PTC-5720 Controle Estocástico

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Aulas 4 e 5 - 2020

PTC-EPUSP

Vetor Gaussiano

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ $\rightarrow$vetor gaussiano com parâmetros $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ e matriz n por n Σ. Neste caso a função densidade de probabilidade $f_X(x)$ é dada por

Vetor Gaussiano

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(det(\Sigma))^{1/2}} exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\}.$$

Verifica-se que $E(X) = \mu$ e $Cov(X) = \Sigma$. No caso em que as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ são descorrelacionadas, tem-se que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Vetor Gaussiano

e segue que

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma_i} exp\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_i - \mu_i)^2\} = f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_n}(x_n),$$

ou seja, $X_1, \dots, X_n$ são independentes. Portanto para variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, descorrelacionadas é equivalente a independentes.

Vetor Gaussiano

Outra propriedade importante é que se X é um vetor gaussiano com parâmetros μ e Σ, e

$$Y = AX + b,$$

então Y também é um vetor gaussiano com vetor de média μ_Y e matriz de covariância Σ_Y dados por

$$\begin{aligned}\mu_Y &= A\mu + b,\\ \Sigma_Y &= A\Sigma A'.\end{aligned}$$

Value at Risk

O retorno P de um portfolio é dado por

$$P = \omega' R = \omega_1 R_1 + \ldots + \omega_n R_n$$

onde R representa o vetor com os retornos dos ativos e ω o vetor com as proporções investidas em cada ativo. Suponha que R seja um vetor gaussiano, com média μ e matriz de covariancia Σ. Considere também o valor inicial da carteira como sendo V_0. Qual é a perda máxima da carteira com 95% de chances?

Value at Risk

Pelo exemplo anterior temos que P também é gaussiano com média $\mu_P = \omega'\mu$ e variância $\sigma_P^2 = \omega'\Sigma\omega$. Temos também que o valor final da carteira é dado por: $V_f = (1 + P)V_0 = V_0 + V_0 P$ e portanto V_f também é uma variável gaussiana com média $\mu_{V_f} = (1 + \mu_P)V_0$ e variância $\sigma_{V_f}^2 = V_0^2 \sigma_P^2$. Temos dessa forma que

Value at Risk

$$\frac{V_f - (1+\mu_P)V_0}{V_0\sigma_P}$$

é uma variável aleatória gaussiana padrão, e portanto pela tabela segue que

$$P\Big(\frac{V_f - (1+\mu_P)V_0}{V_0\sigma_P} \leq -1,65\Big) = 0,05.$$

Ou seja, com 95% de chances,

$$V_f \geq V_0\Big[(1+\mu_P) - 1,65\sigma_P\Big].$$

Value at Risk

Considerando o exemplo anterior, temos que $\mu_P = 13,72\%$ e $\sigma_P = 15,10\%$. Segue que

$$(1 + \mu_P) - 1,65\sigma_P = 1,1372 - 0,24915 = 0,88805.$$

Ou seja, com 95% de chances, a perda máxima da carteira (Var) será de 11,195%.

Recordação

Para 2 eventos A e B lembramos que a probabilidade condicional de A dado B é:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad \text{para } P(B) > 0.$$

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias discretas com função massa conjunta de probabilidade dada por $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ e função marginal para X_2 dada por $p_{X_2}(x_2)$. Chamando

$$A = \{X_1 = x_1\}, \quad B = \{X_2 = x_2\},$$

segue que

$$P(A|B) = P(X_1 = x_1|X_2 = x_2) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)} = \frac{p_{X_1,X_2}(x, x_2)}{p_{X_2}(x_2)}$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Para 2 variáveis aleatórias discretas X_1 e X_2 com função massa conjunta $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$, define-se a função massa condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ da seguinte forma:

$$p_{X_1|X_2}(x|x_2) = \frac{p_{X_1,X_2}(x, x_2)}{p_{X_2}(x_2)}$$

e o valor esperado condicional como

$$E(X_1|X_2 = x_2) = \sum_x x \frac{p_{X_1,X_2}(x, x_2)}{p_{X_2}(x_2)}.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Para o caso contínuo a definição é similar, suponha que 2 variáveis aleatórias contínuas X_1 e X_2 com função densidade de probabilidade conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$. Define-se a função densidade de probabilidade condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$ da seguinte forma:

$$f_{X_1|X_2}(x|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

e o valor esperado condicional como

$$E(X_1|X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X_1,X_2}(x, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx.$$

Exemplo

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias de Poisson com médias λ_1 e λ_2, e independentes. Calcule o $E(X_1|X_1 + X_2 = n)$.

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = k|X_1 + X_2 = n) &= \frac{P(X_1 = k, X_1 + X_2 = n)}{P(X_1 + X_2 = n)} \\
&= \frac{P(X_1 = k, X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)} \\
&= \frac{P(X_1 = k)P(X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)}
\end{aligned}
$$

Exemplo

$X_1 + X_2$ é Poisson com média $\lambda_1 + \lambda_2$ (mostre isso). Logo

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!} / e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Logo $X_1|X_1 + X_2$ é binomial com parâmetros n e $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$. Com isso temos que

$$E(X_1|X_1 + X_2 = n) = n\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Exemplo

Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis binomiais identicamente distribuídas e independentes com parâmetros n e p. Para $k \leq \min\{m, n\}$ calcule $P(X_1 = k | X_1 + X_2 = m)$. Como antes,

$$\begin{aligned}
P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) &= \frac{P(X_1 = k, X_1 + X_2 = m)}{P(X_1 + X_2 = m)} \\
&= \frac{P(X_1 = k, X_2 = m - k)}{P(X_1 + X_2 = m)} \\
&= \frac{P(X_1 = k)P(X_2 = m - k)}{P(X_1 + X_2 = m)}
\end{aligned}$$

Exemplo

$X_1 + X_2$ é Binomial com parâmetros $(2n, p)$. Logo

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = m) =$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k} \Big/ \binom{2n}{m} p^m (1-p)^{2n-m}$$

$$= \binom{n}{k} \binom{n}{m-k} \Big/ \binom{2n}{m}$$

Distribuição hipergeométrica com parâmetros (n, n, m).

Exemplo

$X_1 + X_2$ é Binomial com parâmetros $(2n, p)$. Logo

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = m) =$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m+k} / \binom{2n}{m} p^m (1-p)^{2n-m}$$

$$= \binom{n}{k} \binom{n}{m-k} / \binom{2n}{m}$$

Distribuição hipergeométrica com parâmetros (n, n, m).

Exemplo

Experimento pode levar a um entre 3 resultados resultados, sendo p_i a probabilidade do resultado i. n réplicas independentes desse experimento são realizadas. Seja X_i o número de vezes que o resultado i ocorre, $i = 1, 2, 3$. Calcule $P(X_1 = k | X_2 = m)$, e $E(X_1 | X_2 = m)$.

Resposta: $X_1 | X_2 = m$ é uma binomial com parâmetros $n - m$ e $\frac{p_1}{p_1 + p_3}$.

Logo

$$P(X_1 = k | X_2 = m) =$$
$$\binom{n-m}{k} (\frac{p_1}{p_1 + p_3})^k (\frac{p_3}{p_1 + p_3})^{n-m-k}$$

Logo

$$E(X_1 | X_2 = m) = (n - m) \frac{p_1}{p_1 + p_3}.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Podemos encarar $E(g(X_1)|X_2)$ como uma função da variável aleatória X_2 e portanto também uma variável aleatória. Da mesma forma pode-de encarar $P(X_1 \in A|X_2)$ como uma função da variável aleatória X_2 e portanto também uma variável aleatória. Tem-se o seguinte resultado importante.

$$E(g(X_1)) = E(E(g(X_1)|X_2))$$

e

$$P(X_1 \in A) = E(P(X_1 \in A|X_2))$$

Valor Esperado Condicional

$$E(g(X_1)|X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx_1$$

$$\begin{aligned}
E(E(g(X_1)|X_2)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx_1 \right) f_{X_2}(x_2) dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1 = E(g(X_1))
\end{aligned}$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Calcule o valor esperado e a variância de uma variável aleatória geométrica com parâmetro p.
X é o número de jogadas até o 1o sucesso, e $Y = 1$ se a 1a jogada é sucesso, $Y = 0$ se for fracasso.

$$E(X|Y = 1) = 1$$
$$E(X|Y = 0) = 1 + E(X),$$

$$E(X) = 1 \times p + (1 + E(X)) \times (1 - p) \Longrightarrow E(X) = \frac{1}{p}.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

$$E(X^2|Y=1) = 1$$

$$E(X^2|Y=0) = E((1+X)^2) = E((1+2X+X^2)) = 1 + \frac{2}{p} + E(X^2),$$

$$E(X^2) = 1 \times p + (1 + \frac{2}{p} + E(X^2)) \times (1-p)$$

$$\implies E(X^2) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

$$Var(X) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Considere X e Y independentes e contínuas com função densidade de probabilidade $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. Calcule $P(X \leq Y)$.

$$P(X \leq Y) = E(P(X \leq Y|Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq y|Y = y) f_Y(y) dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Suponha que no exemplo anterior X e Y independentes e exponenciais com parâmetros λ_X e λ_Y. Calcule $P(X \leq Y)$.

$$P(X \leq Y) = \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Um mineiro está preso em uma mina com 3 portas. A primeira leva à liberdade depois de 2 horas. A segunda volta à mina depois de 3 horas, e a terceira volta à mina depois de 5 horas. Seja N o número de horas até o mineiro sair da mina.

A) Supondo que o mineiro esquece as portas escolhidas sempre que volta à mina, calcule $E(N)$ e $Var(N)$.

B) Supondo que o mineiro lembra das portas escolhidas sempre que volta à mina, calcule $E(N)$ e $Var(N)$.

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

X - primeira porta escolhida, $X \in \{1,2,3\}$. Temos para o item a) que

$$E(N|X=1) = 2,$$
$$E(N|X=2) = 3 + E(N),$$
$$E(N|X=3) = 5 + E(N),$$
$$E(N) = \frac{1}{3}(2 + 3 + E(N) + 5 + E(N)) \Longrightarrow E(N) = 10.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

$$
\begin{aligned}
E(N^2|X=1) &= 4,\\
E(N^2|X=2) &= E((3+N)^2) = 9 + 6E(N) + E(N^2) = 69 + E(N^2),\\
E(N^2|X=3) &= E((5+N)^2) = 25 + 10E(N) + E(N^2) = 125 + E(N^2),\\
E(N^2) &= \frac{1}{3}(4 + 69 + E(N^2) + 125 + E(N^2)) \Longrightarrow E(N^2) = 198,\\
Var(N) &= 198 - 10^2 = 98.
\end{aligned}
$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

X - primeira porta escolhida, $X \in \{1,2,3\}$. Temos para o item b) que

$$E(N|X=1) = 2,$$
$$E(N|X=2) = 3 + \frac{1}{2}(7+2) = \frac{15}{2},$$
$$E(N|X=3) = 5 + \frac{1}{2}(5+2) = \frac{17}{2},$$
$$E(N) = \frac{1}{3}(2 + \frac{15}{2} + \frac{17}{2}) \Longrightarrow E(N) = 6.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

N_i numero de horas até sair excluindo a porta i.

$$E(N^2|X=1) = 4,$$
$$E(N^2|X=2) = E((3+N_2)^2) = 9 + 6E(N_2) + E(N_2^2) = \frac{125}{2}$$
$$E(N^2|X=3) = E((5+N_3)^2) = 25 + 10E(N_3) + E(N_3^2) = \frac{149}{2},$$
$$E(N^2) = \frac{1}{3}(4 + \frac{125}{2} + \frac{149}{2}) = 47,$$
$$Var(N) = 47 - 36 = 11.$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Sejam X e Y variáveis aleatórias e para uma função $e(y)$ defina

$$H(e) = E((g(X) - e(Y))^2).$$

Deseja-se resolver o seguinte problema (problema de filtragem):

$$min_{e(.)} H(e) = min_{e(.)} E((g(X) - e(Y))^2)$$

Solução ótima e^*:

$$e^*(Y) = E(g(X)|Y).$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Defina o produto interno $< Z_1; Z_2 >= Cov(Z_1, Z_2)$. Mostre que

$$< g(X) - e^*(Y); e(Y) >= 0$$

(isto é, $g(X) - e^*(Y) \perp e(Y)$), e como isso mostre que $e^*(Y)$ é a solução ótima desejada.

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

$$\begin{aligned} < g(X) - e^*(Y); e(Y) > &= E((g(X) - e^*(Y))e(Y)) \\ &= E(E((g(X) - e^*(Y))e(Y)|Y)) \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} E((g(X) - e^*(Y))e(Y)|Y) &= E((g(X) - e^*(Y))|Y)e(Y) \\ &= (E(g(X)|Y) - E(e^*(Y)|Y))e(Y) \\ &= (E(g(X)|Y) - e^*(Y))e(Y) \\ &= (E(g(X)|Y) - E(g(X)|Y))e(Y) = 0. \end{aligned}$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Logo

$$\begin{aligned}\|g(X)-e(Y)\|^2 &= < g(X)-e(Y); g(X)-e(Y) > \\ &= < g(X)-e^*(Y)+\tilde{e}(Y); g(X)-e^*(Y)+\tilde{e}(Y) >\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{e}(Y) = e^*(Y) - e(Y)$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Portanto

$$\begin{aligned}\|g(X) - e(Y)\|^2 &= \|g(X) - e^*(Y)\|^2 + \|\tilde{e}(Y)\|^2 \\ &\quad + 2 < g(X) - e^*(Y); \tilde{e}(Y) > \\ &= \|g(X) - e^*(Y)\|^2 + \|\tilde{e}(Y)\|^2\end{aligned}$$

pela ortogonalidade $g(X) - e^*(Y) \perp \tilde{e}(Y)$, e como o primeiro termo não depende da função e, o mínimo é atingindo quando se faz $\tilde{e}(Y) = 0$, isto é

$$e(Y) = e^*(Y).$$

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Suponha que a função conjunta de X_1 e X_2 seja

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_2(x_1 - x_2)e^{-(x_1+x_2)} & 0 < x_1 < \infty,\ 0 \leq x_2 < x_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Calcule $E(X_1|X_2 = x_2)$.

Probabilidade e Valor Esperado Condicional

Nota-se que

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{x_2}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_1 = \int_{x_2}^{\infty} 4x_2(x_1 - x_2)e^{-(x_1+x_2)}dx_1$$
$$= 4x_2e^{-2x_2}.$$

Obtém-se que para $x_1 > x_2$,

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{4x_2(x_1 - x_2)e^{-(x_1+x_2)}}{4x_2e^{-2x_2}} = (x_1 - x_2)e^{-(x_1-x_2)}.$$

Portanto,

$$E(X_1|X_2 = x_2) = \int_{x_2}^{\infty} x_1(x_1 - x_2)e^{-(x_1-x_2)}dx_1 = 2 + x_2.$$

Função Momento Gerador

Define-se a função momento gerador de uma variável aleatória X como sendo:

$$\phi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_X(t) &= \frac{d\phi_X(t)}{dt} = E\left(\frac{de^{tX}}{dt}\right) = E(Xe^{tX}) \\
&\Longrightarrow \dot{\phi}_X(0) = E(X), \\
\ddot{\phi}_X(t) &= \frac{d\dot{\phi}_X(t)}{dt} = \frac{dE(Xe^{tX})}{dt} = E\left(X\frac{dE(e^{tX})}{dt}\right) = E(X^2e^{tX}) \\
&\Longrightarrow \ddot{\phi}_X(0) = E(X^2).
\end{aligned}$$

Função Momento Gerador

Em geral, temos que:

$$\phi_X{}^n(0) = E(X^n)$$

onde $\phi_X{}^n(0)$ representa a n-ésima derivada de $\phi_X(t)$ em $t = 0$.

Função Momento Gerador

Seja X uma variável binomial com parâmetros (n, p). Segue que

$$\begin{aligned}\phi_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{(n-k)} \\ &= (1 - p + e^t p)^n\end{aligned}$$

e portanto

$$\dot{\phi}_X(t) = n(1-p+e^t p)^{n-1} p e^t \Longrightarrow \dot{\phi}_X(0) = E(X) = np.$$

Função Momento Gerador

Temos também que

$$\ddot{\phi}_X(t) = n(n-1)(1-p+e^tp)^{n-2}(pe^t)^2 + n(1-p+e^tp)^{n-1}pe^t$$
$$\Longrightarrow \ddot{\phi}_X(0) = E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$$

Função Momento Gerador

e portanto

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np(1-p).$$

Função Momento Gerador

Seja X uma variável exponencial com parâmetro $\lambda > 0$. Segue que (para $0 < t < \lambda$)

$$\phi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Função Momento Gerador

e portanto

$$\dot{\phi}_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \Longrightarrow \dot{\phi}_X(0) = E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_X(t) &= \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^2} \\ &\Longrightarrow \ddot{\phi}_X(0) = E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Função Momento Gerador

e portanto

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Função Momento Gerador

Seja X uma variável normal com parâmetros μ e σ. Pode-se mostrar que

$$\phi_X(t) = E(e^{tX}) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$$

e portanto

$$\dot{\phi}_X(t) = (\sigma^2 t + \mu) e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t} \Longrightarrow \dot{\phi}_X(0) = E(X) = \mu.$$

Função Momento Gerador

Temos também que

$$\ddot{\phi}_X(t) = (\sigma^2 t + \mu)^2 e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t} + \sigma^2 e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$$

$$\Longrightarrow \ddot{\phi}_X(0) = E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

e portanto

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2.$$

Função Momento Gerador

Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes. Segue que

$$\phi_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

Por exemplo, suponha que X e Y sejam uniformemente distribuídas no intervalo $(0,1)$. Segue que

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t) = \int_0^1 e^{xt}dt = \frac{1}{t}e^{xt}]_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$$

Função Momento Gerador

e portanto

$$\phi_{X+Y}(t) = \frac{(e^t - 1)^2}{t^2}.$$

Derivando segue que

$$\dot{\phi}_{X+Y}(t) = \frac{2(e^t - 1)(te^t - e^t + 1)}{t^3}$$

e portanto

$$\dot{\phi}_{X+Y}(0) = E(X + Y) = 1.$$

Função Momento Gerador

Uma propriedade importante da função momento gerador $\phi_X(t)$ é que ela define de forma única a variável aleatória X.

Sejam X e Y variáveis aleatórias de Poisson independentes com parâmetros λ_1 e λ_2 respectivamente. Pode-se mostrar que

$$\phi_X(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}$$

e

$$\phi_Y(t) = e^{\lambda_2(e^t-1)}.$$

Segue que

$$\phi_{X+Y}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

e portanto $X + Y$ também é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Função Momento Gerador

Sejam X e Y variáveis aleatórias normais independentes com parâmetros (μ_1, σ_1^2) e (μ_2, σ_2^2) respectivamente. Segue que

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{\left(\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \mu_1 t\right)} e^{\left(\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + \mu_2 t\right)} = e^{\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2} + (\mu_1+\mu_2)t}$$

e portanto $X + Y$ também é uma variável aleatória normal com parâmetros $(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Processos Estocásticos

Um processo estocástico $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas em $\mathbb{T}$, isto é, para cada $t \in \mathbb{T}$, $X(t)$ é uma variável aleatória. Por exemplo, poderíamos ter $\mathbb{T} = \{1, 2, ...\}$ ou $\mathbb{T} = [0, \infty)$.

Ruína do Jogador

Um jogador, a cada instante de tempo, pode ganhar $R\$1,00$ com probabilidade p, ou pode perder $R\$1,00$ com probabilidade $1-p$. Seja $X(t)$, $t \in \mathbb{T} = \{0, 1, \ldots\}$ a fortuna do jogador no instante t. Temos que $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é um processo estocástico que obedece a seguinte equação:

$$X(t+1) = X(t) + U(t+1)$$

onde $U(t) = 1$ com probabilidade p e $U(t) = -1$ com probabilidade $1-p$, e $X(0)$ é a fortuna inicial. Pergunta: Qual é a probabilidade da fortuna do jogador atingir uma determinada meta N antes de quebrar?

Processos de Markov

Vamos supor que $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots\}$ e que $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ seja um processo estocástico tomando valores em um conjunto contável $\mathcal{X}$, por exemplo $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ou $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$. Diremos que $\{X(t); t \in \mathbb{T}\}$ é uma cadeia de Markov se

$$P(X(k+1) = j | X(0) = i_0, \dots, X(k-1) = i_{k-1}, X(k) = i) = p_{ij}.$$

para todos os estados possíveis $i_0, \dots, i_{k-1}, i, j$ e $k \geq 0$. Devemos ter $p_{ij} \geq 0$ e para todo $i \in \mathcal{X}$,

$$\sum_{j \in \mathcal{X}} p_{ij} = 1.$$

Processos de Markov

Definimos a matriz de transição $\mathbf{P}$ como sendo:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Ruína do Jogador

A ruína do jogador com meta de fortuna N é uma cadeia de Markov com $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, N\}$ e a seguinte matriz de transição de probabilidade:

$$\begin{aligned} p_{00} &= 1, \\ p_{ii+1} &= p, \quad p_{ii-1} = 1 - p, \\ p_{NN} &= 1. \end{aligned}$$

Humor do Mercado Financeiro

Suponha que o mercado financeiro possa a cada dia estar em um dos 3 estados:

1. Estado 0: estável
2. Estado 1: em alta
3. Estado 2: em baixa

Humor do Mercado Financeiro

Suponha que a cadeia de Markov possua a seguinte matriz de transição $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Em 1 ano qual é proporção do tempo que o mercado fica em cada um dos estados acima?

Modelo de Previsão Meteorológica

Suponha que a probabilidade de chover ou não dependa das condições meteorológicas dos 2 dias anteriores. Definimos os estados:

1. Estado 0: choveu hoje e ontem
2. Estado 1: choveu hoje mas não ontem
3. Estado 2: não choveu hoje mas choveu ontem
4. Estado 3: não choveu hoje nem ontem

Modelo de Previsão Meteorológica

Suponha que se tenha as seguintes informações após análise estatística:

1. Probabilidade de chover amanhã dado que choveu hoje e ontem é 0,7
2. Probabilidade de chover amanhã dado que choveu hoje mas não ontem é 0,5
3. Probabilidade de chover amanhã dado que não choveu hoje mas choveu ontem é 0,4
4. Probabilidade de chover amanhã dado que não choveu hoje nem ontem é 0,2

Modelo de Previsão Meteorológica

Obtemos que a matriz de transição **P** é:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Caminhada Aleatória

Considere $\mathcal{X} = \{0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$ e

$$p_{ii+1} = p, \;\; p_{ii-1} = 1 - p.$$

Este processo é conhecido como a caminhada aleatória.

Risco Operacional

Suponha que uma empresa financeira classifique os seus estados de processamento de transações de 0 a 5 de acordo com o tempo necessário para a sua liquidação, segundo o modelo abaixo.

1. Estado 0: transação está sem atraso
2. Estado 1: transação está com 1 dia de atraso
3. Estado 2: transação está com 2 dias de atraso
4. Estado 3: transação está com 3 dias de atraso
5. Estado 4: transação liquidada sem pagamento de multa
6. Estado 5: transação liquidada com pagamento de multa

Risco Operacional

A instituição tem uma série de dados no tempo razoável, e esses dados indicam que a cadeia de Markov possui a seguinte matriz de transição $\mathbf{P}$ é:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qual é a probabilidade de uma transação terminar em um estado com pagamento de multa? Supondo 1000 transações por dia, cada transação envolvendo cerda de $R\$1.000.000,00$ (um milhão), que a multa seja de $0,01\%$ ao dia, e que as transações liquidadas com multa tenham em média 8 dias de atraso, qual é a perda esperada por dia e por mês (22 dias)?

Equações de Chapman-Kolmogorov

Definimos a matriz $\mathbf{P}^{(n)} = [p_{ij}^n]$ onde

$$p_{ij}^n = P(X(n+m) = j | X(m) = i).$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Temos então as equações de Chapman-Kolmogorov:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{n+m} &= P(X(n+m) = j | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} P(X(n+m) = j, X(n) = \ell | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} P(X(n+m) = j | X(n) = \ell, X(0) = i) P(X(n) = \ell | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} P(X(n+m) = j | X(n) = \ell) P(X(n) = \ell | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} P(X(m) = j | X(0) = \ell) P(X(n) = \ell | X(0) = i) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{X}} p_{i\ell}^{n} p_{\ell j}^{m}
\end{aligned}
$$

Ou seja, $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$.

Modelo de Previsão Meteorológica

Dado que choveu na 2a e 3a feira, qual é a probabilidade de chover na 5a feira? Resposta: 0,61.

Estados da cadeia

Os estados de uma cadeia de Markov podem ser classificados de recorrentes e transientes. Um estado i é recorrente se a probabilidade de re-entrar nesse estado começando dele mesmo é 1, transiente caso contrário. Em uma cadeia de Markov finita não se pode ter todos os estados transientes. Uma cadeia de Markov é irredutível se todos os estados se comunicam entre si.

Modelo de Previsão Meteorológica

Todos os estados são recorrentes. Nesse caso diz-se que a cadeia de Markov é ergodica.

Ruína do Jogador

Temos 2 estados recorrentes (na verdade chamados de absorventes), 0 e N, e todos os outros são transientes.

Risco Operacional

Temos 2 estados absorventes, 5 e 6, e todos os outros são transientes.

Probabilidade Limite

O que podemos dizer sobre $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n$? Vamos considerar a matriz $\mathbf{P}$ finita e 2 situações.

1o Caso: A matriz $\mathbf{P}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

onde $\mathbf{T}$ contém os estados transientes, e $\mathbf{I}$, a matriz identidade, contém os estados absorventes.

Probabilidade Limite

Efetuando os cálculos obtemos que

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^n & \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{T}^k \mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}^n = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{T}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Risco Operacional

Temos que

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Risco Operacional

Segue portanto que

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,9712 & 0,0288 \\ 0,952 & 0,048 \\ 0,92 & 0,08 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Portanto temos que a probabilidade de uma transação terminar em atraso com multa, começando de sem atraso é $2,88\%$, e obviamente de terminar sem multa é de $97,12\%$.

Risco Operacional

A perda esperada para 1 dia é:
Perda esperada em 1 dia
$\cong 1000 \times 0,0288 \times ((1,0001)^8 - 1) \times 10^6 = R\$\, 23.000,00.$
Perda esperada em 1 mês (22 dias) $= R\$\, 22 \times 23.000,00 \cong R\$\, 500.000,00.$

Probabilidade Limite

2o Caso: A cadeia é ergodica. Nesse caso temos que $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j$, independente de i. Chamando de π o vetor formado por π_i temos que π é a única solução que satisfaz:

$$\pi' = \pi'\mathbf{P}$$
$$1 = \sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i.$$

Temos também a seguinte interpretação para π_i. π_i representa a proporção do tempo que a cadeia de Markov permanece no estado i.

Humor do mercado financeiro

Assumindo já as distribuições estacionárias, temos que resolver as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0,5\pi_0 + 0,3\pi_1 + 0,2\pi_2, \\ \pi_1 &= 0,4\pi_0 + 0,4\pi_1 + 0,3\pi_2, \\ \pi_2 &= 0,1\pi_0 + 0,3\pi_1 + 0,5\pi_2, \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2. \end{aligned}$$

Temos a seguinte solução:

$$\pi_0 = \frac{21}{62} = 33,87\%, \;\; \pi_1 = \frac{23}{62} = 37,1\%, \;\; \pi_2 = \frac{18}{62} = 29,03\%.$$

A ruína do jogador

Qual é a probabilidade do jogador atingir a fortuna N antes de quebrar, dado que começou com i ? Poderíamos resolver esse problema usando a fórmula do Caso 1 visto anteriormente. Vamos entretanto resolver esse problema de forma analítica, usando o cálculo de probabilidade por condicionamento. Seja A_i o evento o jogador atinge N antes de quebrar, começando de i. Seja $Y = 1$ se a primeira jogada é vitoriosa, $Y = 0$ caso contrário. Temos que

$$P(A_i) = E(P(A_i|Y)).$$

Temos também que para $1 \leq i \leq N-1$,

$$P(A_i|Y = 1) = P(A_{i+1})$$
$$P(A_i|Y = 0) = P(A_{i-1}).$$

A ruína do jogador

Logo,

$$\begin{aligned} P(A_i) &= E(P(A_i|Y)) = p \times P(A_i|Y=1) + (1-p) \times P(A_i|Y=0) \\ &= p \times P(A_{i+1}) + (1-p) \times P(A_{i-1}). \end{aligned}$$

Escrevendo $P_i = P(A_i)$, $q = 1 - p$, temos a seguinte equações a diferenças e condições inicial e terminal:

$$P_i = p \times P_{i+1} + q \times P_{i-1}, \;\; P_0 = 0, \;\; P_N = 1.$$

A ruína do jogador

Resolvendo para $q \neq p$ temos a fórmula fechada,

$$P_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Para $q = p$ temos a fórmula fechada,

$$P_i = \frac{i}{N}.$$