1. Considerem os vetores

$$\vec{v}_1 = \mathbf{i} \ \vec{v}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} \text{ e } \vec{v}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{3k}$$

- Prove que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é LI
- Escreva os vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ como combinação linear de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$
- Escreva o vetor $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ como combinação linear de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$
- Prove que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base.

Solução Este foi o único que fizemos na aula. Para a primeira parte vamos mostrar que se

$$\vec{0} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$$

então devemos ter $a = b = c = 0$.
Reescrevemos a fórmula acima usando os vetores canônicos: $mathbfi$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ e as definições de $\vec{v}_i$ temos:

$$\vec{0} = (a + b + c)\mathbf{i} + (b + c)\mathbf{j} + 3c\mathbf{k}$$

daí concluímos que:

$$\begin{gathered} 3c = 0 \implies c = 0 \\ b + c = 0 \implies b + 0 = 0 \implies b = 0 \\ a + b + c = 0 \implies a = 0 \end{gathered}$$

que era o que precisávamos mostrar.
Para a segunda parte vemos que $\mathbf{i} = \vec{v}_1$ e $\mathbf{j} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ e só para completar temos que $\mathbf{k} = \frac{1}{3}(\vec{v}_3 - \vec{v}_2)$
Assim o vetor $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ é o mesmo que $2(\vec{v}_1) - 3(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \frac{5}{3}(\vec{v}_3 - \vec{v}_2)$ que simplificando se escreve

$$5\vec{v}_1 - \frac{14}{3}\vec{v}_2 + \frac{5}{3}\vec{v}_3$$

A última parte do exercício pede para provar que o conjunto é uma base. Para ser base precisa mostrar que é um conjunto LI, o que já fizemos, e que o conjunto gera o espaço, isto é que todo vetor de V_3 se escreve como combinação linear de $\vec{v}_i$. Mas simplesmente fazemos como no último exercicio.

$$a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = a(\vec{v}_1) + b(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \frac{c}{3}(\vec{v}_3 - \vec{v}_2)$$

etc.

2.

- Mostre que os vetores $(\sqrt{3}, 1, 0)$, $(1, \sqrt{3}, 1)$ e $(0, 1, \sqrt{3})$ são LI.
- Mostre que os vetores $(\sqrt{2}, 1, 0)$, $(1, \sqrt{2}, 1)$ e $(0, 1, \sqrt{2})$ são LD.
- Encontre todos os valores reais possíveis de t para que os vetores $(t, 1, 0)$, $(1, t, 1)$ e $(0, 1, t)$ sejam LD.

Solução: Vamos mostrar que o primeiro conjunto de vetores é LI. Então

$$\vec{0} = a(\sqrt{3}, 1, 0) + b(1, \sqrt{3}, 1) + c(0, 1, \sqrt{3})$$

Então

$$\begin{aligned}\sqrt{3}a + b &= 0\\ a + \sqrt{3}b + c &= 0\\ b + \sqrt{3}c &= 0\end{aligned}$$

Note que da primeira e terceira equações concluímos que $a = c$. A segunda equação fica: $2a + \sqrt{3}b = 0$ podemos multiplicar esta equação por $\frac{\sqrt{3}}{2}$ obtendo $\sqrt{3}a + \frac{3}{2}b = 0$. Agora subtraindo a primeira equação original temos $\frac{1}{2}b = 0$. Então $b = 0$ acarreta que $a = 0$ e portanto também $c = 0$. Pronto. Porque o outro conjunto é LD. Procedemos como anteriormente com a única diferença de que no lugar de $\sqrt{3}$ temos $\sqrt{2}$. as equações anteriores ficam assim:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}a + b &= 0\\ a + \sqrt{2}b + c &= 0\\ b + \sqrt{2}c &= 0\end{aligned}$$

Novamente concluimos rapidamente que $a = c$ da mesma forma que antes. Então a segunda equação fica: $2a + \sqrt{2}b = 0$ se multiplicamos esta equação por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ vemos que esta é exatamente a primeira equação. Ou seja para qualquer valor de b que escolhemos obtemos soluções para a e c. Por exemplo, $a = -1$ $b = \sqrt{2}$ e $c = -1$ é uma solução do sistema e a combinação linear dos vetores com estes coeficientes produz o vetor nulo.

3. Se três vetores de V_n, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI. Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

- $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ e $\vec{c}+\vec{a}$ formam um conjunto LI.
- $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ e $\vec{c}+\vec{a}$ formam um conjunto LI.

Solução Vamos começar verificando que o segundo item é falso pois o primeiro vetor do conjunto $\vec{a}-\vec{b}$ é combinação linear dos outros dois. Então os vetores serão LD.

$$\vec{a}-\vec{b}=(\vec{c}+\vec{a})-(\vec{b}+\vec{c})$$

O primeiro ítem é verdadeiro pois se

$$\vec{0}=\alpha(\vec{a}+\vec{b})+\beta(\vec{b}+\vec{c})+\gamma(\vec{c}+\vec{a})=(\alpha+\gamma)\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{b}+(\beta+\gamma)\vec{c}$$

por causa da hipótese de independência de $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$. Isto nos dá as equações:

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma&=0\\ \alpha+\beta&=0\\ \beta+\gamma&=0\end{aligned}$$

o que trivialmente implica que todos devem ser zero, provando que estes vetores são LI. Mais prá frente veremos alguns resultados que nos permitirão decidir mais rapidamente sobre a dependência linear dos conjuntos.