitória. Isso significa que o lugar das raízes nas proximidades dos polos dominantes de malha fechada não deve ser modificado significativamente, mas o ganho de malha aberta deve ser aumentado tanto quanto necessário. Isso pode ser obtido se for colocado um compensador por atraso de fase em cascata com a função de transferência do ramo direto dada.

Para evitar uma modificação apreciável no lugar das raízes, a contribuição angular da rede de atraso de fase deve ser limitada a um valor pequeno, digamos inferior a 5° . Para assegurar que isso ocorra, colocamos o polo e o zero da rede de atraso de fase relativamente próximos um do outro e próximos da origem do plano s . Então, os polos de malha fechada do sistema compensado serão apenas um pouco deslocados das posições originais. Por essa razão, as características da resposta transitória terão apenas uma ligeira alteração.

Considere um compensador por atraso de fase $G_c(s)$, onde

$$G_c(s) = \hat{K}_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (6.19)$$

Se colocarmos o zero e o polo do compensador por atraso de fase muito próximos um do outro, então $s = s_1$, onde s_1 é um dos polos dominantes de malha fechada, os módulos de $s_1 = (1/T)$ e $s_1 + [1/(\beta T)]$ serão quase iguais ou

$$|G_c(s_1)| = \left| \hat{K}_c \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right| \doteq \hat{K}_c$$

Para fazer que a contribuição angular da porção de atraso de fase do compensador seja pequena, será necessário que

$$-5^\circ < \left| \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right| < 0^\circ$$

Isso quer dizer que, se o ganho \hat{K}_c do compensador por atraso de fase for definido como igual a 1, as características da resposta transitória não serão alteradas. (Isso significa que o ganho resultante da função de transferência de malha aberta pode ser aumentado de um fator β , onde $\beta > 1$.) Se o polo e o zero forem colocados muito próximos da origem, então o valor de β pode ser aumentado. (Pode-se utilizar um valor alto de β , se for possível a implementação física de um compensador por atraso de fase.) Note que o valor de T deve ser elevado, mas seu valor exato não é crítico. Entretanto, não deve ser muito alto, para evitar dificuldades na implementação do compensador por atraso de fase, em decorrência dos componentes físicos.

Um aumento do ganho significa um aumento das constantes de erro estático. Se a função de transferência de malha aberta do sistema não compensado for $G(s)$, então a constante de erro estático de velocidade K_v do sistema não compensado será:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Se for escolhido um compensador como o que é dado pela Equação 6.19, então, para o sistema compensado com a função de transferência de malha aberta $G_c(s)G(s)$, a constante de erro estático de velocidade se tornará:

$$\hat{K}_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)K_v = \hat{K}_c \beta K_v$$

onde K_v é a constante de erro estático de velocidade do sistema não compensado.

Assim, se o compensador for o dado pela Equação 6.19, então a constante de erro estático de velocidade deverá ser multiplicada por $\hat{K}_c \beta$, onde \hat{K}_c é aproximadamente a unidade.

O principal efeito negativo da compensação por atraso de fase é que o zero do compensador que será gerado próximo da origem cria um polo de malha fechada também próximo da origem. Esse polo de malha fechada e esse zero do compensador produzirão uma ‘cauda’ alongada de pequena amplitude na resposta ao degrau, aumentando, assim, o tempo de acomodação.

Procedimentos de projeto de compensação por atraso de fase pelo método do lugar das raízes. O procedimento para o projeto de compensadores por atraso de fase, para o sistema da Figura 6.47 pelo método do lugar das raízes, pode ser enunciado como segue (vamos supor que o sistema não compensado satisfaça às especificações da resposta transitória por meio do simples ajuste do ganho; se não for esse o caso, considere como referência a Seção 6.8):

1. Desenhe o gráfico do lugar das raízes para o sistema não compensado, no qual a função de transferência de malha aberta é $G(s)$. Com base nas especificações da resposta transitória, localize os polos dominantes de malha fechada sobre o lugar das raízes.
2. Suponha que a função de transferência do compensador por atraso de fase seja dada pela Equação 6.19:

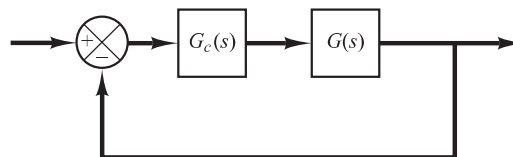
$$G_c(s) = \hat{K}_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

Então, a função de transferência de malha aberta do sistema compensado torna-se $G_c(s)G(s)$.

3. Calcule a particular constante de erro estático especificada no problema.
4. Determine o acréscimo na constante de erro estático necessário para satisfazer às especificações.
5. Determine o polo e o zero do compensador por atraso de fase que produzam o aumento necessário no valor em particular da constante de erro estático, sem modificar apreciaavelmente o lugar das raízes. (Note que a relação entre o valor do ganho requerido pelas especificações e o ganho encontrado no sistema não compensado deve ser igual à relação entre a distância do zero à origem e a distância do polo à origem.)
6. Desenhe o novo gráfico do lugar das raízes para o sistema compensado. Posicione os polos dominantes de malha fechada desejados sobre o lugar das raízes. (Se a contribuição angular da rede de atraso for muito pequena, isto é, de uns poucos graus, então o lugar das raízes original e o novo serão quase idênticos. Caso contrário, haverá uma pequena discrepância entre eles. Localize, então, sobre o novo lugar das raízes, os polos dominantes de malha fechada desejados, com base nas especificações da resposta transitória.)
7. Ajuste o ganho \hat{K}_c do compensador a partir da condição de módulo, de modo que os polos dominantes de malha fechada se situem na posição desejada. (\hat{K}_c será aproximadamente 1.)

FIGURA 6.47

Sistema de controle.

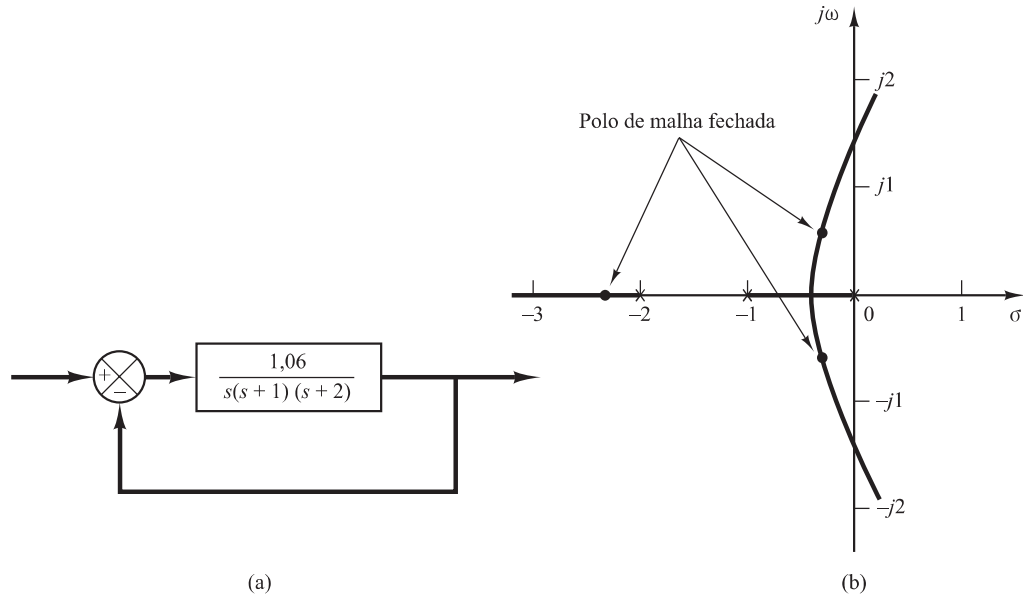


Exemplo 6.7 Considere o sistema mostrado na Figura 6.48(a). A função de transferência do ramo direto é:

$$G(s) = \frac{1,06}{s(s + 1)(s + 2)}$$

FIGURA 6.48

(a) Sistema de controle;
(b) gráfico do lugar das raízes.



A Figura 6.48(b) mostra o gráfico do lugar das raízes do sistema. A função de transferência de malha fechada é:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{1,06}{s(s+1)(s+2) + 1,06} \\ &= \frac{1,06}{(s + 0,3307 - j0,5864)(s + 0,3307 + j0,5864)(s + 2,3386)} \end{aligned}$$

Os polos dominantes de malha fechada são:

$$s = -0,3307 \pm j0,5864$$

O coeficiente de amortecimento dos polos dominantes de malha fechada é $\zeta = 0,491$. A frequência natural não amortecida dos polos de malha fechada dominantes é $0,673$ rad/s. A constante de erro estático de velocidade é $0,53$ s⁻¹.

É desejável aumentar a constante de erro estático de velocidade K_v para aproximadamente 5 s⁻¹, sem que haja modificação significativa na posição dos polos dominantes de malha fechada.

Para atender a essa especificação, vamos inserir um compensador por atraso de fase em cascata com a função de transferência de ramo direto, de acordo com a Equação 6.19. Para aumentar a constante de erro estático de velocidade por um fator em torno de 10, escolhemos $\beta = 10$ e posicionamos o zero e o polo do compensador por atraso de fase em $s = -0,05$ e $s = -0,005$, respectivamente. A função de transferência do compensador por atraso de fase vem a ser:

$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + 0,05}{s + 0,005}$$

A contribuição angular dessa rede de atraso de fase próxima de um polo de malha fechada dominante é de aproximadamente 4° . Pelo fato de essa contribuição angular não ser muito pequena, existe uma ligeira alteração no novo lugar das raízes, próximo aos polos dominantes de malha fechada desejados.

A função de transferência de malha aberta do sistema compensado torna-se:

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s) &= \hat{K}_c \frac{s + 0,05}{s + 0,005} \frac{1,06}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{K(s + 0,05)}{s(s + 0,005)(s + 1)(s + 2)} \end{aligned}$$

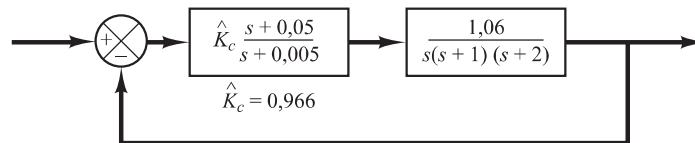
onde

$$K = 1,06\hat{K}_c$$

A Figura 6.49 mostra o gráfico de blocos do sistema compensado. A Figura 6.50(a) exibe o gráfico do lugar das raízes do sistema compensado próximo dos polos dominantes de malha fechada e inclui também o gráfico do lugar das raízes do sistema original. A Figura 6.50 (b) expõe o gráfico do lugar das raízes do sistema compensado próximo à origem. O Programa 6.11 em MATLAB gera os gráficos do lugar das raízes mostrados pelas figuras 6.50 (a) e (b).

FIGURA 6.49

Sistema compensado.



Programa 6.11 em MATLAB

```
% ***** Gráficos de lugar das raízes dos sistemas compensado e
% não compensado *****

% ***** Digite os numeradores e denominadores dos
% sistemas compensado e não compensado *****

numc = [1 0.05];
denc = [1 3.005 2.015 0.01 0];
num = [1.06];
den = [1 3 2 0];

% ***** Digite o comando rlocus. Esboce o gráfico do lugar das raízes
% de ambos os sistemas *****

rlocus(numc,denc)
hold
Current plot held
rlocus(num,den)
v = [-3 1 -2 2]; axis(v); axis('square')
grid
text(-2.8,0.2,'Sistema compensado')
text(-2.8,1.2,'Sistema não compensado')
text(-2.8,0.58,'Polo de malha fechada original')
text(-0.1,0.85,'Novo polo de')
text(-0.1,0.62,'malha fechada')
title('Gráficos do lugar das raízes dos sistemas compensado e não compensado')

hold
Current plot released

% ***** Trace o gráfico do lugar das raízes do sistema compensado
% próximo da origem *****

rlocus(numc,denc)
v = [-0.6 0.6 -0.6 0.6]; axis(v); axis('square')
grid
title('Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado próximo da origem')
```

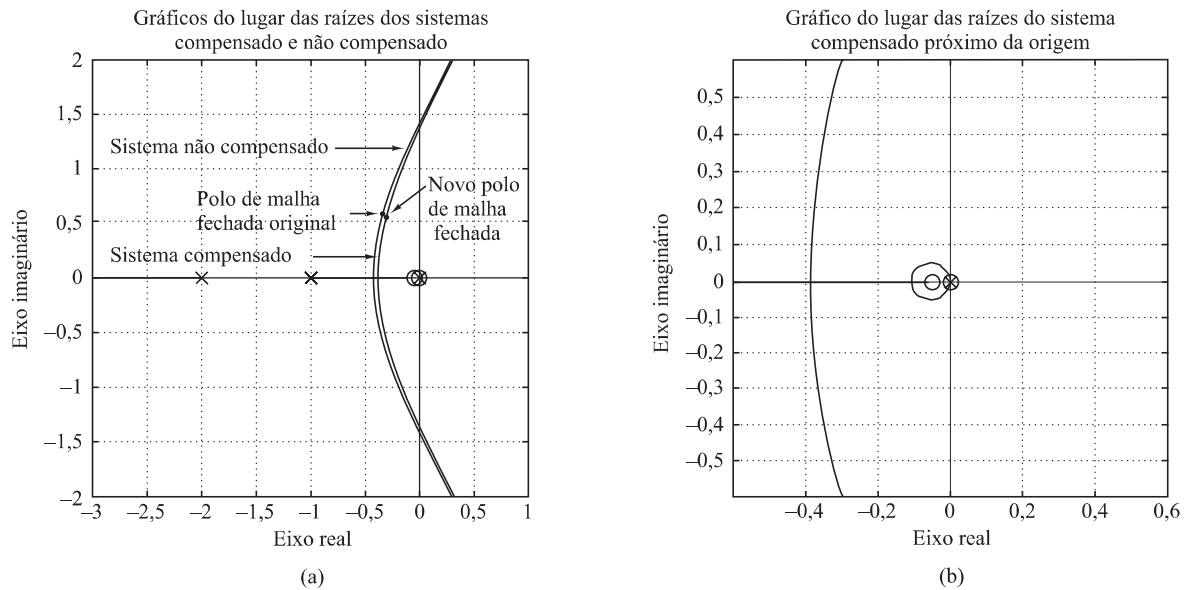
Se o coeficiente de amortecimento dos novos polos dominantes de malha fechada permanecer o mesmo, então os polos serão obtidos a partir do novo gráfico do lugar das raízes como segue:

$$s_1 = -0,31 + j0,55, \quad s_2 = -0,31 - j0,55$$

O ganho de malha aberta K é determinado a partir da condição de módulo como segue:

FIGURA 6.50

(a) Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado e do sistema não compensado;
 (b) gráfico do lugar das raízes do sistema compensado próximo da origem.



$$K = \left| \frac{s(s + 0,005)(s + 1)(s + 2)}{s + 0,05} \right|_{s = -0,31 + j0,55}$$

$$= 1,0235$$

Então, o ganho do compensador por atraso de fase \hat{K}_c é determinado como:

$$\hat{K}_c = \frac{K}{1,06} = \frac{1,0235}{1,06} = 0,9656$$

Assim, a função de transferência do compensador por atraso de fase projetado é:

$$G_c(s) = 0,9656 \frac{s + 0,05}{s + 0,005} = 9,656 \frac{20s + 1}{200s + 1} \quad (6.20)$$

Portanto, o sistema compensado tem a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G_1(s) = \frac{1,0235(s + 0,05)}{s(s + 0,005)(s + 1)(s + 2)}$$

$$= \frac{5,12(20s + 1)}{s(200s + 1)(s + 1)(0,5s + 1)}$$

A constante de erro estático de velocidade K_v é:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = 5,12 \text{ s}^{-1}$$

No sistema compensado, a constante de erro estático de velocidade aumentou para $5,12 \text{ s}^{-1}$ ou $5,12/0,53 = 9,66$ vezes o valor original. (O erro estacionário a uma excitação em rampa decresceu para cerca de 10% do valor do erro do sistema original.) Assim, o objetivo principal do projeto de aumentar a constante de erro estático para aproximadamente 5 s^{-1} foi essencialmente alcançado.

Note que, como o polo e o zero do compensador por atraso de fase estão muito próximos entre si e posicionados muito perto da origem, o efeito sobre a forma do lugar das raízes original

é pequeno. Exceto pela presença de uma pequena região do lugar das raízes próxima à origem, os lugares das raízes dos sistemas não compensado e compensado serão muito semelhantes. Entretanto, o valor da constante de erro estático de velocidade do sistema compensado é 9,66 vezes maior que o do sistema não compensado.

Os outros dois polos de malha fechada do sistema compensado são encontrados em:

$$s_3 = -2,326, \quad s_4 = -0,0549$$

A inserção do compensador por atraso de fase aumenta a ordem do sistema de 3 para 4, acrescentando um polo adicional de malha fechada próximo do zero do compensador de atraso de fase. (O polo de malha fechada adicionado em $s = -0,0549$ fica próximo de zero em $s = -0,05$.) Esse par de zero e polo produz uma ‘cauda’ longa, de pequena amplitude na resposta transitória, como será visto adiante na resposta ao degrau unitário. Como o polo em $s = -2,326$ está muito distante do eixo $j\omega$ em comparação com os polos dominantes de malha fechada, o efeito desse polo sobre a resposta transitória também é pequeno. Por essa razão, pode-se considerar os polos em $s = -0,31 \pm j0,55$ como os polos dominantes de malha fechada.

A frequência natural não amortecida dos polos dominantes de malha fechada do sistema compensado é 0,631 rad/s. Esse valor é aproximadamente 6% menor que o valor original, 0,673 rad/s. Isso implica que a resposta transitória do sistema compensado fica mais lenta que a resposta do sistema original. A resposta levará mais tempo para se acomodar. O máximo sobressinal na resposta ao degrau será maior no sistema compensado. Se esses efeitos adversos puderem ser tolerados, a compensação por atraso de fase que foi discutida aqui se apresentará como uma solução satisfatória para esse problema de projeto.

Em seguida, vamos comparar as respostas a uma rampa unitária do sistema compensado com a do sistema não compensado e verificar que o desempenho em regime permanente é muito melhor no sistema compensado do que no não compensado.

Para obter a resposta a uma rampa unitária com o MATLAB, utilizamos o comando `step` para o sistema $C(s)/[sR(s)]$. Como $C(s)/[sR(s)]$ para o sistema compensado é:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{sR(s)} &= \frac{1,0235(s + 0,05)}{s[s(s + 0,005)(s + 1)(s + 2) + 1,0235(s + 0,05)]} \\ &= \frac{1,0235s + 0,0512}{s^5 + 3,005s^4 + 2,015s^3 + 1,0335s^2 + 0,0512s} \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} \text{numc} &= [1,0235 \quad 0,0512] \\ \text{denc} &= [1 \quad 3,005 \quad 2,015 \quad 1,0335 \quad 0,0512 \quad 0] \end{aligned}$$

Além disso, $C(s)/[sR(s)]$ para o sistema não compensado é:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{sR(s)} &= \frac{1,06}{s[s(s + 1)(s + 2) + 1,06]} \\ &= \frac{1,06}{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 1,06s} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{num} &= [1,06] \\ \text{den} &= [1 \quad 3 \quad 2 \quad 1,06 \quad 0] \end{aligned}$$

O Programa 6.12 em MATLAB produz o gráfico das curvas de resposta a uma rampa unitária. A Figura 6.51 mostra o resultado. Fica claro que o sistema compensado apresenta um erro estacionário muito menor (um décimo do erro estacionário do original) ao seguir uma entrada em rampa unitária.

Programa 6.12 em MATLAB

```

% ***** Respostas à rampa unitária dos sistemas compensado e
% não compensado *****

% ***** A resposta à rampa unitária será obtida como a resposta ao
% degrau unitário do sistema C(s)/[sR(s)] *****
% ***** Digite os numeradores e denominadores de C1(s)/[sR(s)]
% e C2(s)/[sR(s)], onde C1(s) e C2(s) são transformados em Laplace
% dos sinais de saída dos sistemas compensado e não compensado,
% respectivamente. *****

numc = [1.0235 0.0512];
denc = [1 3.005 2.015 1.0335 0.0512 0];
num = [1.06];
den = [1 3 2 1.06 0];

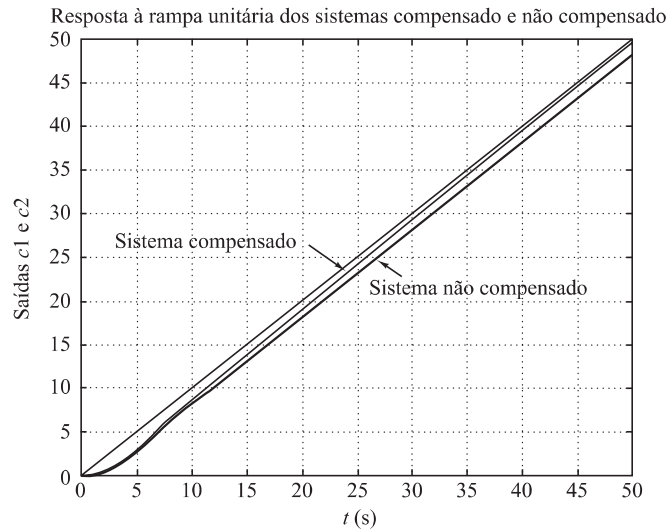
% ***** Especifique o intervalo de tempo (tal como t= 0:0.1:50) e
% digite o comando step e o comando plot. *****

t = 0:0.1:50;
c1 = step(numc,denc,t);
c2 = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,t,'--')
grid
text(2.2,27,'Sistema compensado');
text(26,21.3,'Sistema não compensado');
title('Respostas à rampa unitária dos sistemas compensado e não compensado')
xlabel('t (s)');
ylabel('Saídas c1 e c2')

```

FIGURA 6.51

Resposta dos sistemas compensado e não compensado a uma entrada em rampa. (O compensador é dado pela Equação 6.20.)



O Programa 6.13 em MATLAB fornece as curvas de resposta ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado. A Figura 6.52 mostra as curvas de resposta ao degrau unitário desses sistemas. Note que o sistema compensado por atraso de fase apresenta um máximo sobressinal maior e uma resposta mais lenta que o sistema original não compensado. Observe que um par constituído por um polo em $s = -0,0549$ e um zero em $s = -0,05$ gera uma cauda de pequena amplitude e longa duração na resposta transitória. Se o valor mais alto do máximo sobressinal e a resposta mais lenta não forem desejados, torna-se necessário utilizar um compensador por atraso e avanço de fase, como apresentado na Seção 6.8.

Programa 6.13 em MATLAB

```

% ***** Respostas ao degrau unitário dos sistemas compensado e
% não compensado *****

% ***** Digite os numeradores o denominadores dos sistemas compensado e
% não compensado *****

numc = [1.0235 0.0512];
denc = [1 3.005 2.015 1.0335 0.0512];
num = [1.06];
den = [1 3 2 1.06];

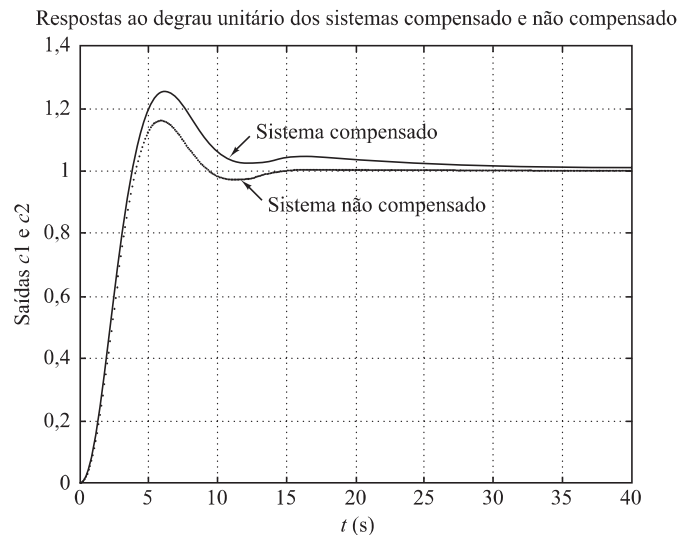
% ***** Especifique o intervalo de tempo (tal como t = 0:0.1:40) e
% digite o comando step e o comando plot. *****

t = 0:0.1:40;
c1 = step(numc,denc,t);
c2 = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.')
grid
text(13,1.12,'Sistema compensado')
text(13.6,0.88,'Sistema não compensado')
title('Respostas ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado')
xlabel('t (s)')
ylabel('Saídas c1 e c2')

```

FIGURA 6.52

Respostas ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado. (O compensador é dado pela Equação 6.20.)



Comentários. Entretanto, deve-se observar que, em certas circunstâncias, tanto o compensador por avanço de fase como o compensador por atraso de fase podem satisfazer às especificações dadas (tanto as especificações da resposta transitória como as de regime permanente). Assim, ambas as formas de compensação podem ser utilizadas.

6.8 | Compensação por atraso e avanço de fase

A compensação por avanço de fase basicamente aumenta tanto a velocidade de resposta como a estabilidade do sistema. A compensação por atraso de fase melhora a precisão do sistema em regime permanente, mas reduz a velocidade de resposta.

Se for desejado melhorar não só a resposta transitória, mas também a resposta em regime permanente, pode-se utilizar simultaneamente o compensador por avanço de fase e o compensador por atraso de fase. No entanto, em vez de inserir os compensadores por avanço de fase e por atraso de fase como elementos separados, é econômico utilizar um único compensador por atraso e avanço de fase.

O compensador por atraso e avanço de fase combina as vantagens da compensação por atraso de fase e por avanço de fase. Como o compensador por atraso e avanço de fase possui dois polos e dois zeros, essa compensação aumenta a ordem do sistema em duas unidades, a menos que ocorra o cancelamento de polo(s) e zero(s) no sistema compensado.

Compensador eletrônico por atraso e avanço de fase com a utilização de amplificadores operacionais. A Figura 6.53 mostra um compensador eletrônico por atraso e avanço de fase com a utilização de amplificadores operacionais. A função de transferência desse compensador pode ser obtida como segue: a impedância complexa Z_1 é dada por:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} + \frac{1}{R_3}$$

ou

$$Z_1 = \frac{(R_1 C_1 s + 1)R_3}{(R_1 + R_3)C_1 s + 1}$$

Da mesma maneira, a impedância complexa Z_2 é dada por:

$$Z_2 = \frac{(R_2 C_2 s + 1)R_4}{(R_2 + R_4)C_2 s + 1}$$

Tem-se, então,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_4}{R_3} \frac{(R_1 + R_3)C_1 s + 1}{R_1 C_1 s + 1} \cdot \frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_2 + R_4)C_2 s + 1}$$

A função de transferência do inversor de sinal é:

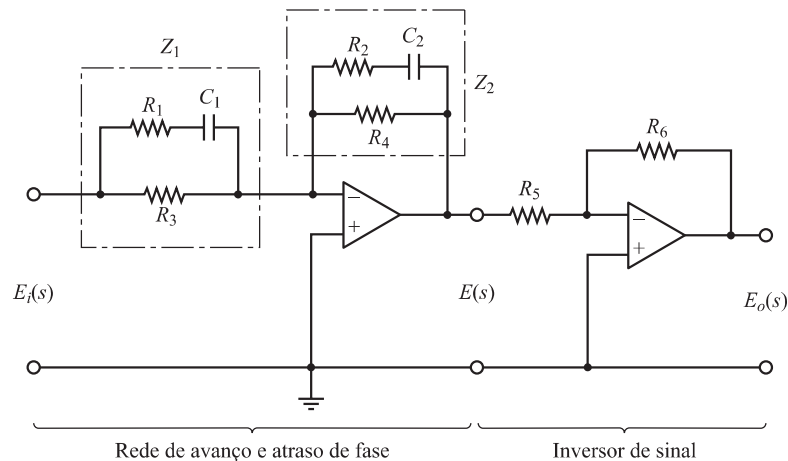
$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_6}{R_5}$$

Assim, a função de transferência do compensador mostrado na Figura 6.53 é:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 R_6}{R_3 R_5} \left[\frac{(R_1 + R_3)C_1 s + 1}{R_1 C_1 s + 1} \right] \left[\frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_2 + R_4)C_2 s + 1} \right] \quad (6.21)$$

FIGURA 6.53

Compensador por avanço e atraso de fase.



Vamos definir:

$$T_1 = (R_1 + R_3)C_1, \quad \frac{T_1}{\gamma} = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad \beta T_2 = (R_2 + C_4)C_2$$

A Equação 6.21 torna-se:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_c \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\gamma} s + 1} \right) \left(\frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \right) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right)}{\left(s + \frac{\gamma}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2} \right)} \quad (6.22)$$

onde

$$\gamma = \frac{R_1 + R_3}{R_1} > 1, \quad \beta = \frac{R_2 + R_4}{R_2} > 1, \quad K_c = \frac{R_2 R_4 R_6}{R_1 R_3 R_5} \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4}$$

Observe que γ é frequentemente escolhido como igual a β .

Técnicas de compensação por atraso e avanço de fase baseadas no método do lugar das raízes. Considere o sistema mostrado na Figura 6.54. Suponha que tenha sido utilizado o compensador por atraso e avanço de fase:

$$G_c(s) = K_c \frac{\beta}{\gamma} \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma} s + 1 \right) (\beta T_2 s + 1)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right)}{\left(s + \frac{\gamma}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2} \right)} \quad (6.23)$$

onde $\beta > 1$ e $\gamma > 1$. (Considere K_c pertencente à porção de avanço de fase do compensador por atraso e avanço de fase.)

No projeto de compensadores por atraso e avanço de fase, consideram-se dois casos: $\gamma \neq \beta$ e $\gamma = \beta$.

Caso 1. $\gamma \neq \beta$. Nesse caso, o procedimento de projeto é uma combinação de um projeto de compensador por avanço de fase e de um compensador por atraso de fase. O procedimento do projeto do compensador por atraso e avanço de fase é o seguinte:

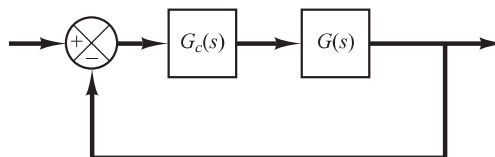
1. Com base nas especificações de desempenho dadas, determine a localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.
2. Utilizando a função de transferência de malha aberta $G(s)$ do sistema não compensado, determine a deficiência angular ϕ para que os polos dominantes de malha fechada estejam na posição desejada. A parte de avanço de fase do compensador por atraso e avanço de fase deve contribuir com esse ângulo ϕ .
3. Supondo que adiante será escolhido T_2 suficientemente alto para que o módulo da parte de atraso de fase

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right|$$

seja aproximadamente igual à unidade, onde $s = s_1$ é um dos polos dominantes de malha fechada, escolha os valores de T_1 e γ a partir do requisito

FIGURA 6.54

Sistema de controle.



$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\gamma}{T_1}} \right| = \phi$$

A escolha de T_1 e γ não é única. (Uma infinidade de pares de T_1 e γ é possível.) Então, determine o valor de K_c da condição de módulo

$$\left| K_c \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\gamma}{T_1}} G(s_1) \right| = 1$$

4. Se a constante de erro estático de velocidade K_v for especificada, determine o valor de β que satisfaça esse requisito para K_v . A constante de erro estático de velocidade K_v é dada por:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \frac{\beta}{\gamma} G(s) \end{aligned}$$

onde K_c e γ já foram determinados no passo 3. Assim, dado o valor de K_v , pode-se determinar o valor de β com base nessa última equação. Então, utilizando o valor de β assim determinado, escolha o valor de T_2 tal que

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1$$

$$-5^\circ < \left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| < 0^\circ$$

(O Exemplo 6.8 ilustra o procedimento de projeto apresentado.)

Caso 2. $\gamma = \beta$. Se for requerido que $\gamma = \beta$ na Equação 6.23, então o procedimento de projeto para o compensador por atraso e avanço de fase pode ser modificado como segue:

1. Com base nas especificações de desempenho dadas, determine a posição desejada dos polos dominantes de malha fechada.
2. O compensador por atraso e avanço de fase, dado pela Equação 6.23, é modificado para:

$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \quad (6.24)$$

onde $\beta > 1$. A função de transferência de malha aberta do sistema compensado é $G_c(s)G(s)$. Se a constante de erro estático de velocidade K_v for especificada, determine o valor do coeficiente K_c a partir da seguinte equação:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s K_c G(s) \end{aligned}$$

3. Para obter a posição desejada dos polos dominantes de malha fechada, determine a contribuição angular ϕ que deve ser fornecida pela porção de avanço de fase do compensador de atraso e avanço de fase.
4. Para o compensador por atraso e avanço de fase, será escolhido mais à frente um valor de T_2 suficientemente grande para que o módulo dado por:

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right|$$

seja aproximadamente igual à unidade, onde $s = s_1$ é um dos polos dominantes de malha fechada. Determine os valores de T_1 e β com base nas condições de módulo e de ângulo:

$$\left| K_c \left(\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_1}} \right) G(s_1) \right| = 1$$

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_1}} \right| = \phi$$

5. Utilizando o valor de β determinado, escolha o valor de T_2 para que:

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1$$

$$-5^\circ < \left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| < 0^\circ$$

O valor de βT_2 , a maior constante de tempo do compensador por atraso e avanço de fase, não deve ser muito grande, para que seja fisicamente realizável. (Um exemplo de projeto de compensador por atraso e avanço de fase com $\gamma = \beta$ é dado no Exemplo 6.9.)

Exemplo 6.8 Considere o sistema de controle mostrado na Figura 6.55. A função de transferência de ramo direto é:

$$G(s) = \frac{4}{s(s + 0,5)}$$

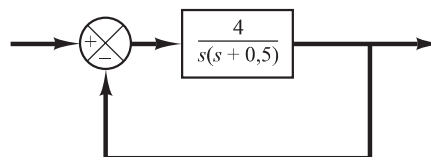
Esse sistema possui polos de malha fechada em

$$s = -0,2500 \pm j1,9843$$

O coeficiente de amortecimento é 0,125, a frequência natural não amortecida é 2 rad/s e a constante de erro estático de velocidade é 8 s⁻¹.

É desejável tornar o coeficiente de amortecimento dos polos dominantes de malha fechada igual a 0,5 e aumentar a frequência natural não amortecida para 5 rad/s e a constante de erro

FIGURA 6.55
Sistema de controle.



estático de velocidade para 80 s^{-1} . Projete um compensador apropriado para atender a todas as especificações de desempenho.

Vamos supor que seja utilizado um compensador por atraso e avanço de fase com a função de transferência

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \quad (\gamma > 1, \beta > 1)$$

onde γ é diferente de β . Então, a função de transferência em malha aberta do sistema compensado será:

$$G_c(s)G(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) G(s)$$

A partir das especificações de desempenho, os polos dominantes de malha fechada devem situar-se em

$$s = -2,50 \pm j4,33$$

Como

$$\left/ \frac{4}{s(s + 0,5)} \right|_{s = -2,50 + j4,33} = -235^\circ$$

a parte relativa ao avanço de fase do compensador por atraso e avanço de fase deve contribuir com 55° , de modo que o lugar das raízes passe pela localização desejada dos polos dominantes de malha fechada.

No projeto da parte de avanço de fase do compensador, primeiro são determinadas as posições do zero e do polo que fornecerão a contribuição de 55° . Existem muitas possibilidades de escolha, mas aqui foi adotado o zero em $s = -0,5$ de maneira que cancele o polo da planta em $s = -0,5$. Uma vez escolhido o zero, o polo pode ser localizado de modo que a contribuição angular seja 55° . Por um cálculo simples ou por meio de análise gráfica, verifica-se que o polo deve situar-se em $s = -5,021$. Assim, a parte relativa ao avanço de fase do compensador será:

$$K_c \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} = K_c \frac{s + 0,5}{s + 5,02}$$

Assim,

$$T_1 = 2, \quad \gamma = \frac{5,02}{0,5} = 10,04$$

Em seguida, determine o valor de K_c com base na condição de módulo:

$$\left| K_c \frac{s + 0,5}{s + 5,02} \frac{4}{s(s + 0,5)} \right|_{s = -2,5 + j4,33} = 1$$

Então,

$$K_c \left| \frac{(s + 5,02)s}{4} \right|_{s = -2,5 + j4,33} = 6,26$$

A parte de atraso de fase do compensador pode ser projetada como segue: primeiro, determina-se o valor de β para satisfazer o requisito da constante de erro estático de velocidade:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \frac{\beta}{\gamma} G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s (6,26) \frac{\beta}{10,04} \frac{4}{s(s + 0,5)} = 4,988\beta = 80 \end{aligned}$$

Então, β é determinado como:

$$\beta = 16,04$$

Por fim, escolhe-se um valor de T_2 tal que satisfaça as duas condições a seguir:

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{16,04T_2}} \right|_{s = -2,50 + j4,33} \doteq 1, \quad -5^\circ < \angle \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{16,04T_2}} \Big|_{s = -2,50 + j4,33} < 0^\circ$$

Podemos escolher vários valores para T_2 e verificar se as condições de módulo e angular são satisfeitas. Com cálculos simples, chegamos a $T_2 = 5$.

$$1 > \text{módulo} > 0,98, \quad -2,10^\circ < \text{ângulo} < 0^\circ$$

Como $T_2 = 5$ satisfaz as duas condições, podemos escolher

$$T_2 = 5$$

Agora, a função de transferência do compensador por atraso e avanço de fase projetado é dada por:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= (6,26) \left(\frac{s + \frac{1}{2}}{s + \frac{10,04}{2}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{5}}{s + \frac{1}{16,04 \times 5}} \right) \\ &= 6,26 \left(\frac{s + 0,5}{s + 5,02} \right) \left(\frac{s + 0,2}{s + 0,01247} \right) \\ &= \frac{10(2s + 1)(5s + 1)}{(0,1992s + 1)(80,19s + 1)} \end{aligned}$$

O sistema compensado terá a função de transferência de malha aberta:

$$G_c(s)G(s) = \frac{25,04(s + 0,2)}{s(s + 5,02)(s + 0,01247)}$$

Em virtude do cancelamento dos termos $(s + 0,5)$, o sistema compensado é de terceira ordem. (Matematicamente, esse cancelamento é exato, mas na prática ele não é exato porque a dedução do modelo matemático do sistema envolve, em geral, algumas aproximações e, como resultado, as constantes de tempo não são precisas.) O gráfico do lugar das raízes do sistema compensado é mostrado na Figura 6.56(a). Uma visão aumentada do gráfico do lugar das raízes próximo à origem é mostrada na Figura 6.56(b). Pelo fato de a contribuição angular da parte de atraso de fase do compensador de atraso e avanço de fase ser muito pequena, há apenas um pequeno deslocamento da posição desejada, $s = -2,5 \pm j4,33$. A equação característica para o sistema compensado é:

$$s(s + 5,02)(s + 0,01247) + 25,04(s + 0,2) = 0$$

ou

$$\begin{aligned} &s^3 + 5,0325s^2 + 25,1026s + 5,008 \\ &= (s + 2,4123 + j4,2756)(s + 2,4123 - j4,2756)(s + 0,2078) = 0 \end{aligned}$$

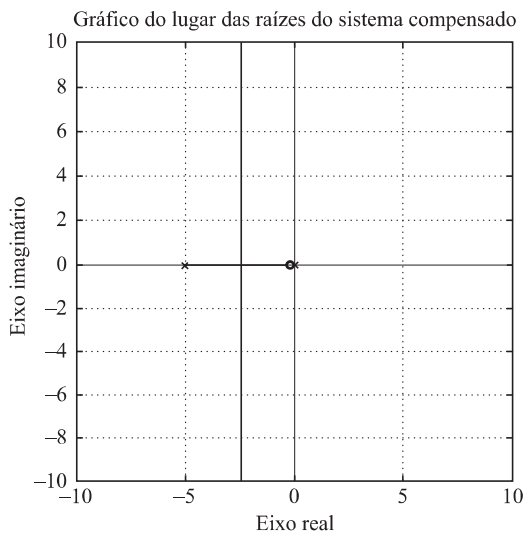
Então, os novos polos de malha fechada ficam localizados em

$$s = -2,4123 \pm j4,2756$$

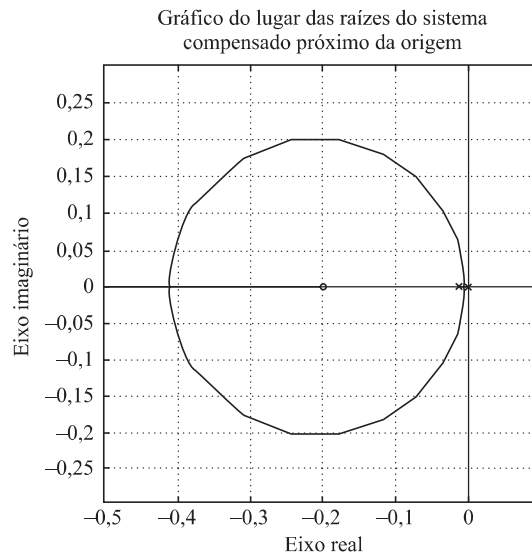
O novo coeficiente de amortecimento é $\zeta = 0,491$. Portanto, o sistema compensado atende a todas as especificações de desempenho requeridas. O terceiro polo de malha fechada do sistema compensado está localizado em $s = -0,2078$. Como esse polo está muito próximo do zero situado em $s = -0,2$, o efeito desse polo na resposta é pequeno. (Note que, em geral, se um polo e um zero estiverem situados próximos um do outro, sobre o semieixo real negativo e próximo à origem, então essa combinação de polo e zero produzirá uma espécie de cauda alongada de pequena amplitude na resposta transitória.)

FIGURA 6.56

(a) Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado;
 (b) gráfico do lugar das raízes próximo da origem.



(a)

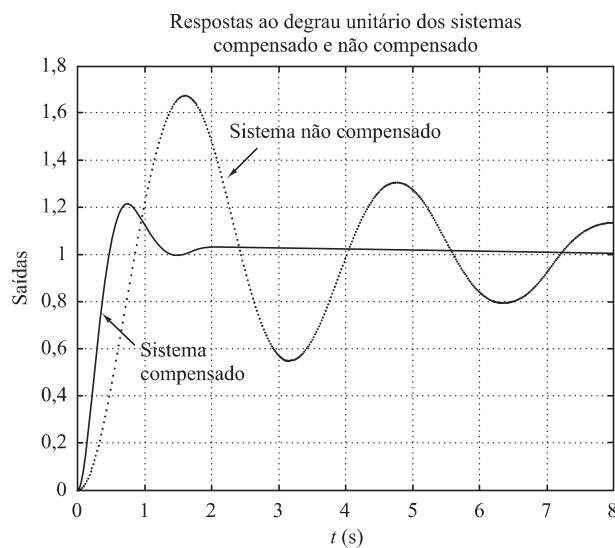


(b)

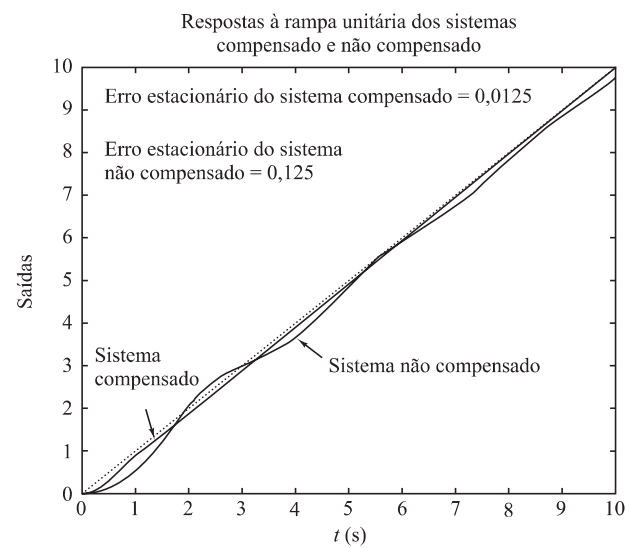
As curvas de resposta ao degrau unitário e as curvas de resposta à rampa unitária, antes e depois da compensação, são mostradas na Figura 6.57. (Observe que há uma longa 'cauda' de baixa amplitude na resposta ao degrau unitário do sistema compensado.)

FIGURA 6.57

Curvas da resposta transitória dos sistemas compensado e não compensado. (a) Curvas de resposta ao degrau unitário;
 (b) curvas de resposta à rampa unitária.



(a)



(b)

Exemplo 6.9 Considere novamente o sistema de controle do Exemplo 6.8. Suponha que seja utilizado um compensador por atraso e avanço de fase, na forma dada pela Equação 6.24 ou

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \quad (\beta > 1)$$

Supondo que as especificações sejam as mesmas dadas no Exemplo 6.8, projete um compensador $G_c(s)$.

As localizações desejadas para os polos dominantes de malha fechada são:

$$s = -2,50 \pm j4,33$$

A função de transferência de malha aberta do sistema compensado é:

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \cdot \frac{4}{s(s + 0,5)}$$

Como o requisito da constante de erro estático de velocidade K_v é 80 s^{-1} , temos:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K_c \frac{4}{0,5} = 8K_c = 80$$

Portanto,

$$K_c = 10$$

A constante de tempo T_1 e o valor de β são determinados a partir de:

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} \left| \frac{40}{s(s + 0,5)} \right|_{s = -2,5 + j4,33} = \left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} \frac{8}{4,77} = 1$$

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s = -2,5 + j4,33} = 55^\circ$$

(A deficiência angular de 55° foi obtida no Exemplo 6.8.) Com base na Figura 6.58, podemos localizar facilmente os pontos A e B , tais que

$$\angle APB = 55^\circ, \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{4,77}{8}$$

(Utilize abordagem gráfica ou trigonométrica.) O resultado é:

$$\overline{AO} = 2,38, \quad \overline{BO} = 8,34$$

ou

$$T_1 = \frac{1}{2,38} = 0,420, \quad \beta = 8,34T_1 = 3,503$$

A parte relativa ao avanço de fase da rede de atraso e avanço de fase torna-se, então,

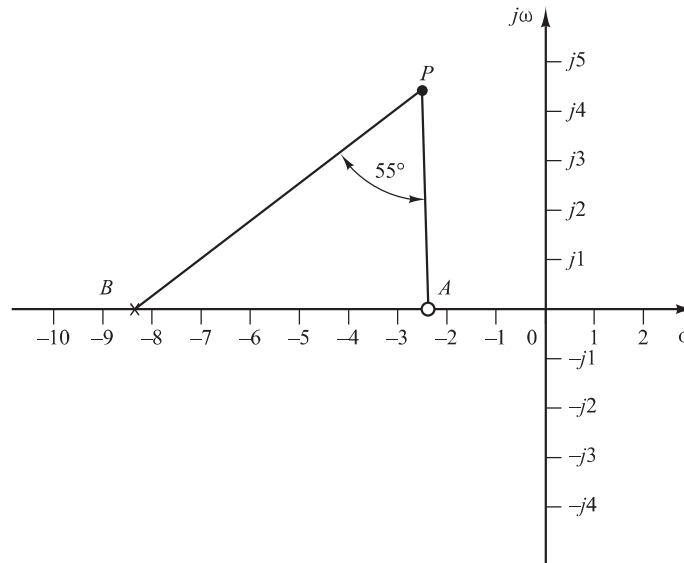
$$10 \left(\frac{s + 2,38}{s + 8,34} \right)$$

Para a porção relativa ao atraso de fase, podemos escolher T_2 de forma que satisfaça às condições:

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{3,503T_2}} \right|_{s = -2,50 + j4,33} \doteq 1, \quad -5^\circ < \left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{3,503T_2}} \right|_{s = -2,50 + j4,33} < 0^\circ$$

FIGURA 6.58

Determinação da localização desejada do polo e do zero.



Com cálculos simples, constatamos que $T_2 = 5$, então

$$1 > \text{módulo} > 0,98, \quad -1,5^\circ < \text{ângulo} < 0^\circ$$

e se escolhermos $T_2 = 10$, temos

$$1 > \text{módulo} > 0,99, \quad -1^\circ < \text{ângulo} < 0^\circ$$

Como T_2 é uma das constantes de tempo do compensador por atraso e avanço de fase, não deve ser muito grande. Se $T_2 = 10$ for aceitável do ponto de vista prático, podemos escolher $T_2 = 10$. Então

$$\frac{1}{\beta T_2} = \frac{1}{3,503 \times 10} = 0,0285$$

Assim, o compensador por atraso e avanço de fase torna-se:

$$G_c(s) = (10) \left(\frac{s + 2,38}{s + 8,34} \right) \left(\frac{s + 0,1}{s + 0,0285} \right)$$

O sistema compensado terá a função de transferência de malha aberta

$$G_c(s)G(s) = \frac{40(s + 2,38)(s + 0,1)}{(s + 8,34)(s + 0,0285)s(s + 0,5)}$$

Nenhum cancelamento ocorre nesse caso e o sistema compensado é de quarta ordem. Pelo fato de a contribuição angular da parte relativa ao atraso de fase da rede de atraso e avanço ser muito pequena, os polos dominantes de malha fechada ficam muito próximos da localização desejada. De fato, a localização dos polos dominantes de malha fechada pode ser encontrada a partir da seguinte equação característica: a equação característica do sistema compensado é

$$(s + 8,34)(s + 0,0285)s(s + 0,5) + 40(s + 2,38)(s + 0,1) = 0$$

que pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} s^4 + 8,8685s^3 + 44,4219s^2 + 99,3188s + 9,52 \\ = (s + 2,4539 + j4,3099)(s + 2,4539 - j4,3099)(s + 0,1003)(s + 3,8604) = 0 \end{aligned}$$

Os polos dominantes de malha fechada estão localizados em:

$$s = -2,4539 \pm j4,3099$$

Os outros polos de malha fechada estão localizados em:

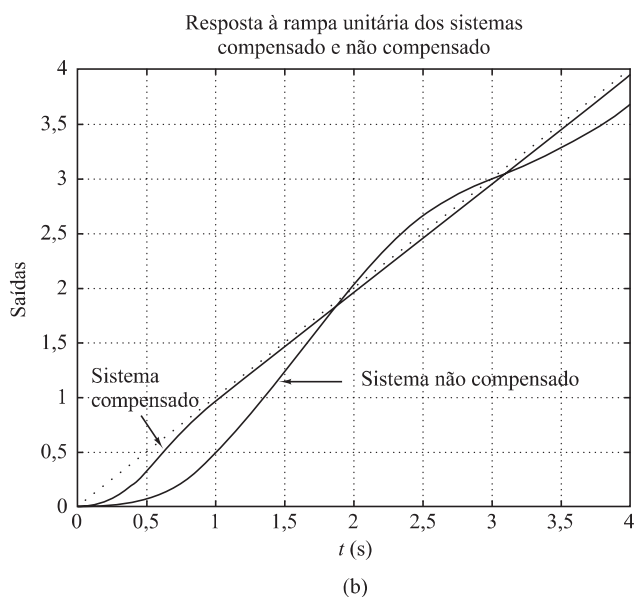
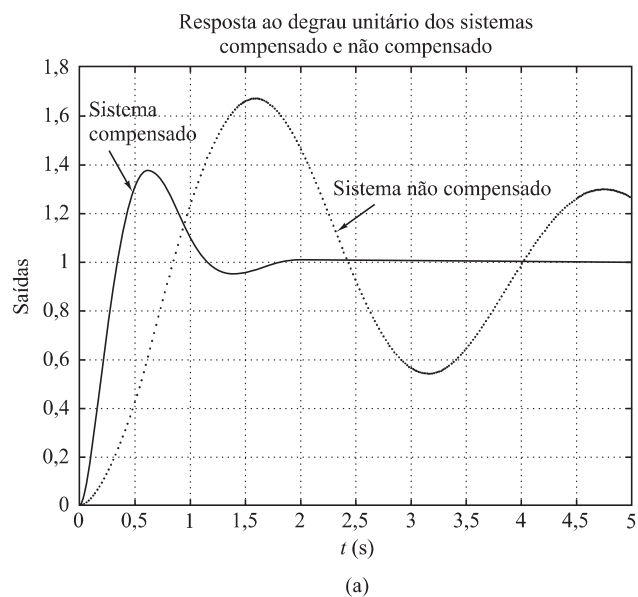
$$s = -0,1003; \quad s = -3,8604$$

Como o polo de malha fechada em $s = -0,1003$ está muito próximo de um zero em $s = -0,1$, eles quase se cancelam. Assim, o efeito desse polo de malha fechada é muito pequeno. O polo de malha fechada restante ($s = -3,8604$) não cancela completamente o zero em $s = -2,4$. O efeito desse zero é causar maior sobressinal na resposta ao degrau do que no caso de um sistema semelhante, mas sem esse zero. A Figura 6.59(a) mostra as curvas de resposta ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado. As curvas de resposta à rampa unitária de ambos os sistemas estão representadas na Figura 6.59(b).

O máximo sobressinal na resposta ao degrau do sistema compensado é aproximadamente 38%. (Este é bem mais elevado que o máximo sobressinal de 21% do projeto apresentado no Exemplo 6.8.) É possível reduzir o máximo sobressinal de um pequeno valor a partir de 38%, mas não para 20% se for requerido $\gamma = \beta$, como neste exemplo. Note que, por não se exigir $\gamma = \beta$, temos um parâmetro adicional a ser ajustado, o que permite reduzir o máximo sobressinal.

FIGURA 6.59

(a) Curvas de resposta ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado; (b) curvas de resposta à rampa unitária para ambos os sistemas.



6.9 | Compensação em paralelo

Foram apresentadas até aqui técnicas de compensação em série com a utilização de compensadores por avanço de fase, por atraso de fase ou por atraso e avanço de fase. Nesta seção discutiremos as técnicas de compensação em paralelo. Como no projeto de compensação em paralelo o controlador (ou compensador) fica na malha interna, o projeto pode parecer mais complicado que no caso da compensação em série. Entretanto, isso não acontecerá se a equação característica for reescrita de modo que fique com a mesma forma da equação característica do sistema compensado em série. Nesta seção, será apresentado um problema de projeto simples, que envolve compensação em paralelo.

Princípio básico de projeto de um sistema compensado em paralelo. Com base na Figura 6.60(a), a função de transferência de malha fechada do sistema com compensação em série é:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G}{1 + G_c G H}$$

A equação característica é:

$$1 + G_c G H = 0$$

Dados G e H , o problema de projeto vem a ser a determinação do compensador G_c que satisfaça às especificações dadas.

A função de transferência de malha fechada do sistema com compensação em paralelo [Figura 6.60(b)] é:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_c + G_1 G_2 H}$$

A equação característica é:

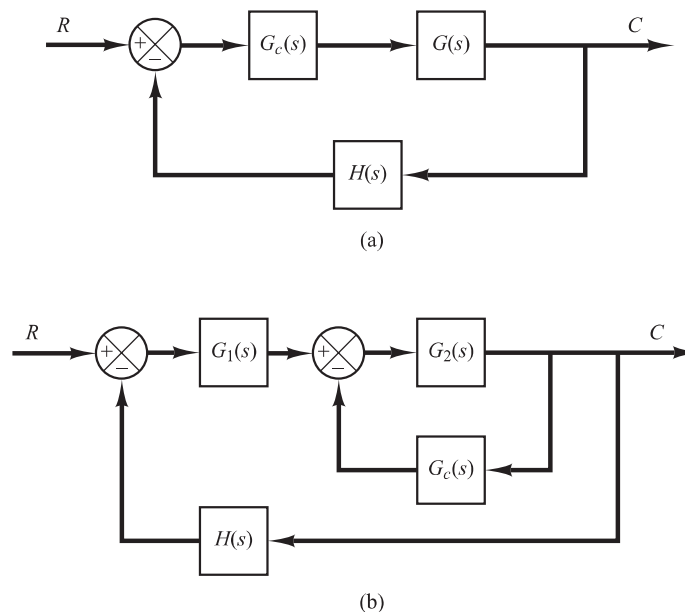
$$1 + G_1 G_2 H + G_2 G_c = 0$$

Dividindo essa equação característica pela soma dos termos que não contêm G_c , obtemos:

$$1 + \frac{G_c G_2}{1 + G_1 G_2 H} = 0 \quad (6.25)$$

FIGURA 6.60

(a) Compensação em série;
(b) compensação em paralelo ou por realimentação.



Se definirmos

$$G_f = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H}$$

a Equação 6.25 torna-se:

$$1 + G_c G_f = 0$$

Como G_f é uma função de transferência fixa, o projeto de G_c será o mesmo que no caso da compensação em série. Então, o mesmo método se aplica ao sistema com compensação em paralelo.

Sistemas com realimentação de velocidade. Um sistema com realimentação de velocidade (sistema com realimentação tacométrica) é um exemplo de sistema com compensação em paralelo. O controlador (ou compensador) nesse sistema é um elemento de ganho. O ganho do componente de realimentação na malha interna deve ser adequadamente determinado para que o sistema como um todo satisfaça às especificações de projeto dadas. A característica desse sistema com realimentação de velocidade é que o parâmetro variável não aparece como fator de multiplicação na função de transferência de malha aberta, de maneira que a aplicação direta da técnica de projeto pelo lugar das raízes não é possível. Entretanto, se a equação característica for reescrita de modo que o parâmetro variável apareça como um fator de multiplicação, então o projeto pelo método do lugar das raízes se tornará possível.

Um exemplo de projeto de sistema de controle que utiliza a técnica de compensação em paralelo é apresentado no Exemplo 6.10.

Exemplo 6.10 Considere o sistema mostrado na Figura 6.61. Desenhe o gráfico do lugar das raízes. Em seguida, determine o valor de k para que o coeficiente de amortecimento do polo dominante de malha fechada seja 0,4.

Aqui, o sistema envolve realimentação de velocidade. A função de transferência de malha aberta é:

$$\text{Função de transferência de malha aberta} = \frac{20}{s(s+1)(s+4) + 20ks}$$

Note que a variável ajustável k não aparece como um fator de multiplicação. A equação característica do sistema é:

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20ks + 20 = 0 \tag{6.26}$$

Definindo

$$20k = K$$

a Equação 6.26 torna-se

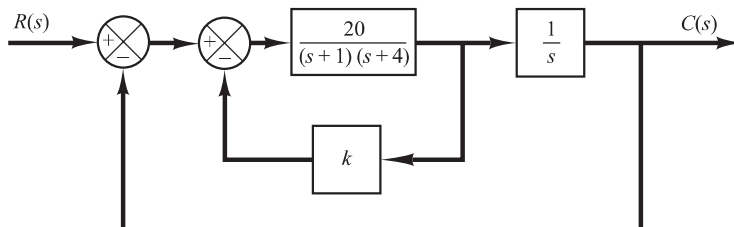
$$s^3 + 5s^2 + 4s + Ks + 20 = 0 \tag{6.27}$$

Dividindo ambos os lados da Equação 6.27 pela soma dos termos que não contêm K , obtém-se:

$$1 + \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = 0$$

ou

FIGURA 6.61
Sistema de controle.



$$1 + \frac{Ks}{(s+j2)(s-j2)(s+5)} = 0 \quad (6.28)$$

A Equação 6.28 tem a forma da Equação 6.11.

Vamos esboçar agora o lugar das raízes do sistema dado pela Equação 6.28. Note que os polos de malha aberta estão localizados em $s = j2$, $s = -j2$ e $s = -5$ e o zero de malha aberta está localizado em $s = 0$. O lugar das raízes existe sobre o eixo real, entre 0 e -5 . Como

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks}{(s+j2)(s-j2)(s+5)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^2}$$

temos

$$\text{Ângulos da assíntota} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{2} = \pm 90^\circ$$

A intersecção das assíntotas com o eixo real pode ser encontrada a partir de:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^2 + 5s + \dots} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{(s+2,5)^2}$$

como

$$s = -2,5$$

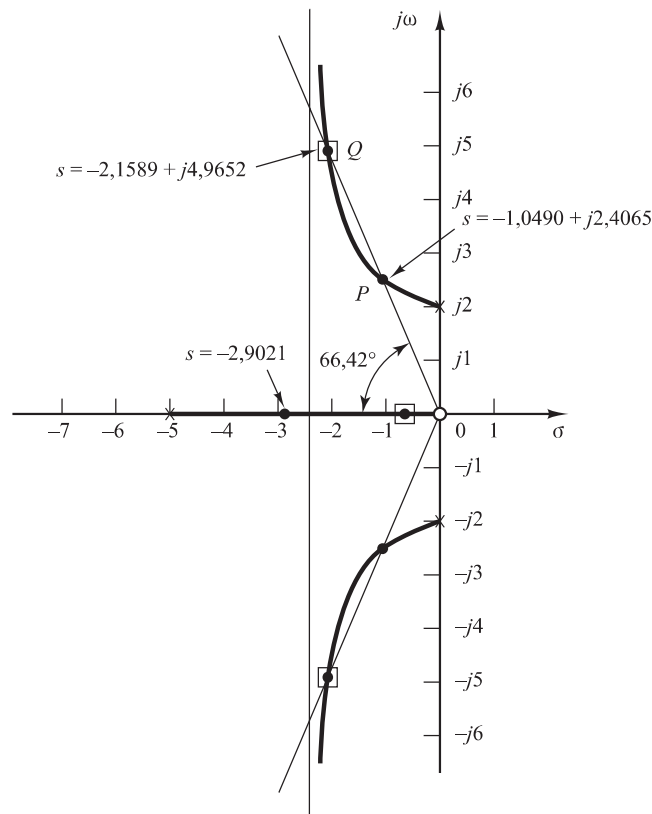
O ângulo de partida (ângulo θ) do polo em $s = j2$ é obtido como segue:

$$\theta = 180^\circ - 90^\circ - 21,8^\circ + 90^\circ = 158,2^\circ$$

Portanto, o ângulo de partida do polo $s = j2$ é $158,2^\circ$. A Figura 6.62 mostra o gráfico do lugar das raízes do sistema. Note que dois ramos do lugar das raízes têm origem nos polos em $s = \pm j2$ e terminam nos zeros no infinito. O ramo restante tem origem no polo em $s = -5$ e termina no zero em $s = 0$.

FIGURA 6.62

Gráfico do lugar das raízes do sistema mostrado na Figura 6.61.



Note que os polos de malha fechada com $\zeta = 0,4$ devem se situar sobre as retas que passam pela origem e formam os ângulos de $\pm 66,42^\circ$ com o semieixo real negativo. Nesse caso, existem duas intersecções do ramo do lugar das raízes no semiplano superior do plano s e a reta cujo ângulo é $66,42^\circ$. Portanto, dois valores de K vão fornecer o coeficiente de amortecimento dos polos de malha fechada $\zeta = 0,4$. No ponto P , o valor de K é:

$$K = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s = -1,0490 + j2,4065} = 8,9801$$

Consequentemente,

$$k = \frac{K}{20} = 0,4490 \quad \text{no ponto } P$$

No ponto Q , o valor de K é:

$$K = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s = -2,1589 + j4,9652} = 28,260$$

Consequentemente,

$$k = \frac{K}{20} = 1,4130 \quad \text{no ponto } Q$$

Assim, temos duas soluções para esse problema. Para $k = 0,4490$, os três polos de malha fechada estão localizados em:

$$s = -1,0490 + j2,4065, \quad s = -1,0490 - j2,4065, \quad s = -2,9021$$

Para $k = 1,4130$, os três polos de malha fechada estão localizados em:

$$s = -2,1589 + j4,9652, \quad s = -2,1589 - j4,9652, \quad s = -0,6823$$

É importante evidenciar que o zero na origem é o zero de malha aberta, mas não o zero de malha fechada. Isso fica claro porque o sistema original mostrado na Figura 6.61 não tem um zero de malha fechada, pois

$$\frac{G(s)}{R(s)} = \frac{20}{s(s + 1)(s + 4) + 20(1 + ks)}$$

O zero de malha aberta em $s = 0$ foi introduzido no processo de modificação da equação característica, de modo que a variável ajustável $K = 20k$ se apresentasse como fator de multiplicação.

Foram obtidos dois valores diferentes de k que satisfazem o requisito de ser o coeficiente de amortecimento dos polos dominantes de malha fechada igual a 0,4. A função de transferência de malha fechada com $k = 0,4490$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 12,98s + 20} \\ &= \frac{20}{(s + 1,0490 + j2,4065)(s + 1,0490 - j2,4065)(s + 2,9021)} \end{aligned}$$

A função de transferência de malha fechada com $k = 1,4130$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 32,26s + 20} \\ &= \frac{20}{(s + 2,1589 + j4,9652)(s + 2,1589 - j4,9652)(s + 0,6823)} \end{aligned}$$

Note que o sistema no qual $k = 0,4490$ tem um par de polos complexos conjugados dominantes de malha fechada, enquanto no sistema com $k = 1,4130$ o polo dominante de malha fechada em $s = -0,6823$ é real e os polos complexos conjugados de malha fechada não são dominantes. Nesse caso, a resposta característica é determinada essencialmente pelo polo real de malha fechada.

Vamos comparar as respostas ao degrau unitário de ambos os sistemas. O Programa 6.14 em MATLAB pode ser utilizado para traçar as curvas de resposta ao degrau unitário no mesmo diagrama. A Figura 6.63 mostra as curvas de resposta ao degrau unitário resultantes [$c_1(t)$ para $k = 0,4490$ e $c_2(t)$ para $k = 1,4130$].

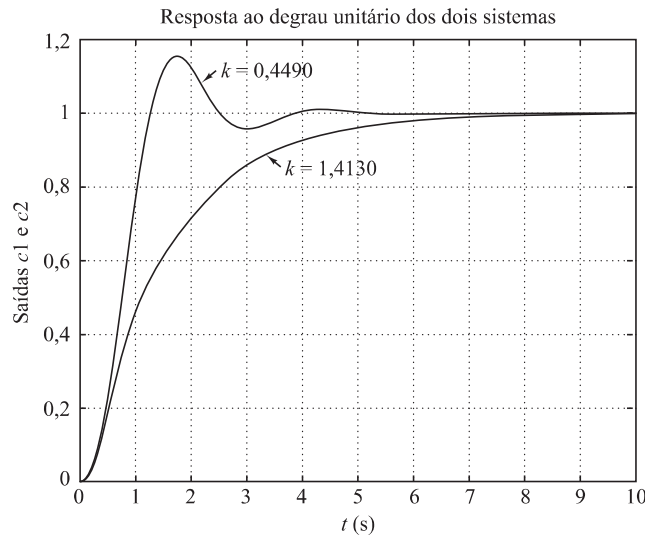
Programa 6.14 em MATLAB

```
% ----- Resposta ao degrau unitário -----
% ***** Digite os numeradores e denominadores dos sistemas com
% k = 0.4490 e k = 1.4130, respectivamente. *****

num1 = [20];
den1 = [1 5 12.98 20];
num2 = [20];
den2 = [1 5 32.26 20];
t = 0:0.1:10;
c1 = step(num1,den1,t);
c2 = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,t,c2)
text(2.5,1.12,'k = 0.4490')
text(3.7,0.85,'k = 1.4130')
grid
title('Respostas ao degrau unitário dos dois sistemas')
xlabel('t (s)')
ylabel('Saídas c1 e c2')
```

FIGURA 6.63

Curvas de resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Figura 6.61 para um coeficiente de amortecimento ζ dos polos dominantes de malha fechada igual a 0,4. (Dois valores possíveis de k resultam em um coeficiente de amortecimento ζ igual a 0,4.)



Na Figura 6.63, observamos que a resposta do sistema com $k = 0,4490$ é oscilatória. (O efeito do polo de malha fechada em $s = -2,9021$ sobre a resposta em degrau unitário é pequeno.) Para o sistema com $k = 1,4130$, as oscilações devidas aos polos de malha fechada em $s = -2,1589 \pm j4,9652$ são atenuadas mais rapidamente do que a resposta puramente exponencial devida somente ao polo de malha fechada em $s = -0,6823$.

O sistema com $k = 0,4490$ (que apresenta uma resposta mais rápida com um máximo sobresinal relativamente pequeno) tem uma característica de resposta bem melhor do que o sistema com $k = 1,4130$ (que apresenta uma resposta superamortecida lenta.) Portanto, pode-se escolher $k = 0,4490$ para o sistema em questão.

Exemplos de problemas com soluções

A.6.1 Desenhe o lugar das raízes do sistema mostrado da Figura 6.64(a). (Suponha que o ganho K seja positivo.) Observe que, para valores de K pequenos ou grandes, o sistema é superamortecido e, para valores médios de K , é subamortecido.

Solução. Eis o procedimento para traçar o gráfico do lugar das raízes:

1. Localize os polos e zeros de malha aberta no plano complexo. Existe o lugar das raízes no eixo real negativo entre 0 e -1 e entre -2 e -3 .
2. O número de polos de malha aberta e de zeros finitos é o mesmo. Isso significa que não há assíntotas na região complexa do plano s .
3. Determine os pontos de partida e de chegada ao eixo real. A equação característica do sistema é:

$$1 + \frac{K(s + 2)(s + 3)}{s(s + 1)} = 0$$

ou

$$K = -\frac{s(s + 1)}{(s + 2)(s + 3)}$$

Os pontos de partida e de chegada são determinados a partir de

$$\begin{aligned} \frac{dK}{ds} &= -\frac{(2s + 1)(s + 2)(s + 3) - s(s + 1)(2s + 5)}{[(s + 2)(s + 3)]^2} \\ &= -\frac{4(s + 0,634)(s + 2,366)}{[(s + 2)(s + 3)]^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

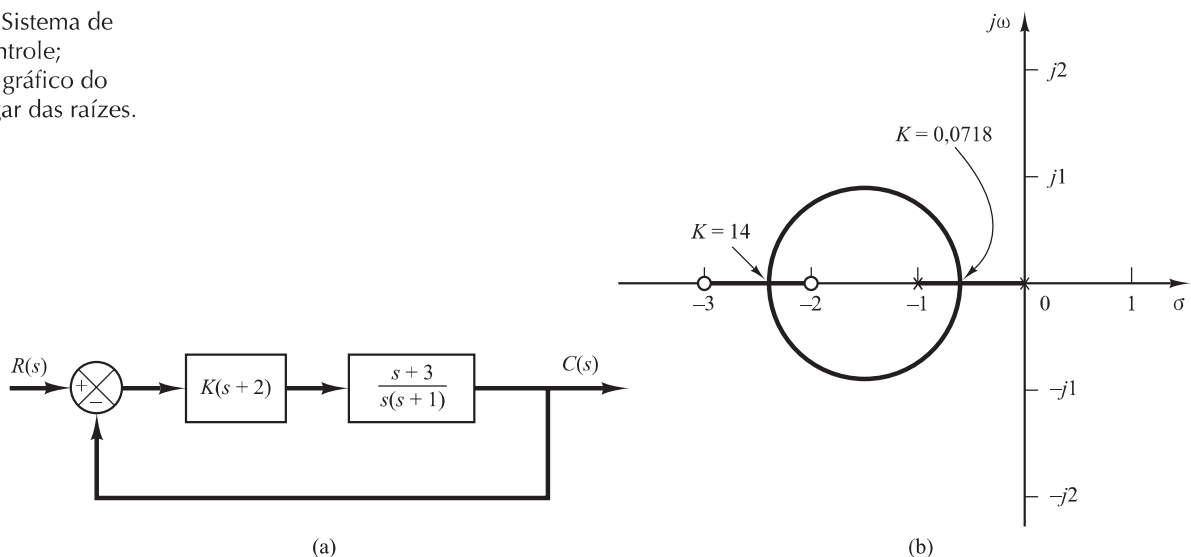
como segue:

$$s = -0,634, \quad s = -2,366$$

Note que ambos os pontos estão sobre o lugar das raízes. Portanto, eles são realmente pontos de partida e de chegada. No ponto $s = -0,634$, o valor de K é:

FIGURA 6.64

(a) Sistema de controle;
(b) gráfico do lugar das raízes.



$$K = -\frac{(-0,634)(0,366)}{(1,366)(2,366)} = 0,0718$$

Da mesma maneira, em $s = -2,366$,

$$K = -\frac{(-2,366)(-1,366)}{(-0,366)(0,634)} = 14$$

(Pelo fato de o ponto $s = -0,634$ estar entre dois polos, ele é um ponto de partida, e pelo fato de o ponto $s = -2,366$ estar entre dois zeros, ele é um ponto de chegada.)

4. Determine um número suficiente de pontos que satisfaça à condição angular. (Pode-se verificar que o lugar das raízes possui um círculo com o centro em $-1,5$, que passa pelos pontos de partida e de chegada.) O gráfico do lugar das raízes para esse sistema é mostrado na Figura 6.64(b).

Note que o sistema é estável para todos os valores positivos de K , já que todo o lugar das raízes se situa no semiplano esquerdo do plano s .

Pequenos valores de K ($0 < K < 0,0718$) correspondem a um sistema superamortecido. Valores intermediários de K ($0,0718 < K < 14$) correspondem a um sistema subamortecido. Por fim, valores grandes de K ($14 < K$) correspondem a um sistema superamortecido. Com um valor grande de K , o regime permanente pode ser atingido muito mais rapidamente do que com valores pequenos de K . O valor de K deve ser ajustado de modo que o desempenho do sistema seja ótimo, de acordo com um dado índice de desempenho.

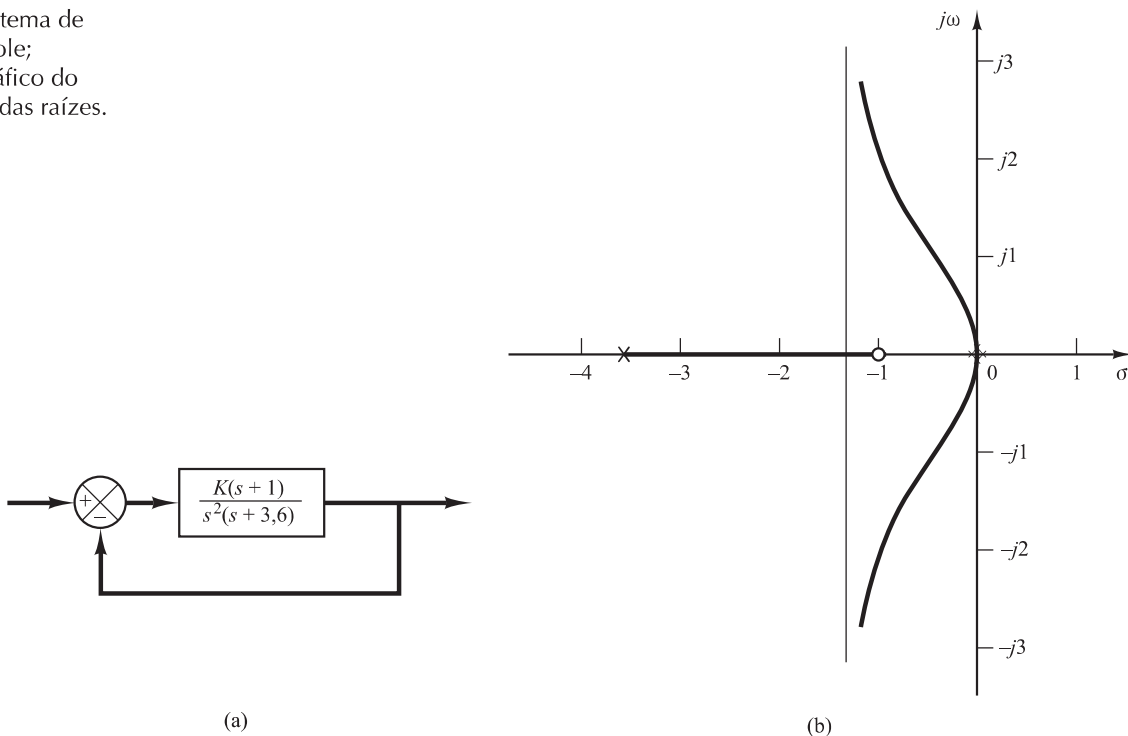
A.6.2 Desenhe o lugar das raízes do sistema de controle mostrado na Figura 6.65(a).

Solução. Existe um ramo do lugar das raízes, no eixo real entre os pontos $s = -1$ e $s = -3,6$. As assíntotas podem ser determinadas como segue:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3 - 1} = 90^\circ, -90^\circ$$

FIGURA 6.65

(a) Sistema de controle;
(b) gráfico do lugar das raízes.



A intersecção das assíntotas com o eixo real é dada por:

$$s = -\frac{0 + 0 + 3,6 - 1}{3 - 1} = -1,3$$

Como a equação característica é

$$s^3 + 3,6s^2 + K(s + 1) = 0$$

temos:

$$K = -\frac{s^3 + 3,6s^2}{s + 1}$$

Os pontos de partida e de chegada são encontrados por

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2 + 7,2s)(s + 1) - (s^3 + 3,6s^2)}{(s + 1)^2} = 0$$

ou

$$s^3 + 3,3s^2 + 3,6s = 0$$

de onde obtemos:

$$s = 0, \quad s = -1,65 + j0,9367, \quad s = -1,65 - j0,9367$$

O ponto $s = 0$ corresponde realmente a um ponto de partida. Os pontos $s = -1,65 \pm j0,9367$, no entanto, não são pontos de partida nem de chegada, porque os valores correspondentes de K são números complexos.

Para testar os pontos onde os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário, substituímos $s = j\omega$ na equação característica, obtendo:

$$(j\omega)^3 + 3,6(j\omega)^2 + K j\omega + K = 0$$

ou

$$(K - 3,6\omega)^2 + j\omega(K - \omega^2) = 0$$

Note que essa equação somente será satisfeita se $\omega = 0$, $K = 0$. Em virtude da presença de um duplo polo na origem, o lugar das raízes é tangente ao eixo $j\omega$ em $\omega = 0$. Os ramos do lugar das raízes não cruzam o eixo $j\omega$. A Figura 6.65(b) é o gráfico do lugar das raízes do sistema.

A.6.3 Desenhe o lugar das raízes do sistema mostrado na Figura 6.66(a).

Solução. Existe um ramo do lugar das raízes entre os pontos $s = -0,4$ e $s = -3,6$. Os ângulos das assíntotas podem ser determinados como segue:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3 - 1} = 90^\circ, -90^\circ$$

A intersecção das assíntotas com o eixo real é dada por:

$$s = -\frac{0 + 0 + 3,6 - 0,4}{3 - 1} = -1,6$$

Em seguida, encontramos o ponto de partida. Como a equação característica é:

$$s^3 + 3,6s^2 + Ks + 0,4K = 0$$

temos:

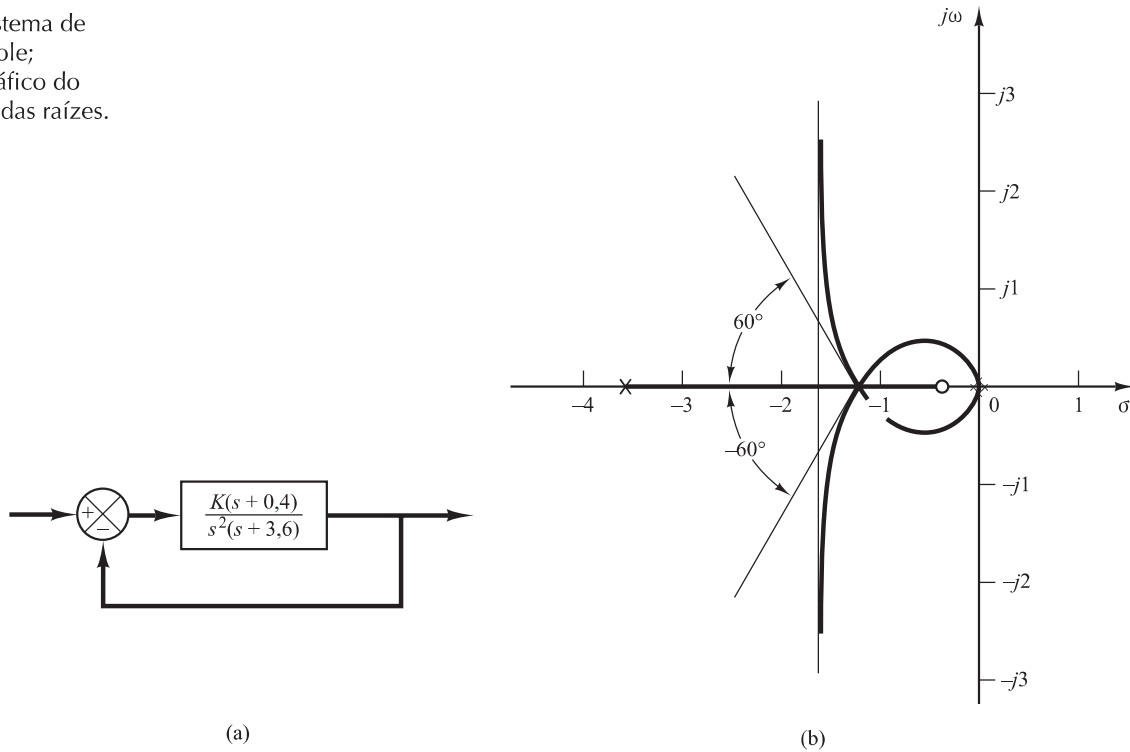
$$K = -\frac{s^3 + 3,6s^2}{s + 0,4}$$

Os pontos de partida e de chegada ficam determinados com o auxílio da equação

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2 + 7,2s)(s + 0,4) - (s^3 + 3,6s^2)}{(s + 0,4)^2} = 0$$

FIGURA 6.66

(a) Sistema de controle;
(b) gráfico do lugar das raízes.



da qual resulta:

$$s^3 + 2,4s^2 + 1,44s = 0$$

ou

$$s(s + 1,2)^2 = 0$$

Então, os pontos de partida e de chegada são $s = 0$ e $s = -1,2$. Note que $s = -1,2$ é uma raiz dupla. Quando uma raiz dupla ocorre em $dK/ds = 0$ no ponto $s = -1,2$, $d^2K/(ds^2) = 0$ nesse ponto. O valor do ganho K no ponto $s = -1,2$ é:

$$K = -\frac{s^3 + 3,6s^2}{s + 4} \Big|_{s=-1,2} = 4,32$$

Isso significa que, com $K = 4,32$, a equação característica tem uma raiz tripla no ponto $s = -1,2$. Isso pode ser facilmente verificado como segue:

$$s^3 + 3,6s^2 + 4,32s + 1,728 = (s + 1,2)^3 = 0$$

Então, os ramos da raiz tripla se encontram no ponto $s = -1,2$. Os ângulos de partida dos ramos do lugar das raízes no ponto $s = -1,2$ que tendem às assíntotas são $\pm 180^\circ/3$, isto é, 60° e -60° . (Veja o Problema A.6.4.)

Por fim, devemos examinar os ramos do lugar das raízes que cruzam o eixo imaginário. Pela substituição de $s = j\omega$ na equação característica, temos:

$$(j\omega)^3 + 3,6(j\omega)^2 + K(j\omega) + 0,4K = 0$$

ou

$$(0,4K - 3,6\omega^2) + j\omega(K - \omega^2) = 0$$

Essa equação só é satisfeita se $\omega = 0$ e $K = 0$. No ponto $\omega = 0$, o lugar das raízes é tangente ao eixo $j\omega$ por causa de um polo duplo na origem. Não há pontos onde os ramos do lugar das raízes cruzem o eixo imaginário.

Um gráfico do lugar das raízes para esse sistema é mostrado na Figura 6.66(b).

- A.6.4** Obtenha para o Problema A.6.3 a equação dos ramos do lugar das raízes do sistema mostrado na Figura 6.66(a). Mostre que os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo real, no ponto de partida do eixo real, com ângulos de $\pm 60^\circ$.

Solução. As equações dos ramos do lugar das raízes podem ser obtidas a partir da condição angular

$$\angle \frac{K(s + 0,4)}{s^2(s + 3,6)} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

que pode ser escrita como:

$$\angle s + 0,4 - 2\angle s - \angle s + 3,6 = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Substituindo $s = \sigma + j\omega$, obtemos:

$$\angle \sigma + j\omega + 0,4 - 2\angle \sigma + j\omega - \angle \sigma + j\omega + 3,6 = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

ou

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 0,4}\right) - 2\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 3,6}\right) \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Rearranjando os termos, temos:

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 0,4}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 3,6}\right) \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Considerando as tangentes de ambos os lados dessa última equação e notando que:

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 3,6}\right) \pm 180^\circ(2k + 1)\right] = \frac{\omega}{\sigma + 3,6}$$

obtemos:

$$\frac{\frac{\omega}{\sigma + 0,4} - \frac{\omega}{\sigma}}{1 + \frac{\omega}{\sigma + 0,4} \frac{\omega}{\sigma}} = \frac{\frac{\omega}{\sigma} + \frac{\omega}{\sigma + 3,6}}{1 - \frac{\omega}{\sigma} \frac{\omega}{\sigma + 3,6}}$$

que pode ser simplificada como segue:

$$\frac{\omega\sigma - \omega(\sigma + 0,4)}{(\sigma + 0,4)\sigma + \omega^2} = \frac{\omega(\sigma + 3,6) + \omega\sigma}{\sigma(\sigma + 3,6) - \omega^2}$$

ou

$$\omega(\sigma^3 + 2,4\sigma^2 + 1,44\sigma + 1,6\omega^2 + \sigma\omega^2) = 0$$

que pode ser ainda mais simplificada como:

$$\omega[\sigma(\sigma + 1,2)^2 + (\sigma + 1,6)\omega^2] = 0$$

Para $\sigma \neq -1,6$, podemos escrever essa última equação como:

$$\omega \left[\omega - (\sigma + 1,2) \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}} \right] \left[\omega + (\sigma + 1,2) \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}} \right] = 0$$

o que nos fornece as seguintes equações para o lugar das raízes:

$$\omega = 0$$

$$\omega = (\sigma + 1,2) \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}}$$

$$\omega = -(\sigma + 1,2) \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}}$$

A equação $\omega = 0$ representa o eixo real. O lugar das raízes para $0 \leq K \leq \infty$ encontra-se entre $s = -0,4$ e $s = -3,6$. (O eixo real, além desse segmento linear e da origem $s = 0$, corresponde ao lugar das raízes para $-\infty \leq K < 0$.)

As equações

$$\omega = \pm(\sigma + 1,2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}} \quad (6.29)$$

representam os ramos complexos para $0 \leq K \leq \infty$. Esses dois ramos situam-se entre $\sigma = -1,6$ e $\sigma = 0$. [Veja a Figura 6.66(b).] As inclinações dos ramos complexos do lugar das raízes no ponto de partida ($\sigma = -1,2$) podem ser obtidas avaliando $d\omega/d\sigma$ na Equação 6.29 no ponto $\sigma = -1,2$.

$$\left. \frac{d\omega}{d\sigma} \right|_{\sigma=-1,2} = \pm \sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1,6}} \bigg|_{\sigma=-1,2} = \pm \sqrt{\frac{1,2}{0,4}} = \pm \sqrt{3}$$

Como $\text{tg}^{-1}\sqrt{3} = 60^\circ$, os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo real com ângulos de $\pm 60^\circ$.

A.6.5 Considere o sistema da Figura 6.67(a). Trace o gráfico do lugar das raízes desse sistema. Observe que, para valores de K pequenos ou grandes, o sistema é subamortecido e, para valores intermediários de K , ele é superamortecido.

Solução. Existe um ramo do lugar das raízes entre a origem e $-\infty$. Os ângulos das assíntotas dos ramos do lugar das raízes são obtidos como segue:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} = 60^\circ, -60^\circ, -180^\circ$$

A intersecção das assíntotas com o eixo real fica localizada no eixo real em:

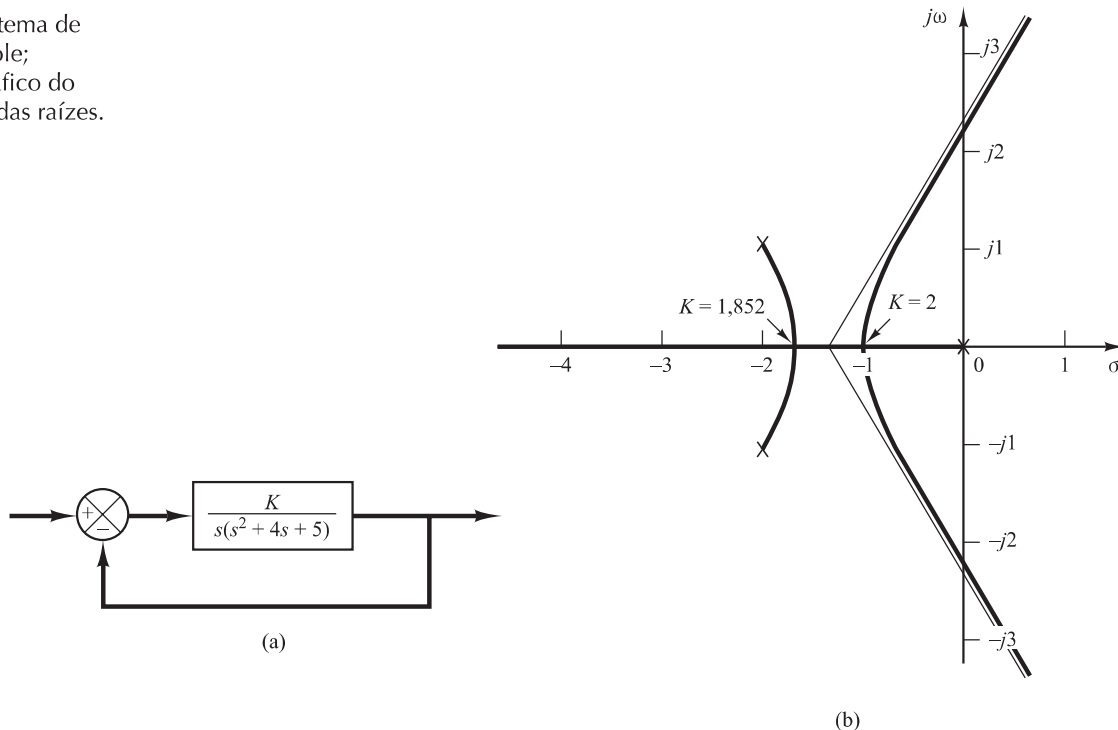
$$s = -\frac{0+2+2}{3} = -1,3333$$

Os pontos de partida e de chegada ao eixo real são localizados por $dK/ds = 0$. Como a equação característica é:

$$s^3 + 4s^2 + 5s + K = 0$$

FIGURA 6.67

(a) Sistema de controle;
(b) gráfico do lugar das raízes.



temos:

$$K = -(s^3 + 4s^2 + 5s)$$

Então, impomos:

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 8s + 5) = 0$$

de onde resulta:

$$s = -1, \quad s = -1,6667$$

Como esses dois pontos pertencem ao lugar das raízes, eles são efetivamente pontos de partida e de chegada. (No ponto $s = -1$, o valor de K é 2 e, no ponto $s = -1,6667$, o valor de K é 1,852.)

O ângulo de partida do polo complexo no semiplano superior do plano s é obtido com o auxílio da equação

$$\theta = 180^\circ - 153,43^\circ - 90^\circ$$

ou

$$\theta = -63,43$$

O ramo do lugar das raízes que parte do polo complexo no semiplano superior do plano s chega ao eixo real no ponto $s = -1,6667$.

Em seguida, determinamos os pontos em que os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário. Substituindo $s = j\omega$ na equação característica, temos:

$$(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 5(j\omega) + K = 0$$

ou

$$(K - 4\omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

e, a partir dele, obtemos:

$$\omega = \pm \sqrt{5}, \quad K = 20 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

Os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário nos pontos $\omega = \sqrt{5}$ e $\omega = -\sqrt{5}$. O ramo do lugar das raízes sobre o eixo real toca o eixo $j\omega$ em $\omega = 0$. A Figura 6.67(b) mostra o gráfico do lugar das raízes do sistema.

Note que, como esse sistema é de terceira ordem, existem três polos de malha fechada. A natureza da resposta do sistema à determinada entrada depende da localização dos polos de malha fechada.

Para $0 < K < 1,852$, existe um par de polos complexos conjugados e um polo real, todos de malha fechada. Para $1,852 \leq K \leq 2$, existem três polos reais de malha fechada. Por exemplo, os polos de malha fechada estão localizados em:

$$\begin{array}{llll} s = -1,667, & s = -1,667, & s = -0,667, & \text{para } K = 1,852 \\ s = -1, & s = -1, & s = -2, & \text{para } K = 2 \end{array}$$

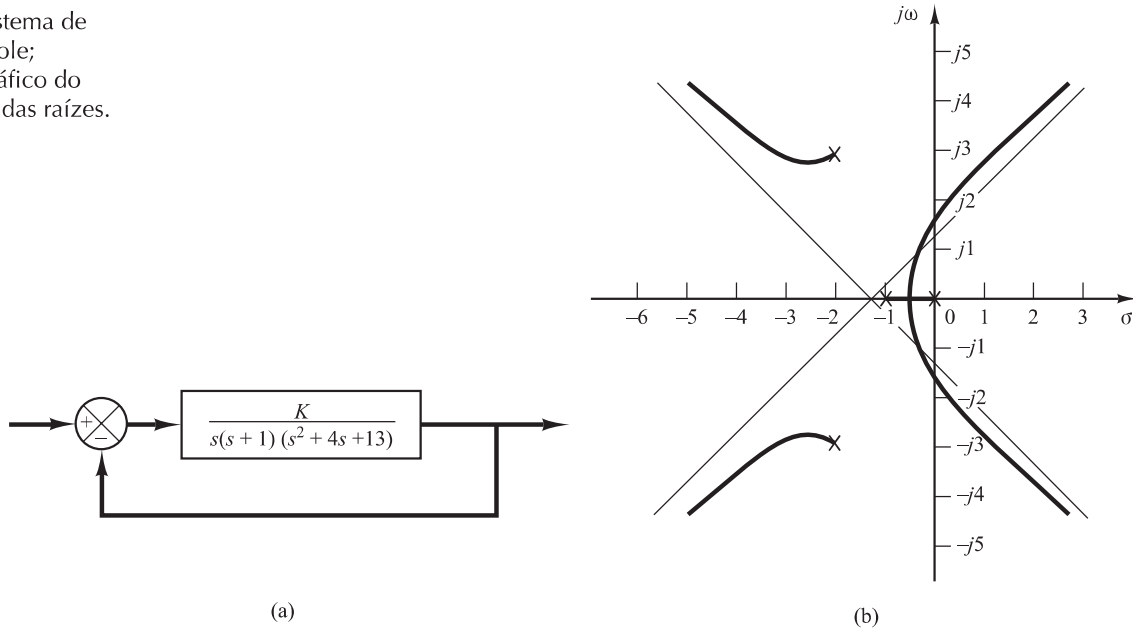
Para $2 < K$, existe um conjunto de polos de malha fechada formado por um par de polos complexos conjugados e um polo real. Assim, pequenos valores de K ($0 < K < 1,852$) correspondem a um sistema subamortecido. (Como o polo dominante é o polo real de malha fechada, apenas uma pequena oscilação pode ser notada na resposta transitória.) Valores intermediários de K ($1,852 \leq K \leq 2$) correspondem a um sistema subamortecido. Valores grandes de K ($2 < K$) correspondem a um sistema subamortecido. Para valores grandes de K , o sistema responde muito mais rapidamente do que para valores pequenos de K .

A.6.6 Trace o lugar das raízes do sistema mostrado na Figura 6.68(a).

Solução. Os polos de malha aberta estão localizados em $s = 0$, $s = -1$, $s = -2 + j3$ e $s = -2 - j3$. Existe um ramo do lugar das raízes no eixo real entre os pontos $s = 0$ e $s = -1$. Os ângulos das assíntotas são determinados como:

FIGURA 6.68

(a) Sistema de controle;
(b) gráfico do lugar das raízes.



$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{4} = 45^\circ, -45^\circ, 135^\circ, -135^\circ$$

A intersecção das assíntotas com o eixo real é determinada a partir de

$$s = -\frac{0+1+2+2}{4} = -1,25$$

Os pontos de partida e de chegada são obtidos a partir de $dK/ds = 0$. Como

$$K = -s(s+1)(s^2+4s+13) = -(s^4+5s^3+17s^2+13s)$$

temos:

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3+15s^2+34s+13) = 0$$

do que resulta:

$$s = -0,467, \quad s = -1,642 + j2,067, \quad s = -1,642 - j2,067$$

O ponto $s = -0,467$ pertence ao lugar das raízes. Portanto, trata-se realmente de um ponto de partida. O valor dos ganhos K nos pontos $s = -1,642 \pm j2,067$ são números complexos. Como os valores de ganhos não são reais e positivos, esses pontos não são pontos de partida nem de chegada.

O ângulo de partida do polo complexo situado no semiplano superior do plano s é:

$$\theta = 180^\circ - 123,69^\circ - 108,44^\circ - 90^\circ$$

ou

$$\theta = -142,13^\circ$$

Em seguida, determinamos os pontos em que o lugar das raízes cruza o eixo $j\omega$. A equação característica é:

$$s^4 + 5s^3 + 17s^2 + 13s + K = 0$$

Substituindo $s = j\omega$ na equação característica, temos:

$$(j\omega)^4 + 5(j\omega)^3 + 17(j\omega)^2 + 13(j\omega) + K = 0$$

ou

$$(K + \omega^4 - 17\omega^2) + j\omega(13 - 5\omega^2) = 0$$

da qual obtemos:

$$\omega = \pm 1,6125, \quad K = 37,44 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

Os ramos do lugar das raízes que se estendem para o semiplano direito do plano s cruzam o eixo imaginário em $\omega = \pm 1,6125$. Além disso, o ramo do lugar das raízes sobre o eixo real toca o eixo imaginário em $\omega = 0$. A Figura 6.68(b) mostra o gráfico do lugar das raízes do sistema. Note que os ramos do lugar das raízes que se estendem para o semiplano direito do plano s cruzam as respectivas assíntotas.

A.6.7 Desenhe o lugar das raízes do sistema mostrado na Figura 6.69(a). Determine os valores de K para os quais o sistema é estável.

Solução. Os polos de malha aberta estão localizados em $s = 1$, $s = -2 + j\sqrt{3}$ e $s = -2 - j\sqrt{3}$. Um ramo do lugar das raízes existe no eixo real entre os pontos $s = 1$ e $s = -\infty$. As assíntotas dos ramos do lugar das raízes são determinadas como segue:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3} = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$$

A intersecção das assíntotas com o eixo real é obtida por:

$$s = -\frac{-1 + 2 + 2}{3} = -1$$

Os pontos de partida e de chegada ao eixo real podem ser localizados a partir de $dK/ds = 0$. Como

$$K = -(s - 1)(s^2 + 4s + 7) = -(s^3 + 3s^2 + 3s - 7)$$

temos:

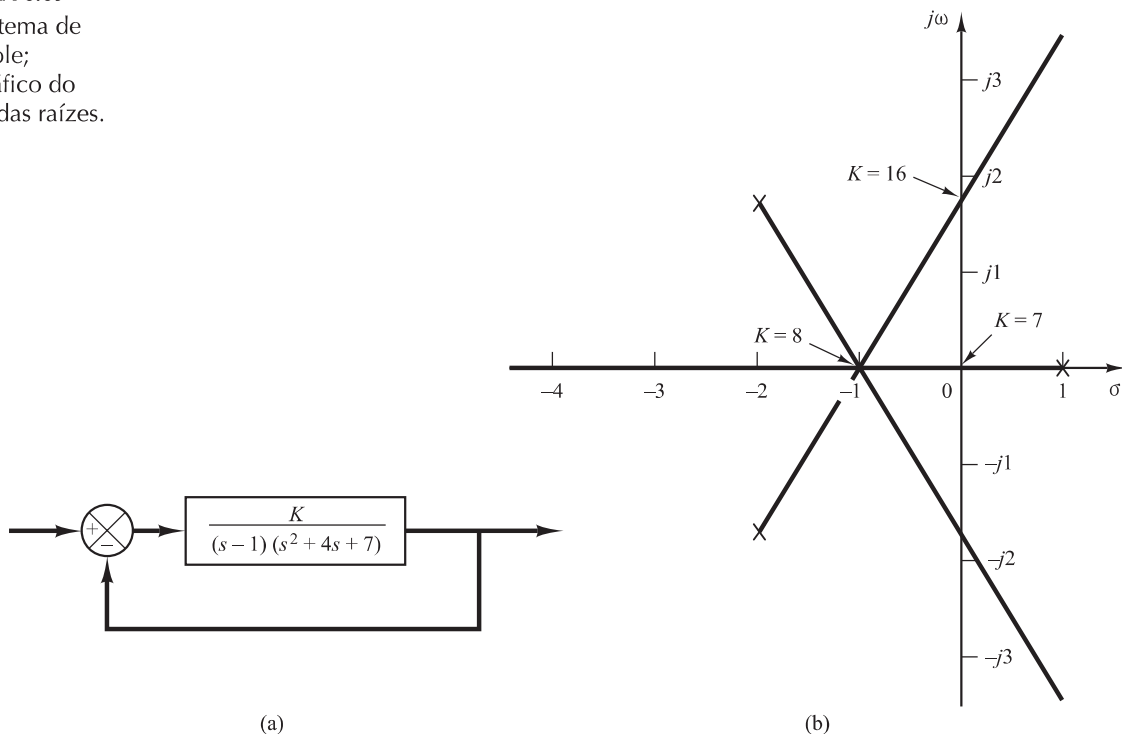
$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 3) = 0$$

ou seja,

$$(s + 1)^2 = 0$$

FIGURA 6.69

(a) Sistema de controle;
(b) gráfico do lugar das raízes.



Então, a equação $dK/ds = 0$ tem uma raiz dupla em $s = -1$. (Isso significa que a equação característica tem uma raiz tripla em $s = -1$.) O ponto de encontro está localizado em $s = -1$. Três ramos do lugar das raízes se cruzam nesse ponto de encontro. Os ângulos de partida dos ramos nesse ponto de encontro são $\pm 180^\circ/3$, isto é, 60° e -60° .

Em seguida, vamos determinar os pontos onde os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário. Notando que a equação característica é:

$$(s - 1)(s^2 + 4s + 7) + K = 0$$

ou

$$s^3 + 3s^2 + 3s - 7 + K = 0$$

substituímos $s = j\omega$ nessa equação e obtemos:

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) - 7 + K = 0$$

Reescrevendo essa última equação, obtemos:

$$(K - 7 - 3\omega^2) + j\omega(3 - \omega^2) = 0$$

Essa equação é satisfeita quando

$$\omega = \pm\sqrt{3}, \quad K = 7 + 3\omega^2 = 16 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 7$$

Os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário em $\omega = \pm\sqrt{3}$ (onde $K = 16$) e $\omega = 0$ (onde $K = 7$). Como o valor de K na origem é 7, o intervalo dos valores do ganho K para estabilidade é:

$$7 < K < 16$$

A Figura 6.69(b) mostra o gráfico do lugar das raízes para esse sistema. Note que todos os ramos são retilíneos.

O fato de os ramos do lugar das raízes serem retilíneos pode ser verificado como a seguir: como a condição angular é

$$\angle \frac{K}{(s - 1)(s + 2 + j\sqrt{3})(s + 2 - j\sqrt{3})} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

temos:

$$-\angle s - 1 - \angle s + 2 + j\sqrt{3} - \angle s + 2 - j\sqrt{3} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Substituindo $s = \sigma + j\omega$ nessa última equação,

$$\angle \sigma - 1 + j\omega + \angle \sigma + 2 + j\omega + j\sqrt{3} + \angle \sigma + 2 + j\omega - j\sqrt{3} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

ou

$$\angle \sigma + 2 + j(\omega + \sqrt{3}) + \angle \sigma + 2 + j(\omega - \sqrt{3}) = -\angle \sigma - 1 + j\omega \pm 180^\circ(2k + 1)$$

que pode ser reescrita como:

$$\text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{3}}{\sigma + 2}\right) + \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{3}}{\sigma + 2}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma - 1}\right) \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Considerando as tangentes de ambos os lados da última equação, obtemos:

$$\frac{\frac{\omega + \sqrt{3}}{\sigma + 2} + \frac{\omega - \sqrt{3}}{\sigma + 2}}{1 - \left(\frac{\omega + \sqrt{3}}{\sigma + 2}\right)\left(\frac{\omega - \sqrt{3}}{\sigma + 2}\right)} = -\frac{\omega}{\sigma - 1}$$

ou

$$\frac{2\omega(\sigma + 2)}{\sigma^2 + 4\sigma + 4 - \omega^2 + 3} = \frac{\omega}{\sigma - 1}$$

que pode ser simplificada para:

$$2\omega(\sigma + 2)(\sigma - 1) = -\omega(\sigma^2 + 4\sigma + 7 - \omega^2)$$

ou

$$\omega(3\sigma^2 + 6\sigma + 3 - \omega^2) = 0$$

A simplificação adicional dessa última equação permite escrever

$$\omega\left(\sigma + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega\right)\left(\sigma + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\omega\right) = 0$$

que define três linhas:

$$\omega = 0, \quad \sigma + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega = 0, \quad \sigma + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\omega = 0$$

Assim, os ramos do lugar das raízes consistem em três linhas retas. Note que o lugar das raízes para $K > 0$ consiste nas três semirretas mostradas na Figura 6.69(b). (Veja que cada semirreta parte dos polos de malha aberta e se estende ao infinito na direção de 180° , 60° ou -60° , medidos a partir do eixo real.) A parte restante das linhas retas corresponde a $K < 0$.

A.6.8 Considere um sistema com realimentação unitária com a seguinte função de transferência do ramo direto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Desenhe o lugar das raízes e suas assíntotas com o MATLAB.

Solução. Desenharemos o lugar das raízes e as assíntotas em um diagrama. Como a função de transferência no ramo direto é dada por

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s} \end{aligned}$$

a equação para as assíntotas pode ser obtida como segue: notando que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s} \doteq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{K}{(s+1)^3}$$

a equação para as assíntotas pode ser dada por

$$G_a(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$$

Assim, para o sistema, temos:

$$\begin{aligned} \text{num} &= [1] \\ \text{den} &= [1 \ 3 \ 2 \ 0] \end{aligned}$$

e para as assíntotas:

$$\begin{aligned} \text{numa} &= [1] \\ \text{dena} &= [1 \ 3 \ 3 \ 1] \end{aligned}$$

Usando os seguintes comandos de lugar das raízes e plot

$$\begin{aligned} r &= \text{rlocus}(\text{num}, \text{den}) \\ a &= \text{rlocus}(\text{numa}, \text{dena}) \\ \text{plot}([r \ a]) \end{aligned}$$

o número de linhas de r e de a deve ser o mesmo. Para garantir isso, incluímos a constante de ganho K nos comandos. Por exemplo,

$$\begin{aligned} K1 &= 0:0.1:0.3; \\ K2 &= 0.3:0.005:0.5; \end{aligned}$$

```

K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1 K2 K3 K4]
r = rlocus(num,den,K)
a = rlocus(numa,dena,K)
y = [r a]
plot(y, '-')

```

O Programa 6.15 em MATLAB gerará o gráfico do lugar das raízes e suas assíntotas, como mostra a Figura 6.70.

Programa 6.15 em MATLAB

```

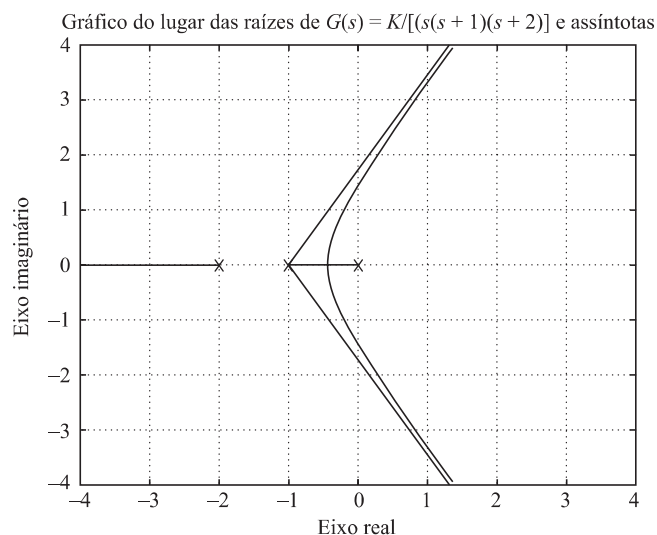
% ----- Gráficos do lugar das raízes -----
num = [1];
den = [1 3 2 0];
numa = [1];
dena = [1 3 3 1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1 K2 K3 K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
y = [r a];
plot(y, '-');
v = [-4 4 -4 4]; axis(v)
grid
title('Gráfico do lugar das raízes de  $G(s) = K/[s(s+1)(s+2)]$  e assíntotas')
xlabel('Eixo real')
ylabel('Eixo imaginário')
% ***** Desenhe manualmente na cópia impressa os polos em malha aberta *****

```

Pode-se desenhar dois ou mais gráficos no mesmo diagrama, usando o comando `hold`. O Programa 6.16, em MATLAB, utiliza o comando `hold`. A Figura 6.71 mostra o gráfico do lugar das raízes resultante.

FIGURA 6.70

Gráfico do lugar das raízes.



Programa 6.16 em MATLAB

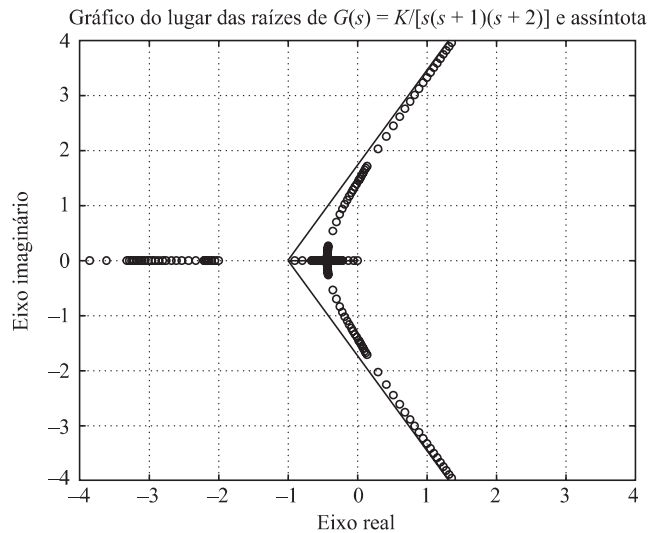
```

% ----- Gráficos do lugar das raízes -----
num = [1];
den = [1 3 2 0];
numa = [1];
dena = [1 3 3 1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1 K2 K3 K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
plot(r,'o')
hold
Current plot held
plot(a,'-')
v = [-4 4 -4 4]; axis(v)
grid
title('Gráfico do lugar das raízes de G(s) = K/[s(s+1)(s+2)] e assíntotas')
xlabel('Eixo real')
ylabel('Eixo imaginário')

```

FIGURA 6.71

Gráfico do lugar das raízes.



- A.6.9** Desenhe e faça o gráfico do lugar das raízes e as assíntotas de um sistema com realimentação unitária cuja função de transferência no ramo direto é a seguinte:

$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

Determine os pontos exatos onde os lugares das raízes cruzam o eixo $j\omega$.

Solução. A função de transferência do ramo direto $G(s)$ pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10}$$

Observe que, à medida que s se aproxima do infinito, $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10} \\ &\doteq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{(s+1)^4}\end{aligned}$$

onde usamos a seguinte fórmula:

$$(s+a)^4 = s^4 + 4as^3 + 6a^2s^2 + 4a^3s + a^4$$

A expressão

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K}{(s+1)^4}$$

fornece a equação para as assíntotas.

O Programa 6.17 em MATLAB permite desenhar o gráfico do lugar das raízes de $G(s)$ e suas assíntotas. Observe que o numerador e o denominador de $G(s)$ são

$$\begin{aligned}\text{num} &= [1] \\ \text{den} &= [1 \ 4 \ 11 \ 14 \ 10]\end{aligned}$$

Para o numerador e o denominador das assíntotas $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$, usamos

$$\begin{aligned}\text{numa} &= [1] \\ \text{dena} &= [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]\end{aligned}$$

A Figura 6.72 mostra o gráfico do lugar das raízes e das assíntotas.

Como a equação característica do sistema é

$$(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5) + K = 0$$

Programa 6.17 em MATLAB

```
% ***** Gráfico do lugar das raízes *****
num = [1];
den = [1 4 11 14 10];
numa = [1];
dena = [1 4 6 4 1];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'-')
hold
Current plot held
plot(r,'o')
rlocus(numa,dena);
v = [-6 4 -5 5]; axis(v); axis('square')
grid
title('Gráfico do lugar das raízes e assíntota')
```

os pontos onde os lugares das raízes cruzam o eixo imaginário podem ser encontrados substituindo-se $s = j\omega$ com a equação característica como segue:

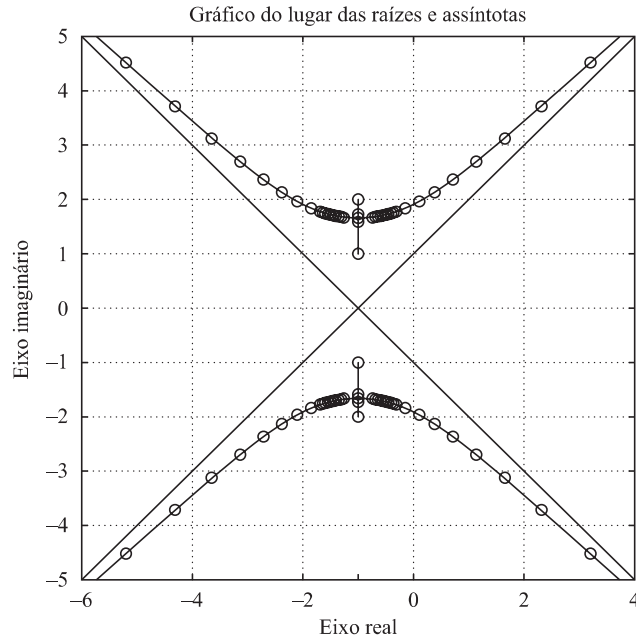
$$\begin{aligned}[(j\omega)^2 + 2j\omega + 2][(j\omega)^2 + 2j\omega + 5] + K \\ = (\omega^4 - 11\omega^2 + 10 + K) + j(-4\omega^3 + 14\omega) = 0\end{aligned}$$

e igualando a parte imaginária a zero. O resultado é

$$\omega = \pm 1,8708$$

Portanto, os pontos exatos onde os lugares das raízes atravessam o eixo $j\omega$ são $\omega = \pm 1,8708$. Igualando a parte real a zero, constatamos que o valor do ganho K no ponto de cruzamento é 16,25.

FIGURA 6.72
Gráfico do lugar das raízes e assíntotas.



A.6.10 Considere um sistema com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

Desenhe o gráfico do lugar das raízes utilizando o MATLAB.

Solução. A função de transferência do ramo direto $G(s)$ pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^4+4s^3+11s^2+14s+10}$$

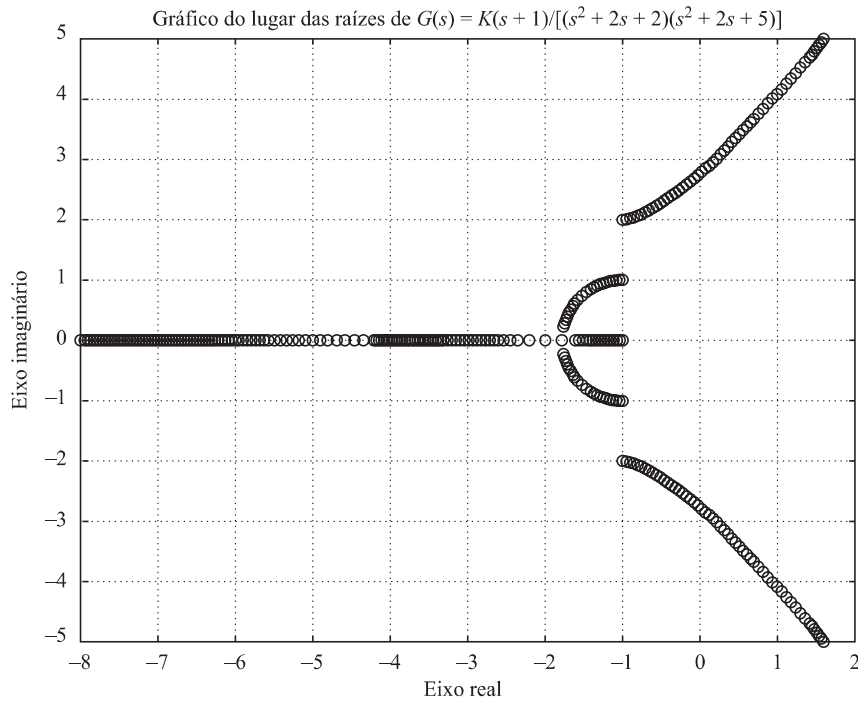
Uma opção de programa MATLAB para desenhar o gráfico do lugar das raízes está no Programa 6.18 em MATLAB. A Figura 6.73 mostra o gráfico resultante.

Programa 6.18 em MATLAB

```
num = [1 1];
den = [1 4 11 14 10];
K1 = 0:0.1:2;
K2 = 2:0.0.2:2.5;
K3 = 2.5:0.5:10;
K4 = 10:1:50;
K = [K1 K2 K3 K4];
r = rlocus(num,den,K);
plot(r, 'o')
v = [-8 2 -5 5]; axis(v); axis('square')
grid
title('Gráfico do lugar das raízes de G(s) = K(s+1)/[(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)]')
xlabel('Eixo real')
ylabel('Eixo imaginário')
```

FIGURA 6.73

Gráfico do lugar das raízes das raízes.



- A.6.11** Obtenha a função de transferência do sistema mecânico mostrado na Figura 6.74. Suponha que o deslocamento x_i seja a entrada e o deslocamento x_o seja a saída do sistema.

Solução. Com base no diagrama, obtemos as seguintes equações de movimento:

$$b_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = b_1(\dot{x}_o - \dot{y})$$

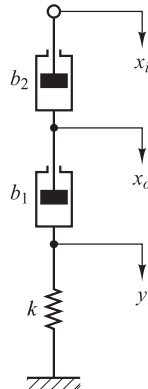
$$b_1(\dot{x}_o - \dot{y}) = ky$$

Considerando as transformadas de Laplace dessas duas equações e supondo as condições iniciais nulas e em seguida eliminando $Y(s)$, obtemos:

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_2}{b_1 + b_2} \frac{\frac{b_1}{k}s + 1}{\frac{b_2}{b_1 + b_2} \frac{b_1}{k}s + 1}$$

FIGURA 6.74

Sistema mecânico.



Esta é a função de transferência entre $X_o(s)$ e $X_i(s)$. Definindo:

$$\frac{b_1}{k} = T, \quad \frac{b_2}{b_1 + b_2} = \alpha < 1$$

obtemos

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

Esse sistema é uma estrutura mecânica de avanço de fase.

A.6.12 Obtenha a função de transferência do sistema mecânico mostrado na Figura 6.75. Suponha que o deslocamento x_i seja a entrada e o deslocamento x_o seja a saída.

Solução. As equações do movimento desse sistema são:

$$b_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = k_2(x_i - x_o) = b_1(\dot{x}_o - \dot{y})$$

$$b_1(\dot{x}_o - \dot{y}) = k_1 y$$

Considerando as transformadas de Laplace dessas duas equações e supondo condições iniciais nulas, obtemos:

$$b_2[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_2[X_i(s) - X_o(s)] = b_1[sX_o(s) - sY(s)]$$

$$b_1[sX_o(s) - sY(s)] = k_1 Y(s)$$

Se for eliminado $Y(s)$ das duas últimas equações, obteremos a função de transferência $X_o(s)/X_i(s)$ como:

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s + 1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s + 1\right) + \frac{b_1}{k_2}s}$$

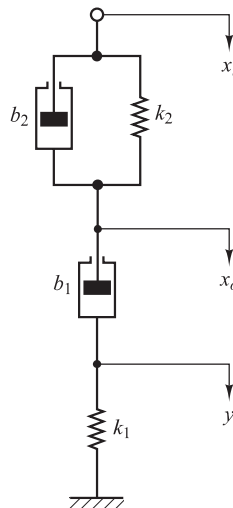
Defina

$$T_1 = \frac{b_1}{k_1}, \quad T_2 = \frac{b_2}{k_2},$$

Se k_1, k_2, b_1 e b_2 forem escolhidos de forma que haja um β que satisfaça à seguinte equação:

$$\frac{b_1}{k_1} + \frac{b_2}{k_2} + \frac{b_1}{k_2} = \frac{T_1}{\beta} + \beta T_2 \quad (\beta > 1) \tag{6.30}$$

FIGURA 6.75
Sistema mecânico.



Então, $X_o(s)/X_i(s)$ pode ser determinada por

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s + 1\right)(\beta T_2s + 1)} = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

(Note que, dependendo da escolha de k_1 , k_2 , b_1 e b_2 , pode não haver β que satisfaça à Equação 6.30.)

Se tal β existir e for um dado s_1 (onde $s = s_1$ é um dos polos de malha fechada dominantes do sistema de controle para o qual desejamos usar esse dispositivo mecânico), as seguintes condições são satisfeitas:

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1, \quad -5^\circ < \left[\frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right] < 0^\circ$$

e então o sistema mecânico mostrado na Figura 6.75 funciona como compensador de atraso e avanço de fase.

- A.6.13** Considere o modelo de sistema de controle de um veículo espacial mostrado na Figura 6.76. Projete um compensador de avanço de fase $G_c(s)$ tal que o coeficiente de amortecimento ζ e a frequência natural não amortecida ω_n dos polos dominantes de malha fechada sejam 0,5 e 2 rad/s, respectivamente.

Solução.

Primeira tentativa: suponha que o compensador por avanço de fase $G_c(s)$ seja:

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \right) \quad (0 < \alpha < 1)$$

A partir das especificações, $\zeta = 0,5$ e $\omega_n = 2$ rad/s, os polos dominantes de malha fechada devem estar localizados em:

$$s = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Devemos calcular primeiro a deficiência angular nesse polo de malha fechada.

$$\begin{aligned} \text{Deficiência angular} &= -120^\circ - 120^\circ - 10,8934^\circ + 180^\circ \\ &= -70,8934 \end{aligned}$$

Essa deficiência angular deve ser compensada por um compensador de avanço de fase. Existem muitas maneiras de determinar a localização dos polos e zeros da rede de avanço de fase. Vamos escolher o zero do compensador em $s = -1$. Então, com base na Figura 6.77, temos a seguinte equação:

$$\frac{1,73205}{x - 1} = \text{tg}(90^\circ - 70,8934^\circ) = 0,34641$$

ou

$$x = 1 + \frac{1,73205}{0,34641} = 6$$

FIGURA 6.76

Sistema de controle de veículo espacial.

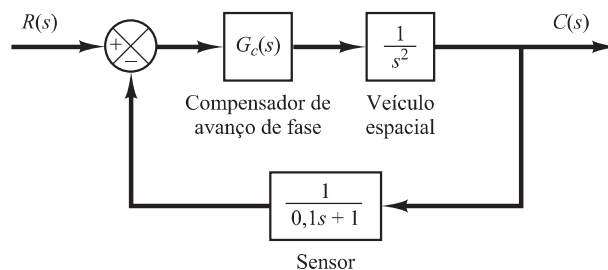
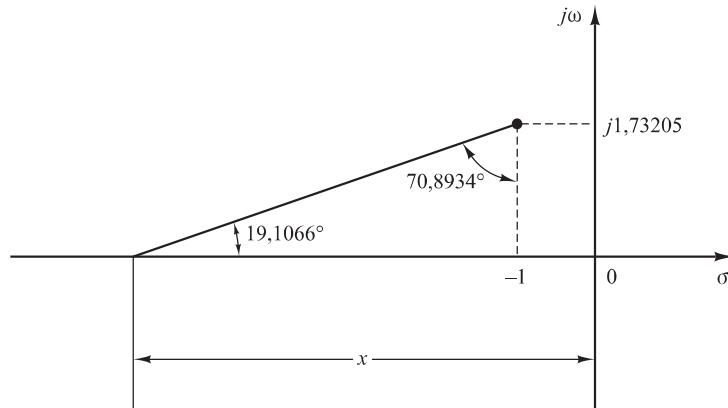


FIGURA 6.77

Determinação do polo da rede de avanço de fase.



Portanto,

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 1}{s + 6}$$

O valor de K_c pode ser determinado com base na condição de módulo

$$K_c \left| \frac{s + 1}{s + 6} \frac{1}{s^2} \frac{1}{0,1s + 1} \right|_{s = -1 + j\sqrt{3}} = 1$$

como segue:

$$K_c \left| \frac{(s + 6)s^2(0,1s + 1)}{s + 1} \right|_{s = -1 + j\sqrt{3}} = 11,2000$$

Assim,

$$G_c(s) = 11,2 \frac{s + 1}{s + 6}$$

Como a função de transferência de malha aberta torna-se

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s)H(s) &= 11,2 \frac{s + 1}{(s + 6)s^2(0,1s + 1)} \\ &= \frac{11,2(s + 1)}{0,1s^4 + 1,6s^3 + 6s^2} \end{aligned}$$

um gráfico do lugar das raízes do sistema compensado pode ser obtido facilmente com o MATLAB, digitando-se num e den e utilizando-se o comando rlocus. O resultado é mostrado na Figura 6.78.

A função de transferência de malha fechada do sistema compensado torna-se:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{11,2(s + 1)(0,1s + 1)}{(s + 6)s^2(0,1s + 1) + 11,2(s + 1)}$$

A Figura 6.79 mostra a curva de resposta ao degrau unitário. Mesmo que o coeficiente de amortecimento dos polos dominantes de malha fechada seja 0,5, o valor do sobressinal está muito acima do esperado. Uma visão mais detalhada do gráfico do lugar das raízes indica que a presença do zero em $s = -1$ aumenta o valor do máximo sobressinal. [Em geral, se um ou mais zeros de malha fechada (um ou mais zeros do compensador) ficam à direita do par dominante de polos complexos conjugados, então esses polos dominantes já não são mais dominantes.] Se um máximo sobressinal elevado não puder ser tolerado, o(s) zero(s) do compensador deve(m) ser deslocado(s) o suficiente para a esquerda.

FIGURA 6.78

Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado.

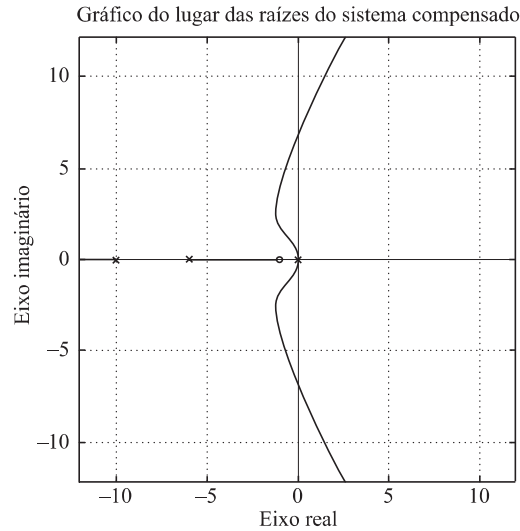
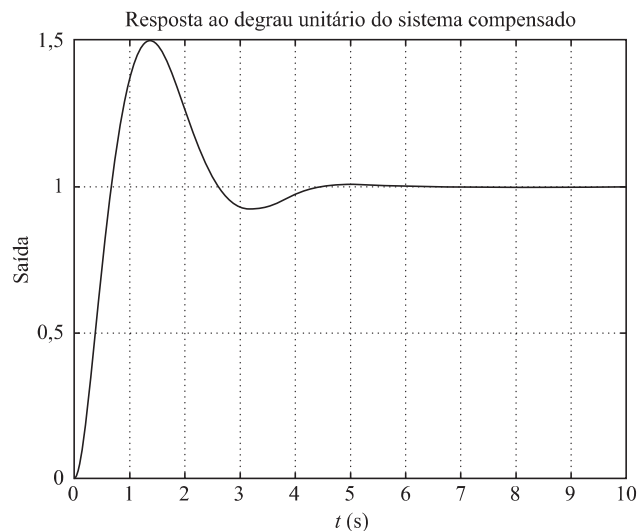


FIGURA 6.79

Resposta ao degrau unitário do sistema compensado.



Nesse projeto, é desejável modificar o compensador e fazer que o máximo sobressinal seja menor. Isso pode ser feito pela modificação do compensador por avanço de fase, como será apresentado na segunda tentativa, a seguir.

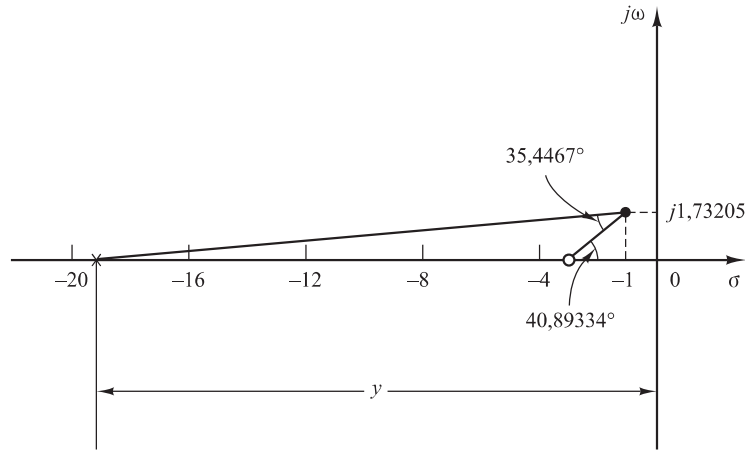
Segunda tentativa: para modificar a forma do lugar das raízes, podemos utilizar duas redes por avanço de fase, cada uma contribuindo com metade do ângulo de avanço de fase, que é $70,8934^\circ/2 = 35,4467^\circ$. Vamos escolher a localização dos zeros em $s = -3$. (Esta é uma escolha arbitrária. Podem ser feitas outras escolhas, como $s = -2,5$ e $s = -4$.)

Uma vez escolhidos os dois zeros em $s = -3$, a localização necessária dos polos pode ser determinada como mostra a Figura 6.80 ou

$$\begin{aligned} \frac{1,73205}{y-1} &= \operatorname{tg}(40,89334^\circ - 35,4467^\circ) \\ &= \operatorname{tg}5,4466^\circ = 0,09535 \end{aligned}$$

FIGURA 6.80

Determinação do polo da rede de avanço de fase.



do que resulta:

$$y = 1 + \frac{1,73205}{0,09535} = 19,1652$$

Então, o compensador por avanço de fase terá a seguinte função de transferência:

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + 3}{s + 19,1652} \right)^2$$

O valor de K_c pode ser determinado com base na condição de módulo, como segue:

$$\left| K_c \left(\frac{s + 3}{s + 19,1652} \right)^2 \frac{1}{s^2} \frac{1}{0,1s + 1} \right|_{s = -1 + j\sqrt{3}} = 1$$

ou

$$K_c = 174,3864$$

Então, o compensador por avanço de fase projetado é:

$$G_c(s) = 174,3864 \left(\frac{s + 3}{s + 19,1652} \right)^2$$

Assim, a função de transferência de malha aberta torna-se:

$$G_c(s)G(s)H(s) = 174,3864 \left(\frac{s + 3}{s + 19,1652} \right)^2 \frac{1}{s^2} \frac{1}{0,1s + 1}$$

A Figura 6.81(a) mostra o gráfico do lugar das raízes do sistema compensado. Note que não existe zero de malha fechada próximo à origem. Uma visão ampliada do gráfico do lugar das raízes próximo à origem é mostrada na Figura 6.81(b).

A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{174,3864(s + 3)^2(0,1s + 1)}{(s + 19,1652)^2 s^2(0,1s + 1) + 174,3864(s + 3)^2}$$

Os polos de malha fechada encontrados são os seguintes:

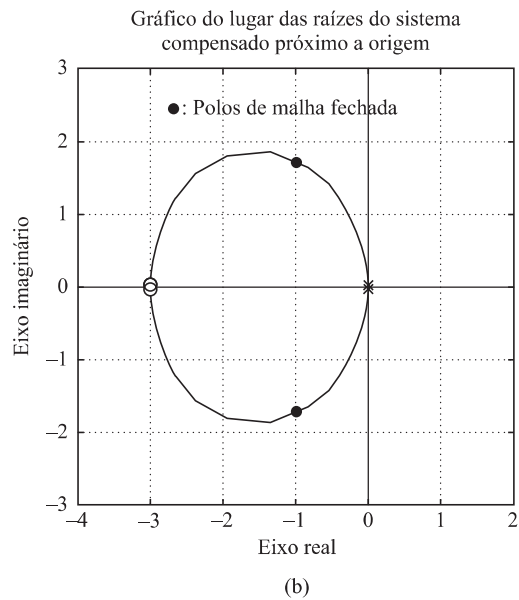
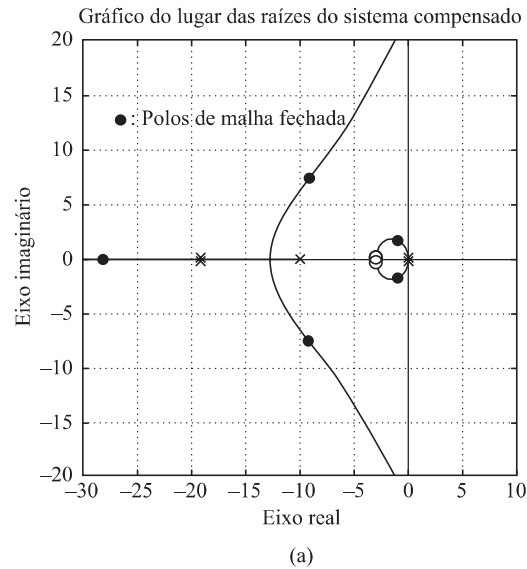
$$s = -1 \pm j1,73205$$

$$s = -9,1847 \pm j7,4814$$

$$s = -27,9606$$

FIGURA 6.81

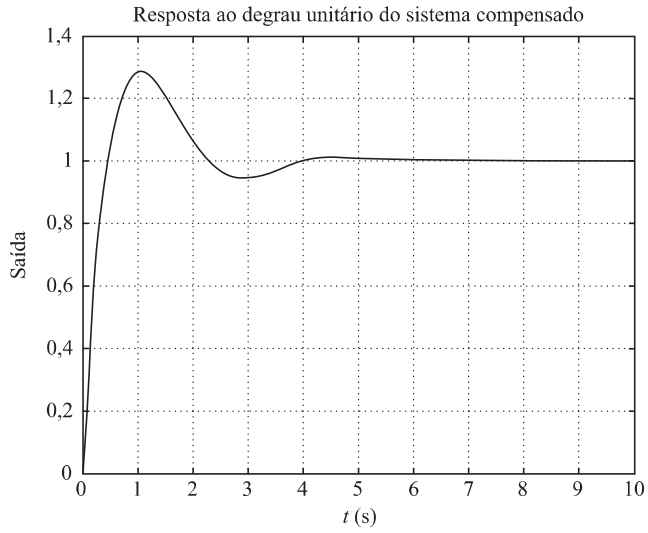
(a) Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado;
 (b) gráfico do lugar das raízes próximo à origem.



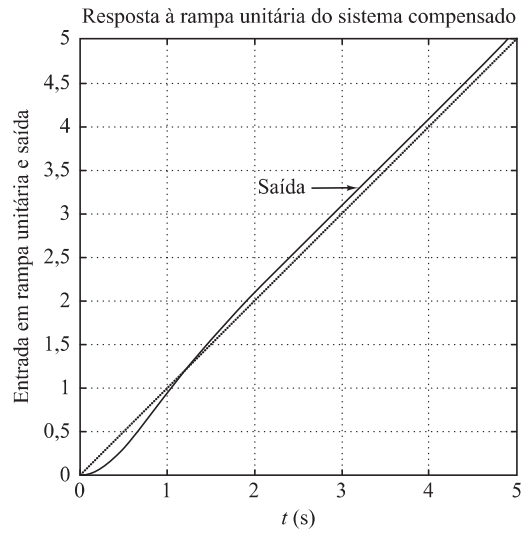
As figuras 6.82(a) e (b) mostram as respostas ao degrau unitário e à rampa unitária do sistema compensado. A curva de resposta ao degrau unitário é razoável e a resposta à rampa unitária parece aceitável. Observe que, na resposta à rampa unitária, a saída está um pouco adiantada em relação à entrada. Isso ocorre porque o sistema tem uma função de transferência de realimentação igual a $1/(0,1s + 1)$. Se for construído o gráfico do sinal de realimentação em função de t , juntamente com a entrada em rampa unitária, nota-se que, em regime permanente, o primeiro não estará à frente da entrada em rampa. Veja a Figura 6.82(c).

FIGURA 6.82

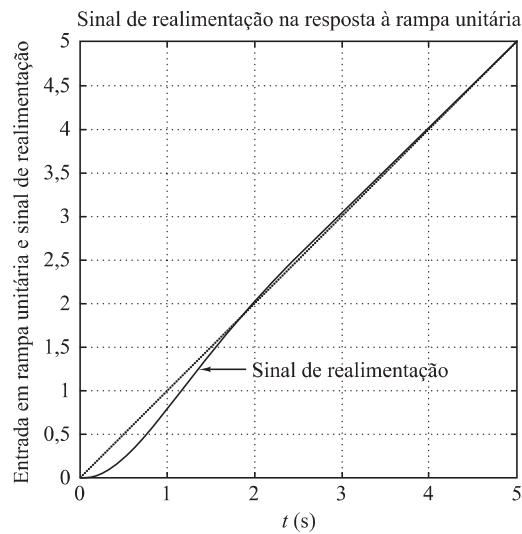
(a) Resposta ao degrau unitário do sistema compensado;
 (b) resposta à rampa unitária do sistema compensado;
 (c) gráfico do sinal de realimentação em função de t na resposta à rampa unitária.



(a)



(b)



(c)

A.6.14 Considere um sistema com uma planta instável como mostra a Figura 6.83(a). Utilizando o método do lugar das raízes, projete um controlador proporcional-derivativo (isto é, determine os valores de K_p e de T_d) para que o coeficiente de amortecimento ζ do sistema de malha fechada seja 0,7 e a frequência natural não amortecida ω_n seja 0,5 rad/s.

Solução. Note que a função de transferência de malha aberta possui dois polos em $s = 1,085$ e $s = -1,085$ e um zero em $s = -1/T_d$, que ainda não é conhecido.

Como os polos de malha fechada desejados devem ter $\omega_n = 0,5$ rad/s e $\zeta = 0,7$, eles devem estar situados em:

$$s = 0,5 / 180^\circ \pm 45,573^\circ$$

($\zeta = 0,7$ corresponde a uma reta cujo ângulo com o eixo real negativo é de $45,573^\circ$.) Assim, os polos de malha fechada desejados estão em:

$$s = -0,35 \pm j0,357$$

Os polos de malha aberta e o polo desejado de malha fechada no semiplano superior estão localizados no diagrama da Figura 6.83(b). A deficiência angular no ponto $s = -0,35 + j0,357$ é:

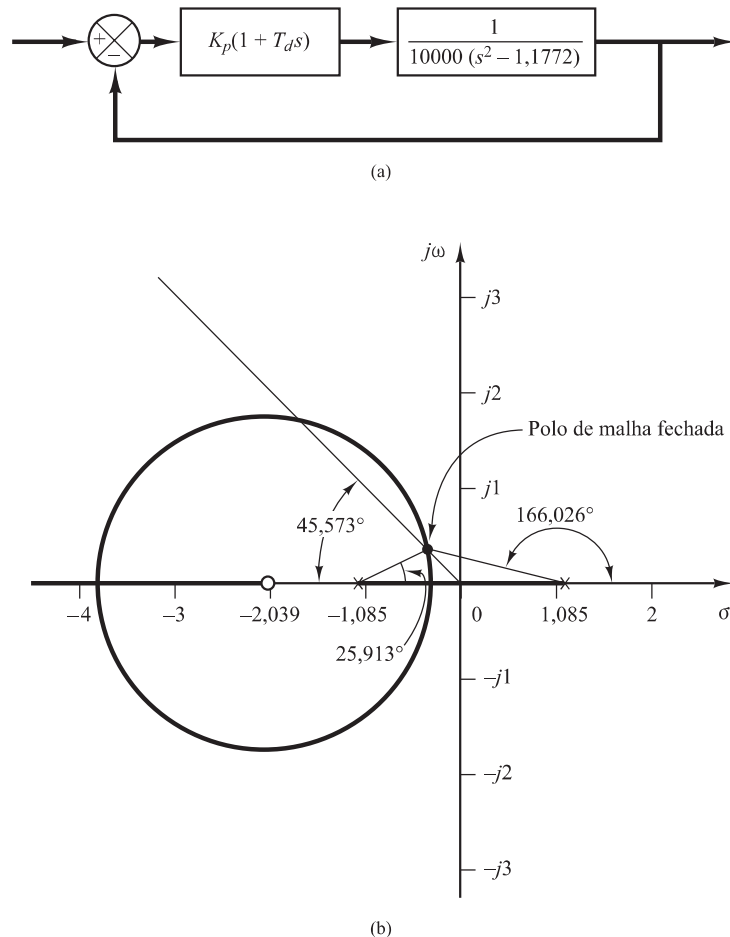
$$-166,026^\circ - 25,913^\circ + 180^\circ = -11,939^\circ$$

Isso significa que o zero em $s = -1/T_d$ deve contribuir com $11,939^\circ$, o qual, por sua vez, determina a localização do zero, como segue:

$$s = -\frac{1}{T_d} = -2,039$$

FIGURA 6.83

(a) Controle PD de uma planta instável;
(b) gráfico do lugar das raízes do sistema.



Portanto, tem-se:

$$K_p(1 + T_d s) = K_p T_d \left(\frac{1}{T_d} + s \right) = K_p T_d (s + 2,039) \quad (6.31)$$

O valor de T_d é:

$$T_d = \frac{1}{2,039} = 0,4904$$

O valor do ganho K_p pode ser determinado com base na condição de módulo como segue:

$$\left| K_p T_d \frac{s + 2,039}{10000(s^2 - 1,1772)} \right|_{s = -0,35 + j0,357} = 1$$

ou

$$K_p T_d = 6999,5$$

Então,

$$K_p = \frac{6999,5}{0,4904} = 14273$$

Substituindo os valores numéricos de T_d e K_p na Equação 6.31, obtemos:

$$K_p(1 + T_d s) = 14273(1 + 0,4904s = 6999,5(s + 2,039))$$

que é a função de transferência do controlador proporcional-derivativo desejado.

A.6.15 Considere o sistema de controle mostrado na Figura 6.84. Projete um compensador por atraso de fase $G_c(s)$ tal que a constante de erro estático de velocidade K_v seja 50 s^{-1} , sem modificar apreciavelmente a localização original dos polos de malha fechada, que estão em $s = -2 \pm j\sqrt{6}$.

Solução. Suponha que a função de transferência do compensador por atraso de fase seja:

$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

Como K_v foi especificado em 50 s^{-1} , tem-se:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{10}{s(s+4)} = \hat{K}_c \beta 2,5 = 50$$

Assim,

$$\hat{K}_c \beta = 20$$

Agora, escolha $\hat{K}_c = 1$. Então,

$$\beta = 20$$

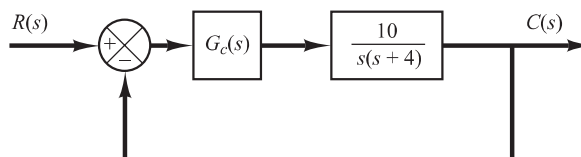
Escolha $T = 10$. Então, o compensador por atraso de fase pode ser dado por:

$$G_c(s) = \frac{s + 0,1}{s + 0,005}$$

A contribuição angular do compensador por atraso de fase no polo $s = -2 + j\sqrt{6}$ de malha fechada é

FIGURA 6.84

Sistema de controle.



$$\begin{aligned} \angle G_c(s) \Big|_{s=-2+j\sqrt{6}} &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{6}}{-1,9} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{6}}{-1,995} \\ &= -1,3616^\circ \end{aligned}$$

que é pequena. O valor de $G_c(s)$ em $s = -2 + j6$ é 0,981. Portanto, a modificação na posição dos polos dominantes de malha fechada também é muito pequena.

A função de transferência de malha aberta do sistema torna-se:

$$G_c(s)G(s) = \frac{s + 0,1}{s + 0,005} \frac{10}{s(s + 4)}$$

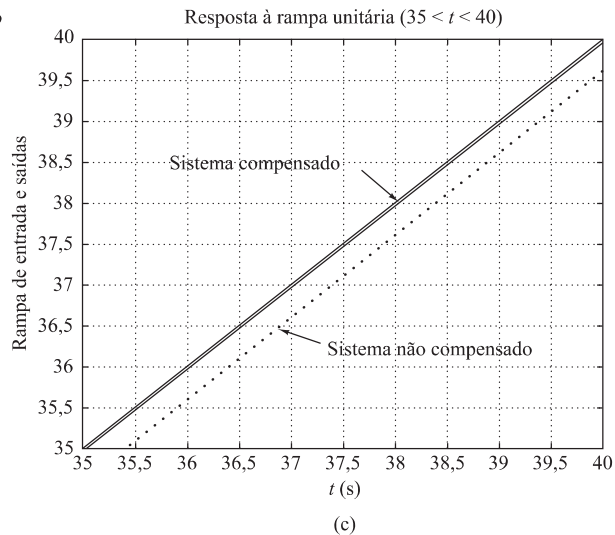
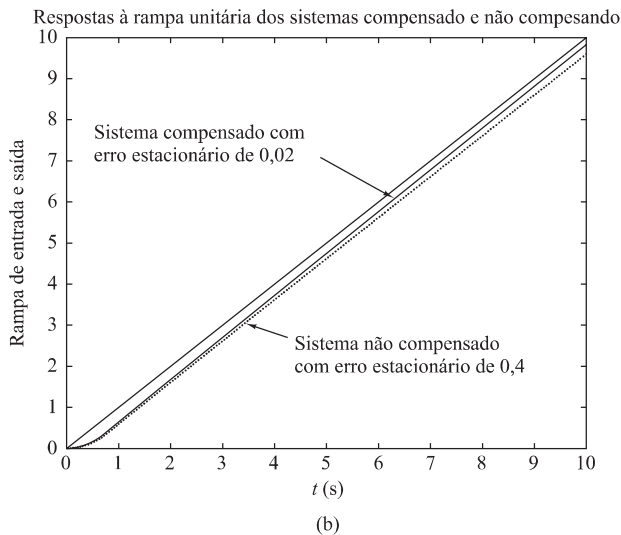
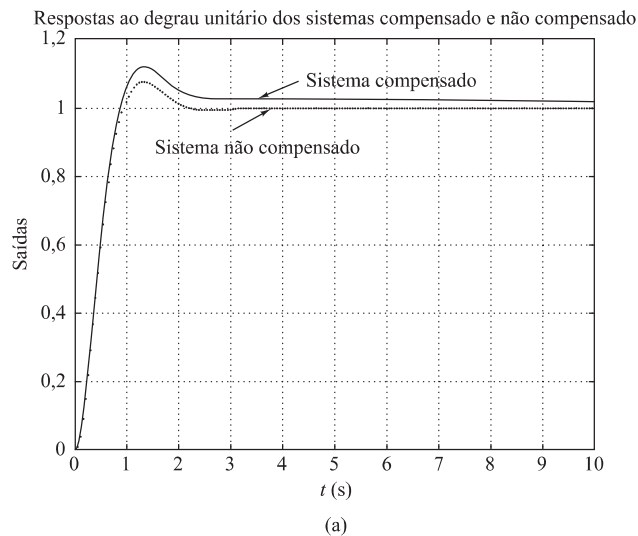
A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s + 1}{s^3 + 4,005s^2 + 10,02s + 1}$$

Para comparar as características da resposta transitória antes e depois da compensação, as respostas ao degrau unitário e à rampa unitária dos sistemas compensado e não compensado são mostradas nas figuras 6.85(a) e (b), respectivamente. O erro estacionário na resposta à rampa unitária é mostrado na Figura 6.85(c). O compensador por atraso de fase projetado é aceitável.

FIGURA 6.85

(a) Respostas ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado;
(b) respostas à rampa unitária de ambos os sistemas;
(c) respostas à rampa unitária que mostra os erros estacionários.



A.6.16 Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto é dada por:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$$

Projete um compensador que os polos de malha fechada dominantes estejam localizados em $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ e a constante de erro estático de velocidade K_v seja igual a 80 s^{-1} .

Solução. A constante de erro estático de velocidade do sistema não compensado é $K_v = \frac{10}{16} = 0,625$. Como desejamos $K_v = 80$, torna-se necessário multiplicar o ganho de malha aberta por 128. (Isso significa que necessitamos também de um compensador por atraso de fase.) O gráfico do lugar das raízes do sistema sem compensação mostra que não é possível trazer os polos dominantes de malha fechada para $-2 \pm j2\sqrt{3}$ apenas pelo ajuste do ganho. Veja a Figura 6.86. (Isso significa que também é necessário um compensador por avanço de fase.) Então, utilizaremos um compensador por atraso e avanço de fase.

Vamos supor que a função de transferência do compensador por atraso e avanço de fase seja:

$$G(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right)$$

onde $K_c = 128$. Isso porque

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c G(s) = K_c \frac{10}{16} = 80$$

e obtemos $K_c = 128$. A deficiência angular no polo desejado de malha fechada $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ é:

$$\text{Deficiência angular} = -120^\circ - 90^\circ - 30^\circ + 180^\circ = -60^\circ$$

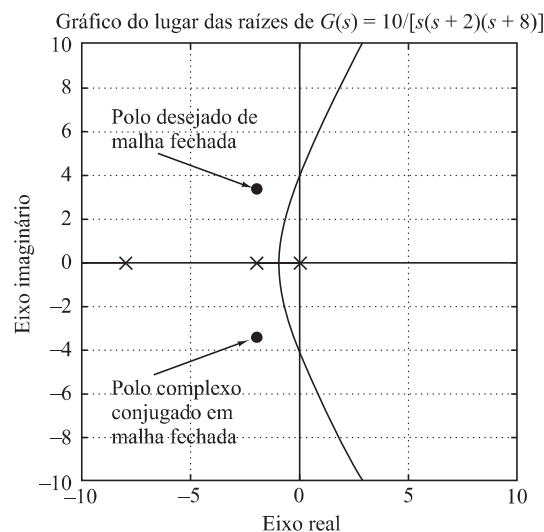
A parte de avanço de fase do compensador por atraso e avanço de fase deve contribuir com 60° . Para escolhermos T_1 , podemos utilizar o método gráfico apresentado na Seção 6.8.

A parte relativa ao avanço de fase deve satisfazer às seguintes condições:

$$\left| 128 \left(\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right) G(s_1) \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = 1$$

FIGURA 6.86

Gráfico do lugar das raízes de $G(s) = 10/[s(s+2)(s+8)]$.



e

$$\left| \frac{s_1 \frac{1}{T_1}}{s_1 \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = 60^\circ$$

A primeira condição pode ser simplificada como segue:

$$\left| \frac{s_1 \frac{1}{T_1}}{s_1 \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = \frac{1}{13,3333}$$

Utilizando o mesmo método da Seção 6.8, o zero ($s = 1/T_1$) e o polo ($s = \beta/T_1$) podem ser determinados como segue:

$$\frac{1}{T_1} = 3,70, \quad \frac{\beta}{T_1} = 53,35$$

Veja a Figura 6.87. O valor de β fica determinado como:

$$\beta = 14,419$$

Para a porção de atraso de fase do compensador, escolhemos:

$$\frac{1}{\beta T_2} = 0,01$$

Então,

$$\frac{1}{T_2} = 0,1442$$

Notando que:

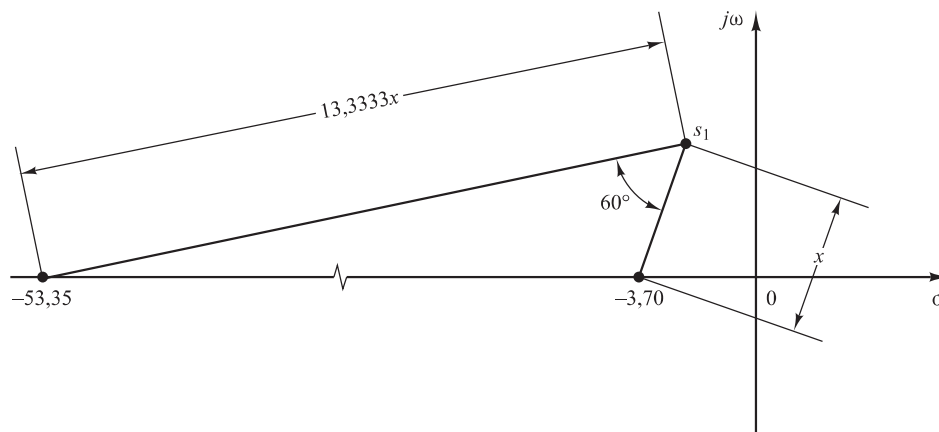
$$\left| \frac{s_1 + 0,1442}{s_1 + 0,01} \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = 0,9837$$

$$\left| \frac{s_1 + 0,1442}{s_1 + 0,01} \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = -1,697^\circ$$

a contribuição angular da parte de atraso de fase é $-1,697^\circ$ e a contribuição de módulo é 0,9837. Isso significa que os polos de malha fechada dominantes ficam próximos da localização desejada $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$. Assim, o compensador projetado,

FIGURA 6.87

Determinação gráfica do zero e do polo da parte de avanço de fase do compensador.



$$G_c(s) = 128 \left(\frac{s + 3,70}{s + 53,35} \right) \left(\frac{s + 0,1442}{s + 0,01} \right)$$

é aceitável. A função de transferência do ramo direto do sistema torna-se:

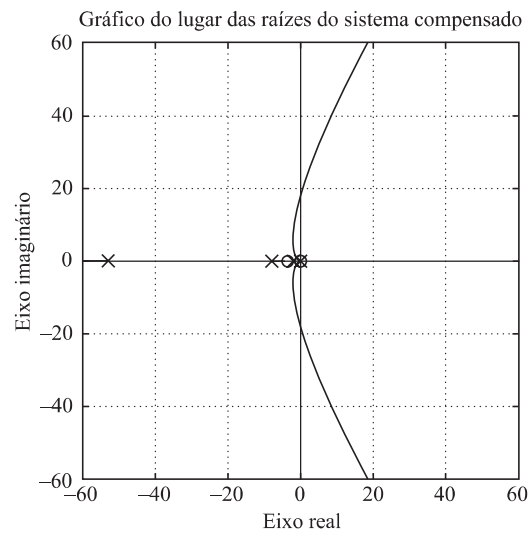
$$G_c(s)G(s) = \frac{1.280(s + 3,7)(s + 0,1442)}{s(s + 53,35)(s + 0,01)(s + 2)(s + 8)}$$

Um gráfico do lugar das raízes do sistema compensado é mostrado na Figura 6.88(a). Um gráfico ampliado do lugar das raízes próximo à origem é exposto na Figura 6.88(b).

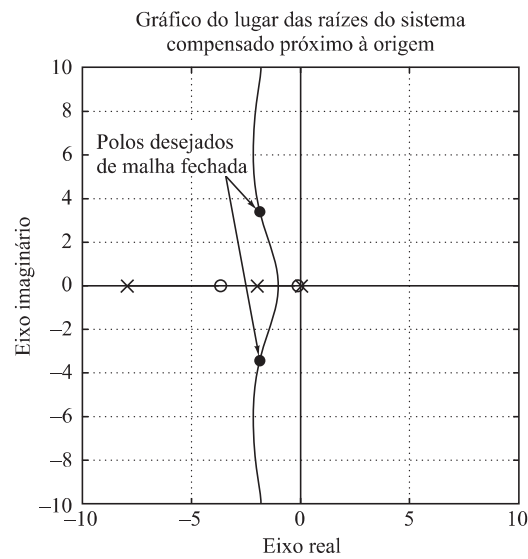
Para constatar a melhora do desempenho do sistema compensado, veja as respostas ao degrau unitário e à rampa unitária dos sistemas compensado e não compensado mostrados nas figuras 6.89(a) e (b), respectivamente.

FIGURA 6.88

(a) Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado;
 (b) gráfico do lugar das raízes próximo à origem.



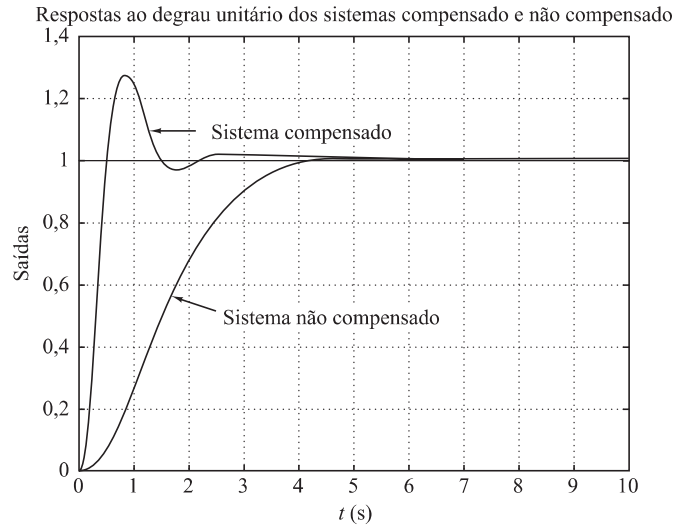
(a)



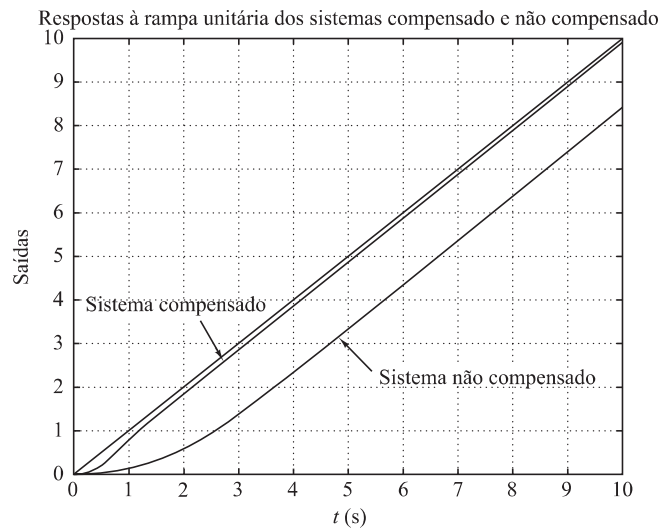
(b)

FIGURA 6.89

(a) Respostas ao degrau unitário dos sistemas compensado e não compensado;
 (b) respostas à rampa unitária de ambos os sistemas.



(a)

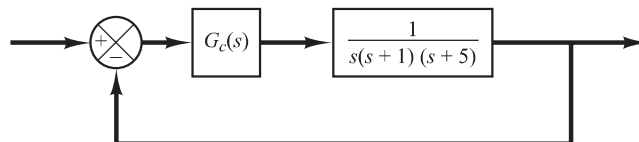


(b)

- A.6.17** Considere o sistema mostrado na Figura 6.90. Projete um compensador por atraso e avanço de fase de forma que a constante de erro estático de velocidade K_v seja 50 s^{-1} e o coeficiente de amortecimento ζ dos polos dominantes de malha fechada seja 0,5. (Escolha o zero da porção de avanço de fase do compensador por atraso e avanço, de modo que cancele o polo em $s = -1$ da planta.) Determine todos os polos de malha fechada do sistema compensado.

FIGURA 6.90

Sistema de controle.



Solução. Vamos utilizar o compensador por atraso e avanço de fase dado por:

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\beta T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)}$$

onde $\beta > 1$. Então,

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_c (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} \frac{1}{s(s+1)(s+5)} \\ &= \frac{K_c}{5} \end{aligned}$$

A especificação $K_v = 50 \text{ sec}^{-1}$ determina o valor de K_c ou

$$K_c = 250$$

Escolhemos agora $T_1 = 1$, para que $s + (1/T_1)$ cancele o termo $(s + 1)$ da planta. A parte de avanço de fase torna-se, então,

$$\frac{s + 1}{s + \beta}$$

Para a parte de atraso de fase do compensador é requerido:

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \div 1, \quad -5^\circ < \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 0^\circ$$

onde $s = s_1$ é um dos polos dominantes de malha fechada. Observando-se esses requisitos para a parte de atraso de fase do compensador, para $s = s_1$, a função de transferência de malha aberta torna-se:

$$G_c(s_1)G(s_1) \div K_c \left(\frac{s_1 + 1}{s_1 + \beta} \right) \frac{1}{s_1(s_1 + 1)(s_1 + 5)} = K_c \frac{1}{s_1(s_1 + \beta)(s_1 + 5)}$$

Então, em $s = s_1$, as seguintes condições de módulo e de ângulo devem ser satisfeitas:

$$\left| K_c \frac{1}{s_1(s_1 + \beta)(s_1 + 5)} \right| = 1 \quad (6.32)$$

$$\angle K_c \frac{1}{s_1(s_1 + \beta)(s_1 + 5)} = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (6.33)$$

onde $k = 0, 1, 2, \dots$. Nas equações 6.32 e 6.33, β e s_1 são desconhecidos. Sendo o coeficiente de amortecimento dos polos dominantes de malha fechada especificado como $\zeta = 0,5$, o polo de malha fechada $s = s_1$ pode ser escrito como:

$$s_1 = -x + j\sqrt{3}x$$

onde x ainda é indeterminado.

Note que a condição de módulo, Equação 6.32, pode ser reescrita como:

$$\left| \frac{K_c}{(-x + j\sqrt{3}x)(-x + \beta + j\sqrt{3}x)(-x + 5 + j\sqrt{3}x)} \right| = 1$$

Observando que $K_c = 250$, temos:

$$x\sqrt{(\beta - x)^2 + 3x^2} \sqrt{(5 - x)^2 + 3x^2} = 125 \quad (6.34)$$

A condição de ângulo, Equação 6.33, pode ser reescrita como:

$$\left| K_c \frac{1}{(-x + j\sqrt{3}x)(-x + \beta + j\sqrt{3}x)(-x + 5 + j\sqrt{3}x)} \right|$$

$$= -120^\circ - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{-x + \beta}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{-x + 5}\right) = -180^\circ$$

ou

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{-x + \beta}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{-x + 5}\right) = 60^\circ \quad (6.35)$$

Devemos resolver as equações 6.34 e 6.35 para β e x . Utilizando o método de tentativa e erro, é possível obtermos os seguintes resultados:

$$\beta = 16,025, \quad x = 1,9054$$

Assim,

$$s_1 = -1,9054 + j\sqrt{3}(1,9054) = -1,9054 + j3,3002$$

A parte de atraso de fase do compensador por atraso e avanço de fase pode ser determinada a seguir. Notando que o polo e o zero da parte de atraso de fase do compensador devem estar localizados perto da origem, podemos escolher:

$$\frac{1}{\beta T_2} = 0,01$$

Ou seja,

$$\frac{1}{T_2} = 0,16025 \quad \text{ou} \quad T_2 = 6,25$$

Com a escolha de $T_2 = 6,25$, encontramos:

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| = \left| \frac{-1,9054 + j3,3002 + 0,16025}{-1,9054 + j3,3002 + 0,01} \right|$$

$$= \left| \frac{-1,74515 + j3,3002}{-1,89054 + j3,3002} \right| = 0,98 \div 1 \quad (6.36)$$

e

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| = \left| \frac{-1,9054 + j3,3002 + 0,16025}{-1,9054 + j3,3002 + 0,01} \right|$$

$$= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3,3002}{-1,74515}\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3,3002}{-1,89054}\right) = -1,937^\circ \quad (6.37)$$

Como

$$-5^\circ < -1,937^\circ < 0$$

nossa escolha de $T_2 = 6,25$ é aceitável. Então, o compensador por atraso e avanço de fase que acabamos de projetar pode ser escrito como:

$$G_c(s) = 250 \left(\frac{s+1}{s+16,025} \right) \left(\frac{s+0,16025}{s+0,01} \right)$$

Consequentemente, o sistema compensado tem a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G_c(s)G(s) = \frac{250(s+0,16025)}{s(s+0,01)(s+5)(s+16,025)}$$

Um gráfico do lugar das raízes do sistema compensado é apresentado na Figura 6.91(a). Uma ampliação do gráfico do lugar das raízes próximo à origem é mostrada na Figura 6.91(b).

A função de transferência de malha fechada torna-se:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{250(s + 0,16025)}{s(s + 0,01)(s + 5)(s + 16,025) + 250(s + 0,16025)}$$

Os polos de malha fechada ficam localizados em:

$$s = -1,8308 \pm j3,2359$$

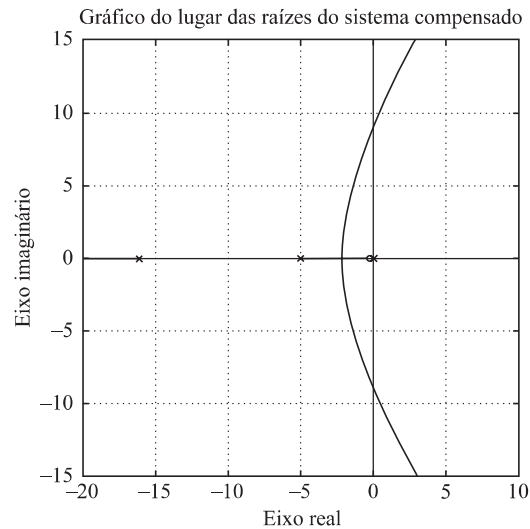
$$s = -0,1684$$

$$s = -17,205$$

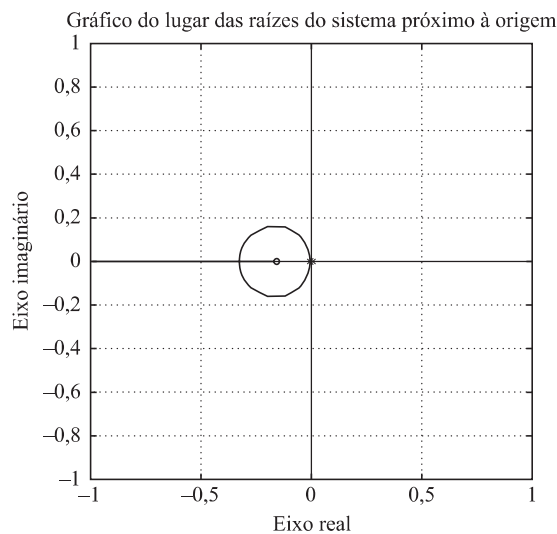
Note que os polos dominantes de malha fechada $s = -1,8308 \pm j3,2359$ diferem dos polos dominantes de malha fechada $s = \pm s_1$ admitidos no cálculo de β e T_2 . Pequenos desvios dos polos dominantes de malha fechada $= -1,8308 \pm j3,2359$ em relação a $s = \pm s_1 = -1,9054 \pm j3,3002$ são causados pelas aproximações ocorridas na determinação da parte de atraso de fase do compensador. (Veja as equações 6.36 e 6.37.)

FIGURA 6.91

(a) Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado;
(b) gráfico do lugar das raízes próximo à origem.



(a)

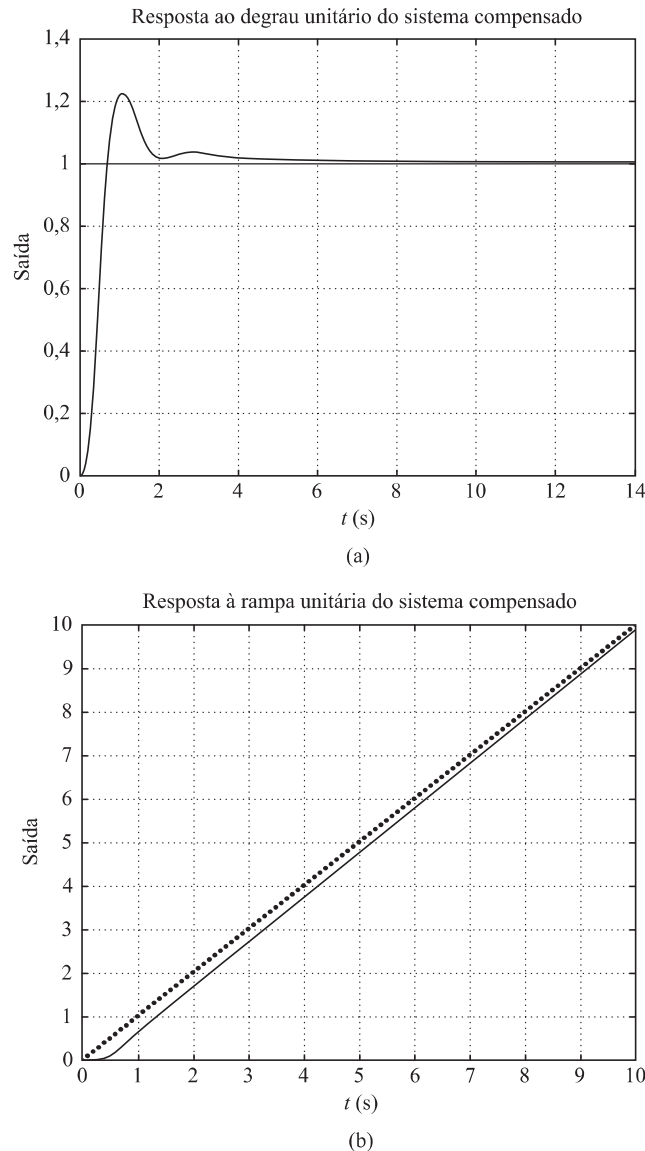


(b)

As figuras 6.92(a) e (b) mostram a resposta ao degrau unitário e à rampa unitária, respectivamente, do sistema projetado. Note que o polo de malha fechada em $s = -0,1684$ quase cancela o zero em $s = -0,16025$. Entretanto, esse par de polo e zero de malha fechada localizado próximo à origem produz uma cauda alongada de pequena amplitude. Como o polo de malha fechada em $s = -17,205$ está localizado muito longe à esquerda em relação aos polos de malha fechada em $s = -1,8308 \pm j3,2359$, o efeito desse polo real na resposta do sistema é muito pequeno. Portanto, os polos de malha fechada em $s = -1,8308 \pm j3,2359$ são, na verdade, os polos dominantes de malha fechada que determinam as características da resposta do sistema de malha fechada. Na resposta à rampa unitária, o erro estacionário de acompanhamento à rampa de entrada torna-se $1/K_v = \frac{1}{50} = 0,02$.

FIGURA 6.92

(a) Resposta ao degrau unitário do sistema compensado;
(b) resposta à rampa unitária do sistema compensado.

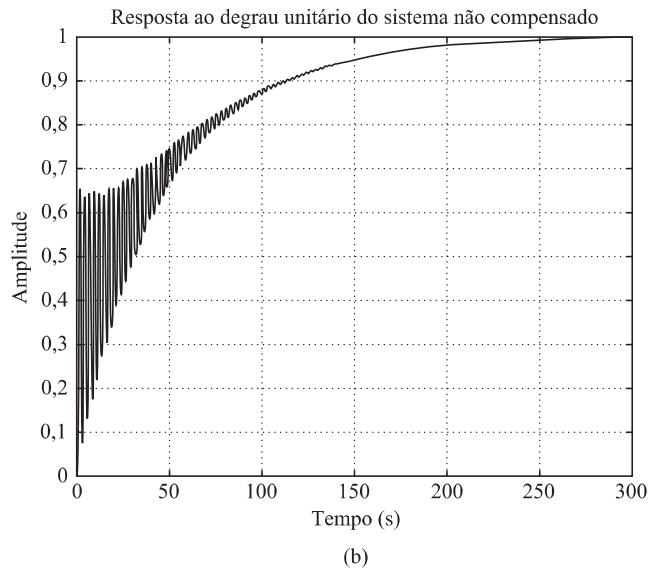
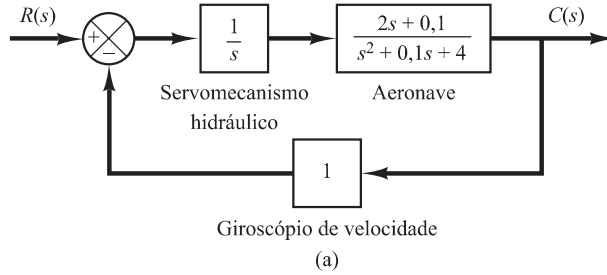


A.6.18 A Figura 6.93(a) é um diagrama de blocos do modelo de um sistema de controle de variação de posição. A função de transferência de malha fechada desse sistema é:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{2s + 0,1}{s^3 + 0,1s^2 + 6s + 0,1} \\ &= \frac{2(s + 0,05)}{(s + 0,0417 + j2,4489)(s + 0,0417 - j2,4489)(s + 0,0167)} \end{aligned}$$

FIGURA 6.93

(a) Sistema de controle de variação de posição;
 (b) resposta ao degrau unitário.



A resposta ao degrau unitário desse sistema é mostrada na Figura 6.93(b). A resposta mostra oscilações de alta frequência no início, em razão dos polos em $s = -0,0417 \pm j2,4489$. A resposta é dominada pelo polo em $s = -0,0167$. O tempo de acomodação é aproximadamente 240 s.

É desejável acelerar a resposta e também eliminar o modo oscilatório no início da resposta. Projete um compensador adequado que os polos dominantes de malha fechada estejam em $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$.

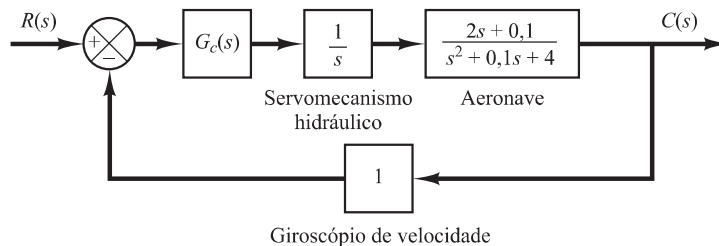
Solução. A Figura 6.94 mostra um diagrama de blocos do sistema compensado. Note que o zero de malha aberta em $s = -0,05$ e o polo em $s = 0$ geram um polo de malha fechada entre $s = 0$ e $s = -0,05$. Esse polo de malha fechada torna-se um polo dominante de malha fechada e faz que a resposta seja muito lenta. Então, é necessário substituir esse zero por um zero que esteja localizado longe do eixo $j\omega$, por exemplo, um zero em $s = -4$.

Agora, escolhemos um compensador da seguinte maneira:

$$G_c(s) = \hat{G}_c(s) \frac{s + 4}{2s + 0,1}$$

FIGURA 6.94

Sistema de controle de variação de posição.



Então, a função de transferência de malha fechada do sistema compensado torna-se:

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s) &= \hat{G}_c(s) \frac{s+4}{2s+0,1} \frac{1}{s} \frac{2s+0,1}{s^2+0,1s+4} \\ &= \hat{G}_c(s) \frac{s+4}{s(s^2+0,1s+4)} \end{aligned}$$

Para determinar $\hat{G}_c(s)$ pelo método do lugar das raízes, necessitamos encontrar a deficiência angular no polo desejado de malha fechada em $s = -2 + j2\sqrt{3}$. A deficiência angular pode ser encontrada como segue:

$$\text{Deficiência angular} = -143,088^\circ - 120^\circ - 109,642^\circ + 60^\circ + 180^\circ = -132,73^\circ$$

Portanto, o compensador de avanço $\hat{G}_c(s)$ deve acrescentar $132,73^\circ$. Como a deficiência angular é $-132,73^\circ$, são necessários dois compensadores por avanço de fase, cada um contribuindo com $66,365^\circ$. Assim, $\hat{G}_c(s)$ terá a seguinte forma:

$$\hat{G}_c(s) = K_c \left(\frac{s+s_z}{s+s_p} \right)^2$$

Suponha que tenham sido escolhidos dois zeros em $s = -2$. Então, os dois polos dos compensadores podem ser obtidos a partir da relação

$$\frac{3,4641}{s_p - 2} = \text{tg}(90^\circ - 66,365^\circ) = 0,4376169$$

ou

$$\begin{aligned} s_p &= 2 + \frac{3,4641}{0,4376169} \\ &= 9,9158 \end{aligned}$$

(Veja a Figura 6.95.) Portanto,

$$\hat{G}_c(s) = K_c \left(\frac{s+2}{s+9,9158} \right)^2$$

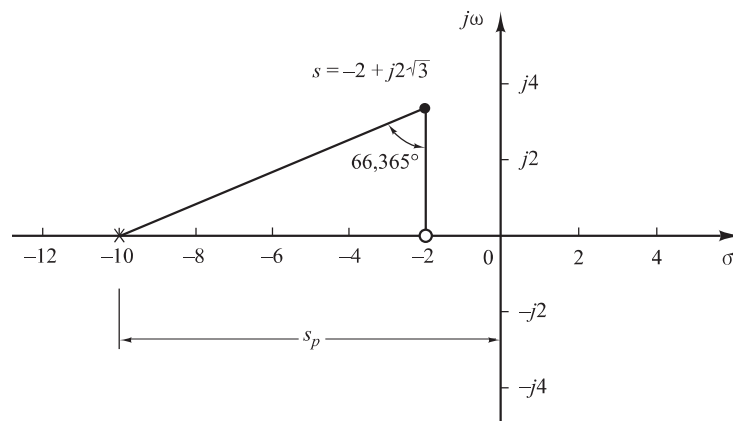
O compensador completo $G_c(s)$ para esse sistema será:

$$G_c(s) = \hat{G}_c(s) \frac{s+4}{2s+0,1} = K_c \frac{(s+2)^2}{(s+9,9158)^2} \frac{s+4}{2s+0,1}$$

O valor de K_c pode ser determinado com base na condição de módulo. Como a função de transferência de malha aberta é:

FIGURA 6.95

Polo e zero de $\hat{G}_c(s)$.



$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{(s+2)^2(s+4)}{(s+9,9158)^2 s(s^2+0,1s+4)}$$

a condição de módulo torna-se:

$$\left| K_c \frac{(s+2)^2(s+4)}{(s+9,9158)^2 s(s^2+0,1s+4)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$

Então,

$$K_c = \left| \frac{(s+9,9158)^2 s(s^2+0,1s+4)}{(s+2)^2(s+4)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 88,0227$$

Assim, o compensador $G_c(s)$ torna-se:

$$G_c(s) = 88,0227 \frac{(s+2)^2(s+4)}{(s+9,9158)^2(2s+0,1)}$$

A função de transferência de malha aberta é dada por:

$$G_c(s)G(s) = \frac{88,0227(s+2)^2(s+4)}{(s+9,9158)^2 s(s^2+0,1s+4)}$$

O gráfico do lugar das raízes do sistema compensado é mostrado na Figura 6.96. Os polos de malha fechada desse sistema compensado estão indicados no gráfico. Os polos de malha fechada, raízes da equação característica

$$(s+9,9158)^2 s(s^2+0,1s+4) + 88,0227(s+2)^2(s+4) = 0$$

são os seguintes:

$$s = -2,0000 \pm j3,4641$$

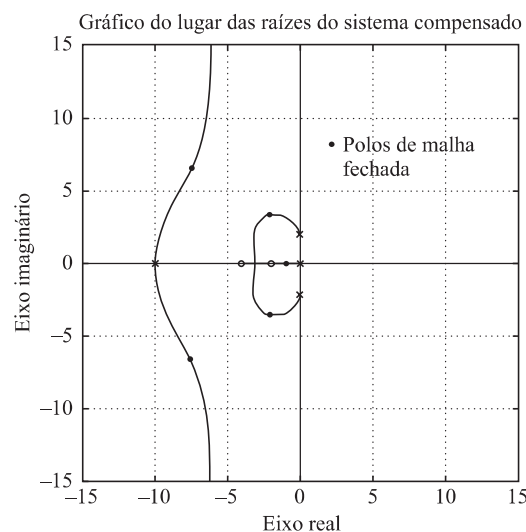
$$s = -7,5224 \pm j6,5326$$

$$s = -0,8868$$

Agora que o compensador foi projetado, vamos examinar as características da resposta transitória utilizando o MATLAB. A função de transferência de malha fechada é dada por:

FIGURA 6.96

Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado.

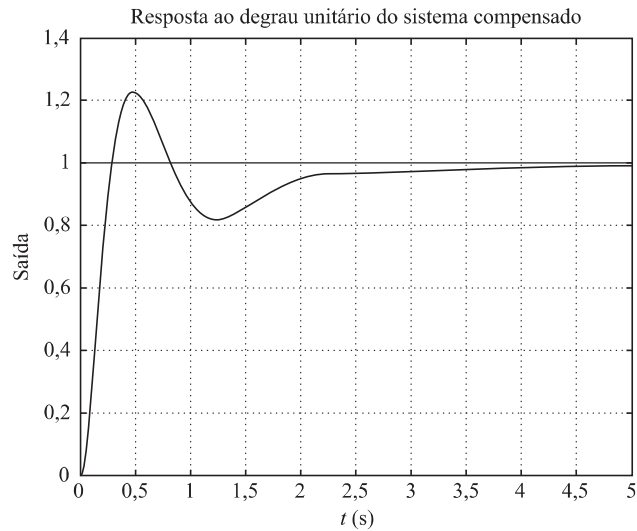


$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{88,0227(s+2)^2(s+4)}{(s+9,9158)^2 s(s^2+0,1s+4) + 88,0227(s+2)^2(s+4)}$$

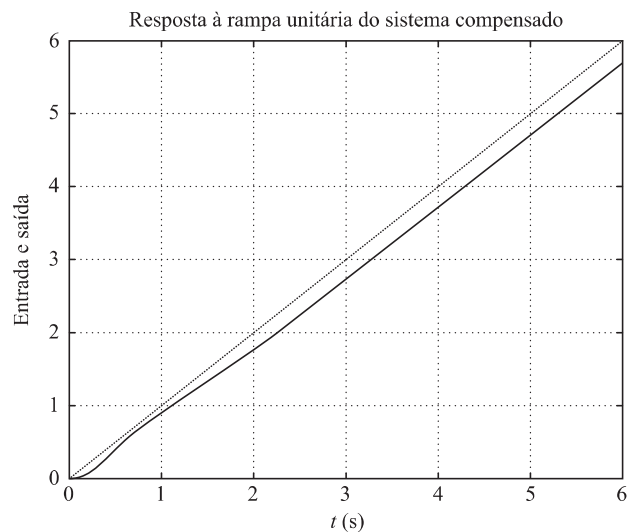
As figuras 6.97(a) e (b) mostram os gráficos de resposta ao degrau unitário e da resposta à rampa unitária do sistema compensado. Essas curvas de resposta mostram que o sistema projetado é aceitável.

FIGURA 6.97

(a) Resposta ao degrau unitário do sistema compensado;
(b) resposta à rampa unitária do sistema compensado.



(a)



(b)

A.6.19 Considere o sistema mostrado na Figura 6.98(a). Determine o valor de a de modo que o coeficiente de amortecimento ζ dos polos dominantes de malha fechada seja 0,5.

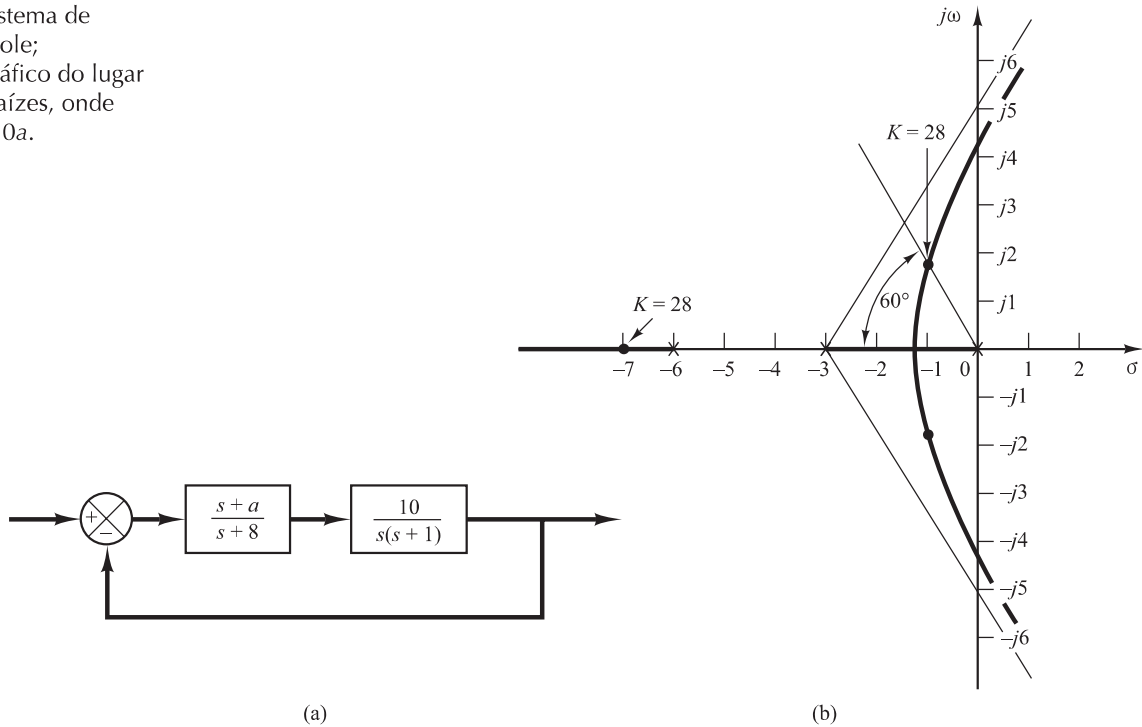
Solução. A equação característica é:

$$1 + \frac{10(s+a)}{s(s+1)(s+8)} = 0$$

A variável a não é um fator de multiplicação. Então, devemos modificar a equação característica. Assim, a equação característica pode ser escrita como:

FIGURA 6.98

(a) Sistema de controle;
 (b) gráfico do lugar das raízes, onde $K = 10a$.



$$s^3 + 9s^2 + 18s + 10a = 0$$

reescrevemos essa equação de modo que a apareça como um fator de multiplicação como segue:

$$1 + \frac{10a}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0$$

Defina:

$$10a = K$$

Então, a equação característica torna-se:

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0$$

Note que a forma dessa equação característica é adequada para a construção do lugar das raízes. Esse sistema possui três polos e nenhum zero. Os três polos estão em $s = 0$, $s = -3$ e $s = -6$. Existe um ramo do lugar das raízes sobre o eixo real, entre os pontos $s = 0$ e $s = -3$. Existe também outro ramo entre os pontos $s = -6$ e $s = -\infty$.

As assíntotas do lugar das raízes serão encontradas como segue:

$$\hat{\text{Ângulos das assíntotas}} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3} = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$$

A intersecção das assíntotas com o eixo real é obtida a partir de:

$$s = -\frac{0 + 3 + 6}{3} = -3$$

Os pontos de partida do eixo real e de chegada no eixo real podem ser determinados a partir de $dK/ds = 0$, onde

$$K = -(s^3 + 9s^2 + 18s)$$

Agora, definimos:

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 18s + 18) = 0$$

de onde vem:

$$s^2 + 6s + 6 = 0$$

ou

$$s = -1,268, \quad s = -4,732$$

O ponto $s = -1,268$ está sobre um ramo do lugar das raízes. Conseqüentemente, o ponto $s = -1,268$ é de fato um ponto de partida do eixo real. Entretanto, o ponto $s = -4,732$ não está sobre o lugar das raízes e, portanto, não é ponto nem de partida nem de chegada.

Em seguida, vamos determinar os pontos em que os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário. Substituindo $s = j\omega$ na equação característica, que é:

$$s^3 + 9s^2 + 18s + K = 0$$

resulta em:

$$(j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 18(j\omega) + K = 0$$

ou

$$(K - 9\omega^2) + j\omega(18 - \omega^2) = 0$$

de onde obtemos:

$$\omega = \pm 3\sqrt{2}, \quad K = 9\omega^2 = 162 \quad \text{ou} \quad \omega = 0, \quad K = 0$$

Os pontos de cruzamento estão em $\omega = \pm 3\sqrt{2}$ e o valor correspondente do ganho K é 162. Um ramo do lugar das raízes também toca o eixo imaginário em $\omega = 0$. A Figura 6.98(b) mostra um esboço do lugar das raízes do sistema.

Como o coeficiente de amortecimento dos polos dominantes de malha fechada foi especificado como 0,5, o polo de malha fechada desejado no semiplano superior do plano s fica localizado na intersecção do ramo do lugar das raízes nesse semiplano s com a reta que tem uma inclinação de 60° em relação ao semieixo real negativo. Os polos dominantes de malha fechada desejados ficam localizados em:

$$s = -1 + j1,732, \quad s = -1 - j1,732$$

Nesses pontos, o valor do ganho K é 28. Então,

$$a = \frac{K}{10} = 2,8$$

Como o sistema possui dois ou mais polos do que zeros (de fato, três polos e nenhum zero), o terceiro polo pode ser localizado no eixo real negativo com base no fato de que a soma dos três polos de malha fechada seja -9 . Então, conclui-se que o terceiro polo está em:

$$s = -9 - (-1 + j1,732) - (-1 - j1,732)$$

ou

$$s = -7$$

A.6.20 Considere o sistema mostrado na Figura 6.99(a). Desenhe o lugar das raízes do sistema com realimentação de velocidade em que o ganho k varia de zero a infinito. Determine o valor de k , de modo que os polos de malha fechada tenham o coeficiente de amortecimento ζ igual a 0,7.

Solução. A função de transferência de malha aberta é:

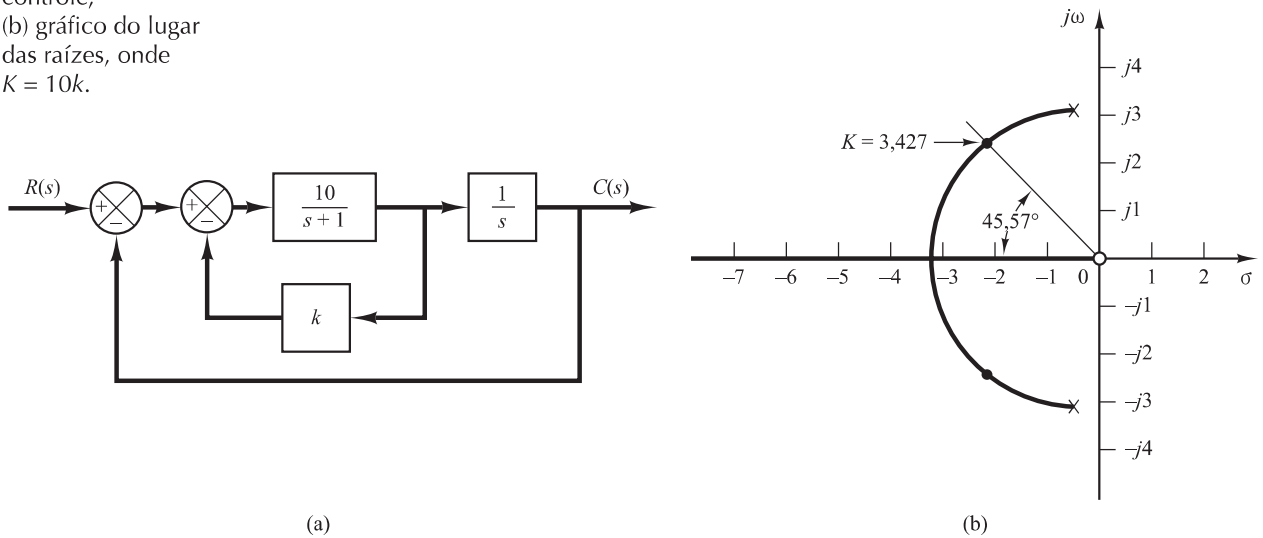
$$\text{Função de transferência de malha aberta} = \frac{10}{(s + 1 + 10k)s}$$

Como k não é um fator de multiplicação, modificamos a equação de modo que k apareça como tal. Sendo a equação característica

$$s^2 + s + 10ks + 10 = 0$$

FIGURA 6.99

(a) Sistema de controle;
 (b) gráfico do lugar das raízes, onde $K = 10k$.



reescrevemos a equação como segue:

$$1 + \frac{10ks}{s^2 + s + 10} = 0 \tag{6.38}$$

Defina:

$$10k = K$$

Então, a Equação 6.38 torna-se

$$1 + \frac{Ks}{s^2 + s + 10} = 0$$

Observe que o sistema tem um zero em $s = 0$ e dois polos em $s = -0,5 \pm j3,1225$. Como esse sistema possui dois polos e um zero, é possível que exista um lugar das raízes circular. De fato, esse sistema tem um lugar das raízes circular, como veremos. Como a condição de ângulo é:

$$\angle \frac{Ks}{s^2 + s + 10} = \pm 180^\circ (2k + 1)$$

temos:

$$\angle s - \angle s + 0,5 + j3,1225 - \angle s + 0,5 - j3,1225 = \pm 180^\circ (2k + 1)$$

Substituindo $s = \sigma + j\omega$ nessa última equação e reorganizando os termos, obtemos:

$$\angle \sigma + 0,5 + j(\omega + 3,1225) + \angle \sigma + 0,5 + j(\omega - 3,1225) = \angle \sigma + j\omega \pm 180^\circ (2k + 1)$$

que pode ser reescrita como:

$$\text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega + 3,1225}{\sigma + 0,5} \right) + \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega - 3,1225}{\sigma + 0,5} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma} \right) \pm 180^\circ (2k + 1)$$

Considerando as tangentes de ambos os lados dessa última equação, obtemos:

$$\frac{\frac{\omega + 3,1225}{\sigma + 0,5} + \frac{\omega - 3,1225}{\sigma + 0,5}}{-1 \left(\frac{\omega + 3,1225}{\sigma + 0,5} \right) \left(\frac{\omega - 3,1225}{\sigma + 0,5} \right)} = \frac{\omega}{\sigma}$$

que pode ser simplificada para:

$$\frac{2\omega(\sigma + 0,5)}{(\sigma + 0,5)^2 - (\omega^2 - 3,1225^2)} = \frac{\omega}{\sigma}$$

ou

$$\omega(\sigma^2 - 10 + \omega^2) = 0$$

do que resulta:

$$\omega = 0 \text{ ou } \sigma^2 + \omega^2 = 10$$

Note que $\omega = 0$ corresponde ao eixo real. O eixo real negativo (entre $s = 0$ e $s = -\infty$) corresponde a $K \geq 0$ e o eixo real positivo corresponde a $K < 0$. A equação

$$\sigma^2 + \omega^2 = 10$$

é uma equação de uma circunferência com centro em $\sigma = 0$, $\omega = 0$ e raio igual a $\sqrt{10}$. A parte dessa circunferência que está à esquerda dos polos complexos corresponde ao lugar das raízes para $K > 0$. (A parte da circunferência que fica à direita dos polos complexos corresponde ao lugar das raízes para $K < 0$.) A Figura 6.99(b) mostra o gráfico do lugar das raízes para $K > 0$.

Como desejamos $\zeta = 0,7$ para os polos de malha fechada, determinamos a intersecção do ramo circular do lugar das raízes com uma reta que forma um ângulo de $45,57^\circ$ (note que $\cos 45,57^\circ = 0,7$) com o semieixo real negativo. A intersecção está em $s = -2,214 + j2,258$. O ganho K correspondente a esse ponto é 3,427. Então, o valor desejado do ganho k do ramo de realimentação de velocidade é:

$$k = \frac{K}{10} = 0,3427$$

| Problemas

B.6.1 Trace o gráfico do lugar das raízes do sistema de controle de malha fechada, sendo

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2}, \quad H(s) = 1$$

B.6.2 Trace o gráfico do lugar das raízes do sistema de controle de malha fechada, sendo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s^2+4s+5)}, \quad H(s) = 1$$

B.6.3 Trace o gráfico do lugar das raízes do sistema, sendo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+0,5)(s^2+0,6s+10)}, \quad H(s) = 1$$

B.6.4 Trace o gráfico do lugar das raízes para um sistema de controle, sendo

$$G(s) = \frac{K(s^2+6s+10)}{s^2+2s+10}, \quad H(s) = 1$$

são arcos do círculo cujo centro é a origem e cujo raio é igual a $\sqrt{10}$.

B.6.5 Trace o gráfico do lugar das raízes para um sistema de controle de malha fechada, sendo

$$G(s) = \frac{K(s+0,2)}{s^2(s+3,6)}, \quad H(s) = 1$$

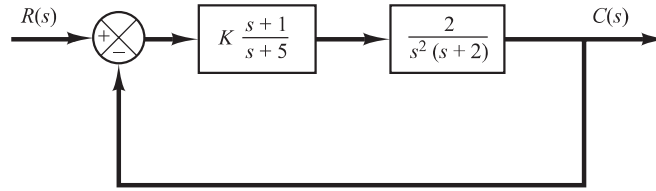
B.6.6 Trace o gráfico do lugar das raízes para um sistema de controle de malha fechada, sendo

$$G(s) = \frac{K(s+9)}{s(s^2+4s+11)}, \quad H(s) = 1$$

Situe os polos de malha fechada no lugar das raízes cujos polos dominantes tenham coeficiente de amortecimento igual a 0,5. Determine o valor correspondente ao ganho K .

- B.6.7** Trace o gráfico do lugar das raízes do sistema mostrado na Figura 6.100. Determine o intervalo de valores do ganho K que corresponde à estabilidade.

FIGURA 6.100
Sistema de controle.



- B.6.8** Considere um sistema de controle com realimentação unitária com a seguinte função de transferência de ramo direto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

Desenhe o lugar das raízes do sistema. Se o valor do ganho K for igual a 2, onde se situam os polos de malha fechada?

- B.6.9** Considere o sistema no qual a função de transferência de malha aberta é dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - 0,6667)}{s^4 + 3,3401s^3 + 7,0325s^2}$$

Mostre que a equação para as assíntotas é dada por

$$G_a(s)H_a(s) = \frac{K}{s^3 + 4,0068s^2 + 5,3515s + 2,3825}$$

Trace o gráfico do lugar das raízes e das assíntotas do sistema, utilizando o MATLAB.

- B.6.10** Considere o sistema com realimentação unitária em que a função de transferência de ramo direto é:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)}$$

O lugar de ganho constante do sistema para dado valor de K é definido pela seguinte equação:

$$\left| \frac{K}{s(s + 1)} \right| = 1$$

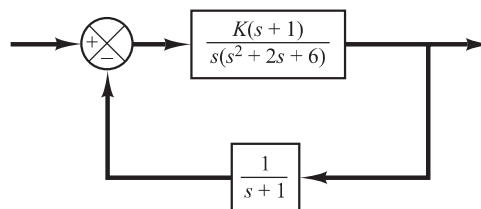
Mostre que os lugares de ganho constante para $0 \leq K \leq \infty$ podem ser dados por:

$$[\sigma(\sigma + 1) + \omega^2]^2 + \omega^2 = K^2$$

Esboce os lugares de ganho constante para $K = 1, 2, 5, 10$ e 20 no plano s .

- B.6.11** Considere o sistema mostrado na Figura 6.101. Trace o gráfico do lugar das raízes utilizando o MATLAB. Situe os polos de malha fechada para o ganho K for igual a 2.

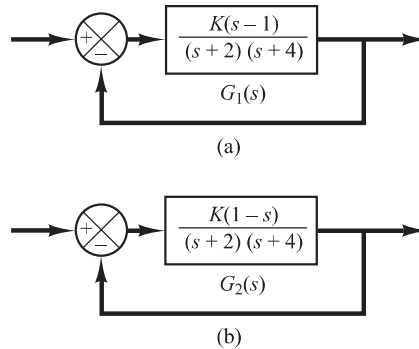
FIGURA 6.101
Sistema de controle.



B.6.12 Trace os gráficos do lugar das raízes para os sistemas de fase não mínima mostrados na Figura 6.102(a) e (b), respectivamente.

FIGURA 6.102

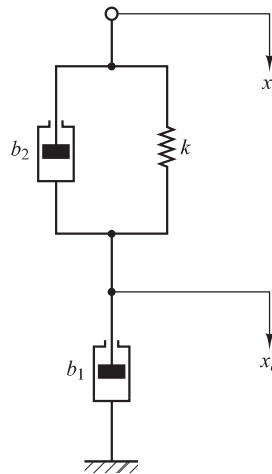
(a) e (b) Sistema de fase não mínima.



B.6.13 Considere o sistema mecânico mostrado na Figura 6.103, que consiste em uma mola e dois amortecedores. Obtenha a função de transferência do sistema. O deslocamento x_i é a entrada e o deslocamento x_o é a saída. Nesse sistema, a estrutura mecânica é de avanço de fase ou de atraso de fase?

FIGURA 6.103

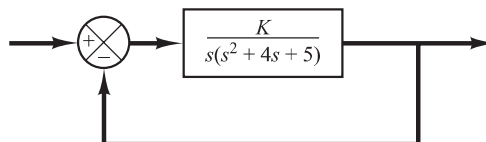
Sistema mecânico.



B.6.14 Considere o sistema mostrado na Figura 6.104. Desenhe o gráfico do lugar das raízes do sistema. Determine o valor de K para que o coeficiente de amortecimento ζ dos polos dominantes de malha fechada seja 0,5. Em seguida, determine todos os polos de malha fechada. Trace o diagrama das curvas de resposta ao degrau unitário usando o MATLAB.

FIGURA 6.104

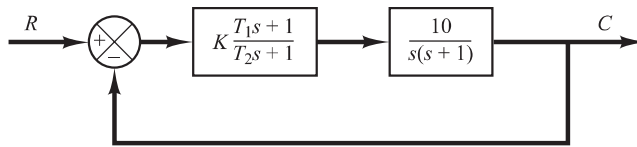
Sistema de controle.



- B.6.15** Determine os valores de K , T_1 e T_2 do sistema mostrado na Figura 6.105 para que os polos dominantes de malha fechada tenham coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ e a frequência natural não amortecida $\omega_n = 3$ rad/s.

FIGURA 6.105

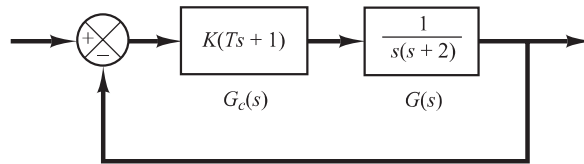
Sistema de controle.



- B.6.16** Considere o sistema de controle mostrado na Figura 6.106. Determine o ganho K e a constante de tempo T do controlador $G_c(s)$ tal que os polos de malha fechada estejam localizados em $s = -2 \pm j2$.

FIGURA 6.106

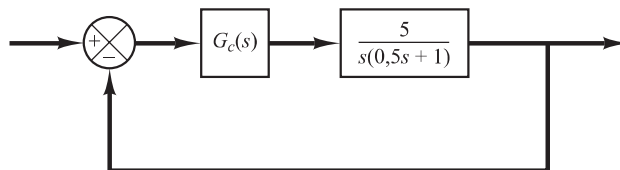
Sistema de controle.



- B.6.17** Considere o sistema mostrado na Figura 6.107. Projete um compensador de avanço de fase que os polos dominantes estejam localizados em $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$. Trace a curva de resposta ao degrau unitário do sistema projetado com o MATLAB.

FIGURA 6.107

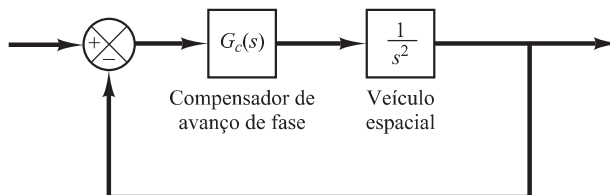
Sistema de controle.



- B.6.18** Considere o sistema mostrado na Figura 6.108. Projete um compensador de modo que os polos dominantes de malha fechada fiquem localizados em $s = -1 \pm j1$.

FIGURA 6.108

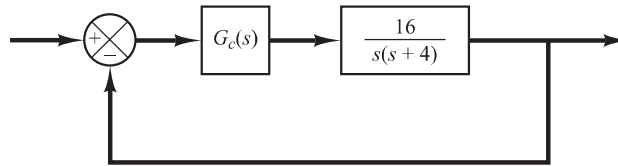
Sistema de controle.



- B.6.19** Considerando o sistema mostrado na Figura 6.109, projete um compensador cuja constante de erro estático K_v seja 20 s^{-1} sem modificação apreciável da localização original ($s = -2 \pm j2\sqrt{3}$) do par de polos complexos conjugados de malha fechada.

FIGURA 6.109

Sistema de controle.



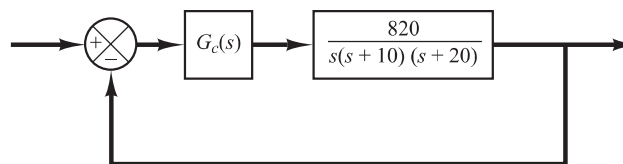
- B.6.20** Considere o sistema de posicionamento angular mostrado na Figura 6.110. Os polos dominantes de malha fechada estão localizados em $s = -3,60 \pm j4,80$. O coeficiente de amortecimento ζ dos polos dominantes de malha fechada é $0,6$. A constante de erro estático de velocidade K_v é $4,1 \text{ s}^{-1}$, o que significa que, para uma entrada em rampa de $360^\circ/\text{s}$, o erro estático de acompanhamento da rampa é:

$$e_v = \frac{\theta_i}{K_v} = \frac{360^\circ/\text{s}}{4,1 \text{ s}^{-1}} = 87,8^\circ$$

Deseja-se diminuir e_v para um décimo do valor atual ou aumentar o valor da constante de erro estático de velocidade K_v para 41 s^{-1} . Deseja-se também manter o coeficiente de amortecimento ζ dos polos dominantes de malha fechada em $0,6$. É permitida uma pequena modificação na frequência natural não amortecida ω_n dos polos dominantes de malha fechada. Projete um compensador por atraso de fase apropriado para aumentar a constante de erro estático de velocidade conforme desejado.

FIGURA 6.110

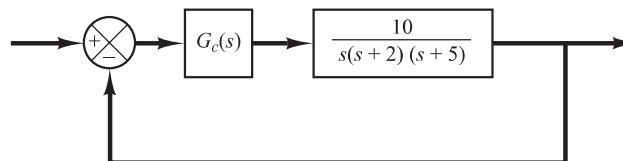
Sistema de posicionamento angular.



- B.6.21** Considere o sistema de controle mostrado na Figura 6.111. Projete um compensador de modo que os polos dominantes de malha fechada estejam localizados em $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ e a constante de erro estático de velocidade K_v seja 50 s^{-1} .

FIGURA 6.111

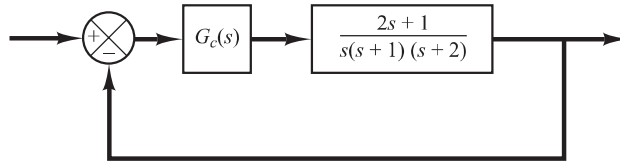
Sistema de controle.



- B.6.22** Considere o sistema mostrado na Figura 6.112. Projete um compensador tal que a curva de resposta ao degrau unitário apresente um máximo sobressinal de 30% ou menos e o tempo de acomodação seja de 3 s ou menos.

FIGURA 6.112

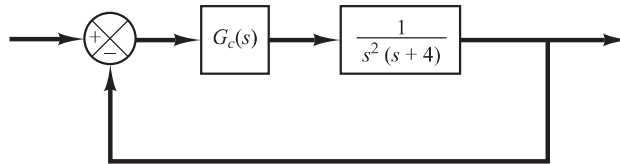
Sistema de controle.



- B.6.23** Considere o sistema de controle mostrado na Figura 6.113. Projete um compensador de modo que a curva de resposta ao degrau unitário apresente um máximo sobressinal de 25% ou menos e o tempo de acomodação seja de 5 s ou menos.

FIGURA 6.113

Sistema de controle.

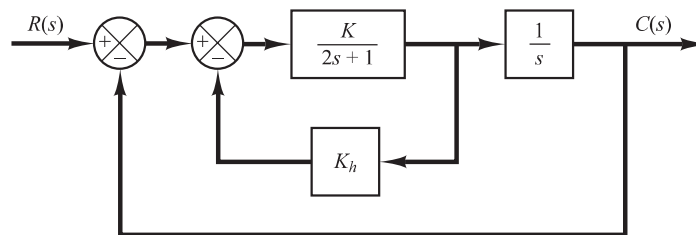


- B.6.24** Considere o sistema de controle com realimentação de velocidade mostrado na Figura 6.114. Determine os valores do ganho do amplificador K e do ganho da realimentação de velocidade K_h , de modo que sejam satisfeitas as seguintes especificações:

1. Coeficiente de amortecimento dos polos de malha fechada de 0,5
2. Tempo de acomodação ≤ 2 s
3. Constante de erro estático de velocidade $K_v \geq 50 \text{ s}^{-1}$
4. $0 < K_h < 1$

FIGURA 6.114

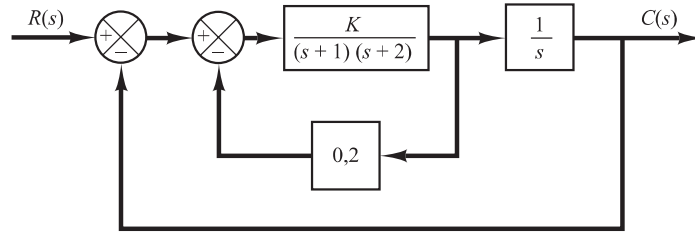
Sistema de controle.



- B.6.25** Considere o sistema mostrado na Figura 6.115. O sistema possui realimentação de velocidade. Determine o valor do ganho K de modo que os polos dominantes de malha fechada tenham um coeficiente de amortecimento igual a 0,5. Utilizando o ganho K assim determinado, obtenha a resposta ao degrau unitário do sistema.

FIGURA 6.115

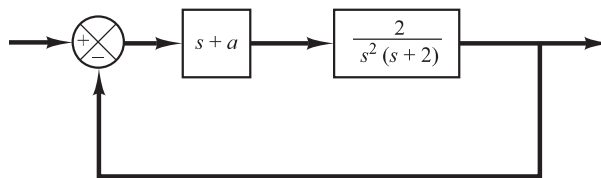
Sistema de controle.



- B.6.26** Considere o sistema mostrado na Figura 6.116. Construa o gráfico do lugar das raízes quando a varia de zero a ∞ . Determine o valor de a para que o coeficiente de amortecimento dos polos dominantes de malha fechada seja 0,5.

FIGURA 6.116

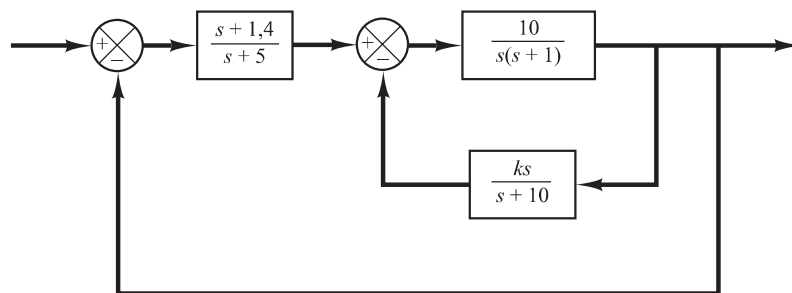
Sistema de controle.



- B.6.27** Considere o sistema mostrado na Figura 6.117. Desenhe o gráfico do lugar das raízes para valores de k que variem de 0 a ∞ . Qual é o valor de k para que o coeficiente de amortecimento dos polos dominantes de malha fechada seja 0,5? Determine a constante de erro estático de velocidade do sistema para esse valor de k .

FIGURA 6.117

Sistema de controle.



- B.6.28** Considere o sistema mostrado na Figura 6.118. Supondo que o valor do ganho K varie de 0 a ∞ , construa o gráfico do lugar das raízes quando $K_h = 0,1$, $0,3$ e $0,5$.

Compare as respostas ao degrau unitário do sistema para os três casos a seguir:

- (1) $K = 10$, $K_h = 0,1$
- (2) $K = 10$, $K_h = 0,3$
- (3) $K = 10$, $K_h = 0,5$

FIGURA 6.118
Sistema de controle.

