PROBABILIDADE

Gilberto A. Paula e Vanderlei C. Bueno

Institute of Mathematics and Statistics

São Paulo University, SP. Brazil

Março

Objetivos da Aula

1.Objetivo.
O objetivo principal desta aula é apresentar conceitos básicos sobre o cálculo de probabilidade. Inicialmente iremos definir:

. Experimento Aleatório

. Espaço Amostral

. Eventos

. Operações com Eventos

Objetivos da Aula

Posteriormente, discutiremos:

. Noções de Contagem

. Regra da Adição de Probabilidades

. Probabilidade Condicional

. Independência de Eventos

. Regra da Probabilidade Total

Motivação

- qual será a variação do PIB neste ano?
- qual será a inflação acumulada em 2020?
- qual equipe vencerá o Brasileirão?
- quais serão o(a)s candidato(a)s à presidência da república?

Experimento Aleatório

Definição

É aquele experimento que, ainda que sendo realizado sob condições fixas, não possui necessariamente resultado determinado.

Exemplos

. lançar uma moeda e observar o resultado.

. lançar um dado e observar a face superior.

. sortear um estudante da USP e perguntar sobre o hábito de fumar.

. observar o número de carros que cruzam a Avenida Rebouças com a Avenida Brasil em horário de pico.

. sortear um doador de sangue cadatrado e verificar o seu tipo sanguíneo.

Espaço Amostral

Definição
É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Denotaremos por Ω.
Exemplos
. lançar uma moeda três vezes e observar o resultado.

$$\Omega = \{(c, c, c); (c, c, r); (c, r, c); (r, c, c);$$

$$(c, r, r); (r, c, r); (r, r, c); (r, r, r)\}.$$

. lançar um dado e observar a face superior.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Espaço Amostral

. sortear um estudante da USP e perguntar sobre o hábito de fumar.

$$\Omega = \{sim, nao\}.$$

. observar o número de carros que cruzam a Avenida Rebouças com a Avenida Brasil em horário de pico.

$$\Omega = \{n : n \in N\}.$$

. sortear um doador de sangue cadatrado e verificar o seu tipo sanguíneo.

$$\Omega = \{A, B, O, AB\}.$$

. tempo de duração de uma lâmpada.

$$\Omega = \{t : t \geq 0\}.$$

Evento

Definição

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral. Notação:

. eventos: A, B, C, ...

. evento impossível : $\emptyset$ (conjunto vazio)

. evento certo: Ω (espaço amostral)

Evento

Exemplo Lançamento de um dado observando a face superior, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alguns eventos:

. A: sair face par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

. B: sair face maior do que 3 $\Rightarrow B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

. C: sair face 1 $\Rightarrow C = \{1\} \subset \Omega$.

Operações com Eventos

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral Ω. Definimos:
$A \bigcup B$: união dos eventos A e B
Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos , A ou B.
$A \bigcap B$: interseção dos eventos A e B
Representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

Operações com Eventos

Dois eventos A e B são disjuntos (ou mutuamente exclusivos) se não tem elementos em comum, isto é $A \bigcap B = \emptyset$. Dois eventos A e B são complementares se sua intersecção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é, $A \bigcap B = \emptyset$ e $A \bigcup B = \Omega$. O complementar do evento A será denotado por A^c. Temos que $A \bigcup A^c = \Omega$ e $A \bigcap A^c = \emptyset$.

Exemplo Lançamento de um dado observando a face superior, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$.

. sair uma face par e maior do que 3

$$A \bigcap B = \{2, 4, 6\} \bigcap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$$

. sair uma face par e face 1

$$A \bigcap C = \{2, 4, 6\} \bigcap \{1\} = \emptyset$$

. sair uma face par ou maior do que 3

$$A \bigcup B = \{2, 4, 6\} \bigcup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

Operações com Eventos

. sair uma face par ou face 1

$$A \bigcup C = \{2, 4, 6\} \bigcup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$$

. não sair face par

$$A^c = \{1, 3, 5\}$$

Probabilidade

Definição A probabilidade é uma medida de incerteza associada aos resultados do experimento aleatório.

Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?

. frequências relativas de ocorrências de cada resultado
. suposições teóricas
. experiência de um(a) especialista

Atribuição de probabilidade

Através das frequências relativas de ocorrências

. o experimento aleatório é replicado muitas vezes

. registra-se a frequência relativa com que cada resultado ocorre

. para um número grande de replicações, a frequência relativa aproxima a probabilidade

Atribuição de probabilidade

Através de suposições teóricas
Por exemplo, no lançamento de um dado admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado. Dessa forma

$$P(face1) = P(face2) = P(face3) =$$
$$P(face4) = P(face5) = P(face6) = \frac{1}{6}$$

No lançamento de um dado admite-se que a probabilidade de cada face é diretamente proporcional 'a face. Assim

$$P(face1) = \frac{1}{21}; P(face2) = \frac{2}{21}; P(face3) =$$
$$\frac{3}{21}; P(face4) = \frac{4}{21}; P(face5) = \frac{5}{21}; P(face6) = \frac{6}{21}.$$

Importante notar que a probabilidade de cada face está entre 0 e 1 e que somam 1.

Atribuição de probabilidade

Obs: $P(\Omega) = 1$ e se os eventos A_n, $(1 \leq n \leq \infty$ são dois a dois disjuntos, temos

$$P(\bigcup A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Através de um(a)especialista

. após o exame clínico, o médico externa a probabilidade do paciente estar com o corona vírus covid 19

. após uma análise de vários indicadores econômicos um analista financeiro externa a probabilidade de um ativo financeiro render mais do que a inflação num determinado período.

Atribuição de probabilidade

Caso discreto
No caso discreto o espaço amostral é expresso na forma

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, ...\}$$

A probabilidade $P(w)$ para cada elemento do espaço amostral é especificada da seguinte forma
. $0 \leq P(w_i) \leq 1$, para $i = 1, 2, ...$
. $\sum_{i=1}^{\infty} P(w_i) = 1$.

Atribuição de probabilidade

Se $A \subset \Omega$ é um evento, então a probabilidade de A é:

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(w_i).$$

Por exemplo, se $A = \{w_7, w_8, w_9\}$ então
$P(A) = P(w_7) + P(w_8) + P(w_9)$.
A probabilidade de que, em um lançamento de um dado equilibrado, resulte face par é

$$P(face \quad par) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Claramente $P(\Omega) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$.

Equiprobabilidade
Supor que o espaço amostral tem um número finito, n, de elementos, $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$. Se para todo $i, 1 \leq i \leq n$, $P(w_i) = \frac{1}{n}$, isto é todos os elementos do espaço amostral tem mesma probabilidade, chamamos o espaço de equiprovável.
Se em um espaço equiprovável o evento A tem m elementos, então

$$P(A) = \frac{numero \quad de \quad elementos \quad de \quad A}{numero \quad de \quad elementos \quad de \quad \Omega} = \frac{m}{n}$$

Importante observar que as propriedades descritas abaixo através de um exemplo em um espaço equiprovável valem para qualquer espaço de probabilidade.

Descrição

O quadro abaixo classifica os alunos diplomados em 2002 no município de São Paulo segundo nível de ensino e tipo de instituição.

N ivel / Tipo	P ublica	Privada	totais
Fundamental	144.548	32.299	176.847
M edio	117.945	29.422	147.367
Superior	5.169	56.124	61.283
Totais	267.652	117.845	385.497

Aplicação

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 no município de São Paulo é selecionado ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no município de São Paulo.

Eventos . M: aluno se formou no ensino médio

$$P(M) = \frac{147.367}{385.497} = 0,382$$

. F: aluno se formou no ensino fundamental

$$P(F) = \frac{176.847}{385.497} = 0,459$$

. S: aluno se formou no ensino superior

$$P(S) = \frac{61.283}{385.497} = 0,159$$

G: aluno se formou em instituição pública

$$P(G) = \frac{267.652}{385.497} = 0,694$$

Aplicação

Eventos

. $M \bigcap G$: aluno formado no ensino médio e em instituição pública

$$P(M \bigcap G) = \frac{117.945}{385.497} = 0,306$$

. $M \bigcup G$: aluno formado no ensino médio ou em institutição pública

$$P(M \bigcup G) = \frac{(147.367 + 267.652 - 117.945)}{385.497} = \frac{297.074}{385.497} = 0,771$$

Propriedades

Regra da Adição de Probabilidades
Definição Sejam A e B dois eventos quaisquer em um espaço de probabilidade Ω. Então

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$

. Se A e B são conjuntos disjuntos $(A \bigcap B = \emptyset)$

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$$

. para qualquer evento A em Ω

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Regra da Adição de Probabilidades

Considere novamente o exemplo $M \bigcup G$: aluno formado no ensino médio ou em instituição pública. Então

$$P(M \bigcup G) = P(M) + P(G) - P(M \bigcap G) =$$

$$\frac{147.367}{385.497} + \frac{267.652}{385.497} - \frac{117.945}{385.497} = \frac{297.074}{385.497} = 0,771.$$

Probabilidade Condicional

Definição
Sejam A e B dois eventos quaisquer em um espaço amostral Ω. Então, se $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A condicionado a B, denotada por $P(A|B)$ por

$$P(A|B) = \frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}.$$

Observe a Regra do Produto:

$$P(A\bigcap B) = P(A|B)P(B),$$

$$P(A\bigcap B) = P(B|A)P(A).$$

Importante observar que, fixado B, a probabilidade condicional $P(.|B) = \frac{P(.\bigcap B)}{P(B)}$ definida no espaço amostral $\Omega\bigcap B$ é uma probabilidade e retem todas as propriedades inerentes. Ver as notas do professor.

Aplicação

Suponha que um aluno diplomado em 2002 no município de São Paulo é selecionado ao acaso (aleatoriamente). Considere os eventos

M: o aluno se formou no ensino médio

G o aluno se formou em instituição pública

Qual a probabilidade do aluno escolhido ser formado no ensino médio sabendo-se que é de instituição pública?

$$P(M|G) = \frac{P(M \bigcap G)}{P(G)} =$$

$$\frac{\frac{117.945}{385.497}}{\frac{267.652}{385.497}} =$$

$$\frac{117.945}{267.652} = 0,441.$$

Aplicação

Em uma urna há 5 bolas, sendo 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, sem reposição. Qual a probabilidade da segunda bola sorteada ser de cor vermelha?
Definindo os eventos
B_i: bola branca na i-ésima retirada $i = 1, 2$
V_i: bola vermelha na i-ésima retirada $i = 1, 2$
Calculamos

$$P(V_2) = P(V_2 \bigcap \Omega) = P(V_2 \bigcap (B_1 \bigcup V_1) =$$

$$P((V_2 \bigcap B_1) \bigcup (V_2 \bigcap V_1)) = P(V_2 \bigcap B_1) + P(V_2 \bigcap V_1) =$$

$$P(B_1)P(V_2|B_1) + P(V_1)P(V_2|V_1) = \frac{2}{5}\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\frac{2}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Note que $P(V_2) = P(V_1)$.
O procedimento será de fácil entendimento através de diagramas de árvores (veja as notas do professor).

Aplicação

Se no exemplo anterior as duas bolas são retiradas com reposição, qual a probabilidade da segunda bola sorteada ser de cor vermelha?
Definindo os eventos
B_i: bola branca na i-ésima retirada $i = 1, 2$
V_i: bola vermelha na i-ésima retirada $i = 1, 2$
Calculamos

$$P(V_2) = P(V_2 \bigcap \Omega) = P(V_2 \bigcap (B_1 \bigcup V_1) =$$

$$P((V_2 \bigcap B_1) \bigcup (V_2 \bigcap V_1)) = P(V_2 \bigcap B_1) + P(V_2 \bigcap B_1) =$$

$$P(B_1)P(V_2|B_1) + P(V_1)P(V_2|V_1) = P(B_1)P(V_2) + P(V_1)P(V_2) =$$

$$P(B_1)P(V_1) + P(V_1)P(V_1) = p(V_1)[P(B_1) + P(V_1)] = P(V_1) = \frac{3}{5}.$$

A segunda igualdade é do fato de que $\Omega = (B_1 \bigcup V_1)$. Na terceira igualdade aplicamos a propriedade distributiva da intersecção em relação à reunião. A quarta é devido à Regra do Produto. A quinta igualdade vale pois você reconstituiu a urna original.
Note que a probabilidade do evento é a mesma independente do

Independência de Eventos

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade da ocorrência de A, isto é,

$$P(A|B) = P(A), P(B) > 0.$$

Como , da definição de probabilidade condicional temos $P(A|B) == \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$ a independência entre A e B é equivalente a

$$P(A \bigcap B) = P(A)P(B).$$

Importante verificar no livro texto quando três eventos sãoindependentes¿

Independência de Eventos

Exemplo

Em uma urna há 5 bolas, sendo 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente.
Definindo os eventos
B_i: bola branca na i-ésima retirada $i = 1, 2$
V_i: bola vermelha na i-ésima retirada $i = 1, 2$
Se as retiradas são sem reposição, os eventos V_1 e V_2 são dependentes pois $P(V_2|V_1) = \frac{2}{5}$ e $P(V_2) = \frac{3}{5}$, como calculado anteriormente.
Se as retiradas são com reposição, os eventos V_1 e V_2 são independentes pois $P(V_2|V_1) = P(V_1) = \frac{3}{5}$.

Regra da Probabilidade Total

O último argumento do exemplo anterior enseja o desenvolvimento de uma regra, denominada regra da probabilidade total. Para enuncia-la devemos definir uma partição do espaço amostral.

Definição

Sejam Ω um espaço amostral e $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos dois a dois disjuntos e exaustivos de Ω, isto é

a) $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$, e

b) $A_i \cap A_j = \emptyset \;\; \forall 1 \leq i, j \leq n$.

Então dizemos que $\{A_1, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω.

Regra da Probabilidade Total

Regra da Probabilidade Total Sejam Ω um espaço amostral, $\{A_1, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω , B um evento e P uma probabilidade em Ω. Então

$$P(B) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i).$$

Prova:

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i)) = P(\cup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) =$$

$$\Sigma_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i).$$

Uma consequência imediata da regra da probabilidade total é a Regra de Bayes:

Regra de Bayes
Sejam Ω um espaço amostral, $\{A_1, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω , B um evento e P uma probabilidade em Ω. Então

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i).P(A_i)}{\Sigma_{i=1}^{n} P(A_i).P(B|A_i)}.$$

Exemplo O portifólio de uma seguradora de veículos,é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente. No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis. No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis(não usa o seguro).
Se em determinado acidente houve perda parcial, qual a probabilidade de que o veículo acidentado foi um automóvel?

Regra de Bayes

Se denotamos os eventos de interesse por:
A = { veículo é um automóvel};
C = { veículo é um caminhão};
D = { a perda é dedutível };
P = { a perda é parcial };
T = { a perda é total },
as expressões analíticas que traduzem o enunciado do exemplo são:
$P(C) = 0,3$, $P(A) = 0,7$, $P(T|A) = 0,3$, $P(P|A) = 0,6$,
$P(D|A) = 0,1$, $P(T|C) = 0,4$, $P(P|C) = 0,5$ e $P(D|C) = 0,1$.
Aplicamos a regra de Bayes:

$$P(A|P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)}.$$

Pela regra do produto, o numerador é
$P(A \cap P) = P(A).P(P|A) = 0,7.0,6 = 0,42$. Obtemos o denominador através da regra da probabilidade total

$$P(P) = P(A).P(P|A) + P(C).P(P|C) = 0,7.0,6 + 0,3.0,5 = 0,57.$$

Assim $P(A|P) = 0,74$.

Princípios de contagem

Para procedermos com o cálculo da cardinalidade de conjuntos devemos introduzir algumas regras de contagem:

Regra I Princípio Fundamental da Contagem
Se um procedimento pode ser realizado em duas etapas, a primeira de n maneiras e a segunda de m maneiras, então podemos realizar o procedimento de mn maneiras.

Exemplo Experimentamos casualmente e sussecivamente 10 chaves idênticas para abrir uma porta. Somente uma chave pode abrir a porta e o procedimento pode exigir, 1, 2, ...,9 ou 10 tentativas. Mostraremos que todas as tentativas tem mesma probabilidade $0,1$.

Observe que, em qualquer etapa do procedimento o espaço amostral é equiprovável pois a escolha é casual. Denotemos por A_i o evento de que acertamos na i-es tentativa. $\overline{A_i}$ é o complementar de A_i.
Na primeira tentativa, o número de maneiras de escolhermos uma chave dentre as 10, é 10. Só existe uma maneira de escolhermos a chave correta e, portanto $P(A_1) = \frac{1}{10} = 0,1$.
Na segunda tentativa, o número de maneiras de retirarmos duas chaves, em duas etapas é, pelo princípio fundamental da contagem, $10.(10-1)$ e o número de maneiras de retirarmos duas chaves, em duas etapas, de forma que a segunda etapa resulte na chave correta é,pelo princípio fundamental da contagem, $(10-1).1$ e, portanto, $P(A_2) = \frac{(10-1).1}{10.(10-1)} = 0,1$.

Procedendo da mesma maneira, na k-es tentativa, quando o número de maneiras de retirarmos k chaves, em k etapas é, pelo princípio fundamental da contagem $10.(10-1)...(10-k+1)$ e o número de maneiras de retirarmos k chaves, em k etapas, de forma que a k-es. etapa resulte na chave correta é, pelo princípio fundamental da contagem, $(10-1)....(10-k+1).1$ e, portanto. $P(A_k) = \frac{((10-1).....10-k+1)1}{10.(10-1)....(10-k+1)} = 0,1.$

Regra II Permutação
O número de maneiras de ordenarmos n objetos é

$$n! = n.(n-1).(n-2)...2.1$$

com $0! = 1$.

Regra III Combinação de n elementos, escolhidos k a k.
O número de maneiras de escolhermos k objetos, em uma populaç ao de n objetos de maneira que a ordem da escolha seja irrelevante é

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

Exemplificando, em uma população de objetos $\{a, b, c, d\}$, se escolhemos casualmente dois objetos sem nos importarmos com a ordem, teremos $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2}{2.2} = 6$, a saber

$$\{a, b\}; \{a, c\}; \{a, d\}; \{b, c\}; \{b, d\}; \{c, d\}.$$

Exemplo

Em um estacionamento observamos que existem 8 carros estacionados e que as quatro vagas restantes, sem carros, são consecutivas. Esta configuração é surpreendente?

Consideramos o espaço equiprovavel, isto é qualquer carro tem a mesma chance de ocupar qualquer vaga e, para nossos propósitos a ordem em que isso ocorre é irrelevante.

O número de maneiras de alocarmos os 8 carros nas 12 vagas é $\binom{12}{8} = 495$. O número de alocações que satisfazem o evento de interesse é 9 e portanto a probabilidade de ocorrer tal evento é $\frac{9}{495} = 0,018$ e a ocorrência do evento é surpreendente.

Princípios de contagem

Regra IV Arranjo de n elementos, escolhidos k a k.
O número de maneiras de escolhermos k objetos, em uma populaç ao de n objetos de forma que a ordem da escolha seja rrelevante é

$$(n)_k = n.(n-1).(n-2)..(n-k+1)$$

Exemplificando em uma população de objetos $\{a, b, c, d\}$, se escolhemos casualmente dois objetos ordenados, teremos $(4)_2 = 4.3 = 12.$, a saber

$$(a, b); (a, c); (a, d); (b, c); (b, d); (c, d);$$

$$(b, a); (c, a); (d, a); (c, b); (d, b); (d, c).$$

Exemplo

Considere um ano de 365 dias e os eventos
A = { O aniversário de 10 pessoas ocorrem em dias diferentes.}
B = { O aniversário de 10 pessoas ocorrem, exatamente, em dois meses do ano.}
O leitor é convidado a explicar as soluções:

$$P(A) = \frac{(365)_{10}}{(365)^{10}};$$

$$P(B) = \frac{\binom{12}{2}.(2^{10} - 2)}{12^{10}}.$$

Execício 1

Suponha que num lote com 20 peças existam cinco defeituosas. Escolha 4 peças do lote ao acaso , ou seja, uma amostra com 4 elementos, de modo que a ordem dos elementos seja irrelevante. Qual a probabilidade de que a amostra contenha duas peças defeituosas?

Resposta

Seja A o evento: a amostra contenha duas peças defeituosas.

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}}.$$

Execício 2

Três jogadores A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas .

a) Quais são os possíveis resultados do torneio?

b) No espaço amostral construido em a), atribua a cada ponto contendo k letras a probabilidade $\frac{1}{2^k}$. Assim $P(AA) = \frac{1}{4}$. Mostre que a soma das probabilidades dos pontos do espaço amostral é 1.

c) Calcule a probabilidade de que A vença. Em seguida calcule a probabilidade de que C vença.

d) Qual a probabilidade de que não haja decisão?

Exercícios

Resposta

a)

$$\Omega = \{AA, ACC, ACBB, ACBA, BB, BCC, BCAA, BCAB\}.$$

b)

$$P(\Omega) = 2.(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}) = 1$$

c)

$$P(A \quad vencer) = P(\{AA, BCAA\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

$$P(C \quad vencer) = P(\{ACC, BCC\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

d)

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{5}{16} + \frac{5}{16} + \frac{4}{16} = \frac{14}{16}$$

e)

$$P(Ninguem \quad vencer) = 1 - [P(A) + P(B) + P(C)] = \frac{2}{16}.$$

Execício 3

No exercício anterior suponha que o jogo continua indefinidamente.

a) Qual o espaço amostral?

b) Mostre que o espaço amostral tem probabilidade 1.

c) Qual as probabilidades de A ganhar? Qual a probabilidade de C vencer?

d) Qual a probabilidade do jogo não acabar?

Resposta

a)

$$\Omega = \{\{AA, ACC, ACBB, ACBAA, ACBACC, ACBACBB, ...$$

$$BB, BCC, BCAA, BCABB, BCABCC, ...\}.$$

b)

$$P(\Omega) = 2.(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ..) = 2.\Sigma_{k+2}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2.(\frac{1}{2^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}) = 1.$$

Resposta

c)

$$P(A \quad vencer) = (\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + ...) + (\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{10}} + ...) =$$

$$\frac{1}{2^2}(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}}) + \frac{1}{2^4}(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}}) = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7}$$

$$P(C \quad ganhar) = 2.(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + ... = 2.(\frac{1}{2^3}\frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}}) = 2\frac{1}{7} = \frac{2}{7}.$$

d)

$$P(Jogar \quad indefinidamente) = 1 - (\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7}) = \frac{3}{7}.$$

Execício 4 Lance um dado equilibrado até que a face 5 apareça pela primeira vez. a) Quais os possíveis resultados desse experimento?
b) Calcule a probabilidade de que a face cinco apareça após três lançamentos do dado.

Resposta

a) O evento sair face cinco é denotado por C. O evento não sair face 5 é denotado por C^c.

$$\Omega = \{C, C^c C, C^c C^c C, C^c C^c C^c C, ...\}.$$

b) Observe que

$$P(C) = \frac{1}{6}; P(C^c C) = \frac{5}{6}.\frac{1}{6}; P(C^c C^c C) = \frac{5}{6}^2.\frac{1}{6};$$

$$P(C^c C^c C^c C) = \frac{5}{6}^3.\frac{1}{6}; = P(C^c C^c C^c C) = \frac{5}{6}^4.\frac{1}{6}; ...$$

Portanto

$$P(face \quad 5 \quad apos \quad o \quad terceiro \quad lancamento) =$$

$$1 - P(face \quad 5 \quad antes \quad do \quad terceiro \quad lancamento) =$$

$$1 - [\frac{1}{6} + \frac{5}{6}.\frac{1}{6} + \frac{5}{6}^2.\frac{1}{6} + \frac{5}{6}^3.\frac{1}{6}] = 1 - 0,52 = 0,48.$$

Exercícios

Execício 5
Um dado é viciado, de tal forma que a probabilidade de sair uma face é proporcional ao seu valor.
a) Calcular a probabilidade de sair uma determinada face ?
b) Qual a probabilidade de sair face 5, sabendo-se que a face que saiu é impar?

Resposta
a) Seja o evento A_i: sair face i $1 \leq i \leq 6$.
Por hipótese $P(A_i) = \alpha.i$, $1 \leq i \leq 6$.
Portanto

$1 = P(\Omega) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) =$

$= \alpha.1 + \alpha.2 + \alpha.3 + \alpha.4 + \alpha.5 + \alpha.6 = \alpha.(1+2+3+4+5+60 = 21.\alpha.$

e $\alpha = \frac{1}{21}$.
Assim $P(A_i) = \frac{i}{21}$, $1 \leq i \leq 6$.
b) Denote o evento face impar por $I = \{1, 3, 5\}$. Portanto

$$P(I) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21}.$$

Resposta Denote o evento face 5 por C. Portanto

$$P(C|I) = \frac{P(C \bigcap I)}{P(I)} = \frac{P(C)}{P(I)} = \frac{\frac{5}{21}}{\frac{9}{21}} = \frac{5}{9}.$$

Execício 6
Uma companhia produz circuitos em três fábricas, I, II e III. A fábrica I produz 40% dos circuitos, emquantoo a II e III produzem 30% cada uma. As probabilidades e que um circuito produzido por essas fábricas não funcione são $0,01, 0,04$ e $40,03$, respectivamente. Escolhemos aleatoriamente um circuito da produção conjunta dessas fábricas:
a) Qual a probabilidade do circuito ser defeituoso?
b) Condicionado que o circuito tem defeito, qual a probabilidade de ser proveniente da fábrica I?

Exercícios

Resposta

a) Seja D o evento seja defeituoso. Note que as fábricas I, II e III formam uma partição do espaço amostral. Colocando os dados analiticamente temos:

$$P(I) = 0,4; P(II) = 0,3; P(III) = 0,3;$$

$$P(D|I) = 0,01; P(D|II) = 0,04; P(D|III) = 0,03.$$

Aplicamos a regra da probabilidade total:

$$P(D) = P(D|I), P(I) + P(D|II)P(II) + P(D|III)P(III) =$$

$$0,01.0,4 + 0,04.0,3 + 0,03.0,3 = 0,025.$$

b) Aqui aplicamos a regra de Bayes

$$P(I|D) = \frac{P(D \bigcap I)}{P(D)} = \frac{P(D|I).P(I)}{P(D)} = \frac{0,01.0,4}{0,025} = 0,16.$$